ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1100–1114

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В УСЛОВИЯХ РАДИАЦИОННОГО ОБМЕНА[1)]

Е. В. Амосова[1,2]

[1] 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия

[2] 690091 Владивосток, ул. Суханова, 8, ДВФУ, Россия

e-mail: el_amosova@mail.ru

Поступила в редакцию 12.01.2022 г.
Переработанный вариант 07.02.2022 г.
Принята к публикации 11.03.2022 г.

Рассмотрена модель вязкого совершенного газа в условиях радиационно-конвективной теплопроводности. Доказана однозначная разрешимость краевой задачи в классах обобщенных и классических решений для уравнений сложного теплообмена в сжимаемой среде на отрезке. Библ. 30.

Ключевые слова: система уравнений Навье–Стока, радиоактивный газ, глобальная разрешимость.

DOI: 10.31857/S004446692207002X

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения, описывающие процессы конвективно-кондуктивного переноса теплового излучения несжимаемой среды рассмотрены в работах [1]–[4] и хорошо изучены.

В данной работе изучается модельная система уравнений одномерного движения вязкого сжимаемого газа с учетом радиационного и конвективного теплообмена. Для случая одной пространственной переменной модель вязкого теплопроводного газа в условиях радиационного обмена в ограниченной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}$ моделируется в нормализованном виде следующей системой, где используется $P1$ (диффузионное) приближение для уравнения переноса излучения [5]–[7]:

$$\begin{gathered}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - R\frac{\partial}{\partial x}(\rho\theta),\\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\\
\rho c_v\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \lambda\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \left(\mu\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x} - bk_\alpha(|\theta|\theta^3 - \varphi),\\
-\alpha\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_\alpha(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u, ρ, θ, соответственно, скорость, плотность и нормализованная температура совершенного газа, давление определяется из уравнения Клайперона $p = R\rho\theta$, функция φ интерпретируется как нормализованная интенсивность излучения. Через μ, λ, c_v, R обозначены положительные физические константы, описывающие среду, μ – вязкость, λ – коэффициент теплопроводности газа, c_v – теплоемкость при постояном объеме, R – газовая постоянная. Постоянные b, α описывают радиационно-термические свойства среды, k_α – коэффициент поглощения.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00113 а).

Рассмотрим движение газа через интервал $\Omega_0 = \{x\colon 0 < x < L_0\}$ с проницаемыми неподвижными границами. В начальный момент времени известны характеристики среды:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \rho\big|_{t=0} = \rho_0(x) > 0, \quad \theta\big|_{t=0} = \theta_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}_0.$$

При $t > 0$ область течения ограничена двумя границами. Через левую газ втекает $u\big|_{x=0} > 0$. Тогда на левой границе задаются условия на скорость, температуру, интенсивность излучения, а также плотность среды:

$$u\big|_{x=0} = u_1(t), \quad \rho\big|_{x=0} = \rho_1(t), \quad \theta\big|_{x=0} = \theta_1(t), \quad -\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \gamma(\varphi\big|_{x=0} - \theta_1^4) = 0.$$

Через правую границу газ вытекает. Следовательно, на правой границе задаются только скорость, температура и интенсивность среды:

$$u\big|_{x=L_0} = u_2(t), \quad \theta\big|_{x=L_0} = \theta_2(t), \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=L_0} + \gamma(\varphi\big|_{x=L_0} - \theta_2^4) = 0. \tag{2}$$

Коэффициент γ описывает отражающие свойства границы.

Отметим, что разрешимость граничных задач для уравнений вязкого теплопроводного газа в случае одномерного движения с теплоизолированной непроницаемой границей, либо при условии отсутствия напряжения ранее была изучена в работах [8]–[10].

Теоретический анализ краевых задач, связанных с различными моделями радиационного теплообмена с классическими краевыми условиями рассматривался многими авторами [11]–[22].

В то же время вопросы корректности начально-краевых задач для модели (1), (2), учитывающей радиационный теплообмен внутри области, а также анализ устойчивости стационарных решений, являются открытыми.

При исследовании сформулированной задачи удобно воспользоваться лагранжевыми координатами. Согласно формулам перехода [23] область течения в эйлеровых координатах в новых координатах при $t > 0$ перейдет в

$$Q_t = \{(x;t)\colon 0 < t < T;\ x \in \Omega_t\}, \quad \Omega_t = \{x\colon a(t) < x < b(t)\},$$

а при $t = 0$ – соответственно в интервал $\Omega_0 = \{x\colon 0 < x < L\}$, где

$$L = \int\limits_{\Omega_0} \rho_0(x)dx, \quad L \neq 0.$$

При $t = T$ вместо Q_T, Ω_T будем писать Q, Ω соответственно.

Образами границ $x = 0$, $x = L_0$ в новых переменных будут

$$a(t) = -\int\limits_0^t u_1(\tau)\rho_1(\tau)d\tau, \quad b(t) = L - \int\limits_0^t u_2(\tau)\rho_2(\tau)d\tau, \tag{3}$$

где $\rho_2(t) = \rho(x,t)\big|_{x=L_0}$ определяется из уравнения состояния. Как следствие уравнения состояния для сжимаемой среды для одномерного пространства, запишем равенство

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = m(t) > 0, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Перейдем в уравнениях (1) и условиях (2) к массовым лагранжевым переменным. В массовых лагранжевых переменных задача о протекании вязкого радиационного теплопроводного политропного газа через заданный интервал имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right) - R\frac{\partial}{\partial x}(\rho\theta), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

$$c_v\frac{\partial\theta}{\partial t} = \lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + \left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x} - bk_\alpha(|\theta|\theta^3 - \varphi)\rho^{-1}, \tag{7}$$

$$-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+k_\alpha(\varphi-|\theta|\theta^3)\rho^{-1}=0, \tag{8}$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\quad \theta\big|_{t=0}=\theta_0(x),\quad \rho\big|_{t=0}=\rho_0(x),\quad x\in\Omega_0,$$

$$u\big|_{x=a(t)}=u_1(t),\quad \theta\big|_{x=a(t)}=\theta_1(t),\quad -\alpha\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=a(t)}+\gamma(\varphi\big|_{x=a(t)}-\theta_1^4)=0,\quad \rho\big|_{x=a(t)}=\rho_1(t), \tag{9}$$

$$u\big|_{x=b(t)}=u_2(t),\quad \theta\big|_{x=b(t)}=\theta_2(t),\quad \alpha\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=b(t)}+\gamma(\varphi\big|_{x=b(t)}-\theta_2^4)=0,\quad t\in(0,T).$$

Будем считать, что выполнены ограничения на начальную и граничную плотность газа

$$0<m_0\le\rho_0\le M_0<\infty,\quad \rho_1>0. \tag{10}$$

2. СИЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Далее будем использовать обычные обозначения $L^p(W_p^l)$ для пространств функций, интегрируемых со степенью $p\ge 1$ (вместе с обобщенными производными до порядка $l\ge 0$). Через $L^2(0,T;X)$ обозначим пространство измеримых функций (пространство непрерывных функций, имеющих непрерывные в $[0,T]$ производные до порядка l), отображающих интервал $(0,T)$ ($[0,T]$) в пространство X таких, что

$$\|f\|^2_{L^2(0,T;X)}=\int_0^T\|f\|_X^2\,dt<\infty,\quad \|f\|_{C^l([0,T];X)}=\max_{0\le t\le T}\|f\|_X<\infty.$$

Через H^s будем обозначать пространство W_2^s, $s>0$,

$$H^{2,1}=\{q\in L^2(0,T;H^2(\Omega))\colon q\in H^1(0,T;L^2(\Omega))\},$$

$$H^{1,1}=\{q\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))\colon q\in H^1(0,T;L^2(\Omega))\}.$$

Рассмотрим пространство

$$Y=\{(q_1,q_2,q_3,q_4)\colon q_1\in H^{2,1},\quad q_2\in H^{1,1},\quad q_3\in H^{2,1},\quad q_4\in L^2(0,T;H^2(\Omega))\}.$$

Имеют место следующие свойства вложений [21]:

$$\begin{gathered}H^{2,1}\subset L^2(0,T;H^1(\Omega))\quad \text{непрерывно и компактно},\\ H^{2,1}\subset C(\bar{Q})\quad \text{непрерывно}.\end{gathered} \tag{11}$$

Определение 1. Сильным решением задачи (5)–(9) называется совокупность функций $\{u,\rho,\theta,\varphi\}\in Y$, удовлетворяющая уравнениям (5)–(8) почти всюду в $(0,T)\times\Omega$ и принимающая граничные и начальные значения (9) в смысле следов функций из указанных классов.

Пусть выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered}u_i\in H^1(0,T),\quad \theta_i\in H^1(0,T),\quad \rho_1\in H^1(0,T),\quad i=1,2,\\ \rho_0\in L^\infty(\Omega_0),\quad u_0\in L^\infty(\Omega_0),\quad \theta_0\in L^\infty(\Omega_0).\end{gathered} \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (10), (12). *Тогда существует единственное сильное решение задачи* (5)–(9), *причем функции* $\theta,\rho,u,\varphi(a(t),t),\varphi(b(t),t)$ *ограниченные,* θ, $\varphi(a(t),t)$, $\varphi(b(t),t)$ *неотрицательные, а* ρ *положительная.*

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1

$$u_i(t)\in C^{1+\beta}[0,T],\quad \theta_i(t)\in C^{1+\beta}[0,T],\quad i=1,2;\quad \rho_1(t)\in C^{1+\beta}[0,T],$$

$$u_0(x)\in C^{2+\beta}(\bar{\Omega}),\quad \theta_0(x)\in C^{2+\beta}(\bar{\Omega}),\quad \rho_0(x)\in C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$$

и выполнены условия согласования

$$u_1(0)=u_0(0),\quad \theta_1(0)=\theta_0(0),\quad \rho_1(0)=\rho_0(0)\ \ \text{при}\ \ x=0,$$

$$u_2(0) = u_0(L), \quad \theta_2(0) = \theta_0(L), \ \textit{при} \ \ x = L.$$

Тогда решение задачи (5)–(9) *является классическим*:

$$u(x,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}), \quad \theta(x,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}),$$

$$\varphi(x,t) \in C^{2+\beta,1}(\bar{Q}), \quad \rho(x,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}).$$

Доказательство теоремы 1 и теоремы 2 основано на применении априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и T. Полученные оценки позволяют продолжить на весь временной промежуток локальное решение, которое устанавливается с помощью принципа сжатых отображений. Операторное уравнение, эквивалентное задаче, строится путем линеаризации уравнений (5)–(8) и условий (9), точно также, как это сделано в работах [25], [26]. На малом интервале времени полученный оператор сжимающий, следовательно, можно применить теорему Банаха.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

На первом этапе проверятся ограниченность модуля скорости, положительность температуры и граничных значений функции интенсивности излучения, затем доказывается строгая положительность плотности. Вывод этих оценок опирается на ряд вспомогательных утверждений. В заключение выводятся оценки для старших производных от искомых функций и исследуются дифференциальные свойства решений.

В дальнейшем будем использовать формулу дифференцирования интеграла с пределами интегрирования, зависящими от параметра, справедливую для области с условиями (3), (4). Для $f \in C^1(\bar{Q})$ имеет место формула

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f^2(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f\frac{\partial f}{\partial t}dx - m(t)[f^2(b(t),t) - f^2(a(t),t)], \quad t \ge 0. \tag{13}$$

Лемма 1. *Пусть* $y \in H^{2,1}$, $k > 0$, $\delta > 0$, $k_1 = \mathrm{const}$, $z_1 = \max\{y - k, 0\}$, $z_2 = \min\{y + k, 0\}$. *Обозначим через* $z_{i0} = z_i\big|_{t=0}$, $z_{ia} = z_i\big|_{x=a(t)}$, $z_{ib} = z_i\big|_{x=b(t)}$, $i = 1,2$. *Тогда справедливы равенства*

$$2\int_0^t\int_{\Omega_t}\frac{\partial y}{\partial t}z_i\,dxd\tau = \|z_i(t)\|^2 - \|z_i(0)\|^2 + 2\int_0^t m(\tau)[(z_{ib})^2 - (z_{ia})^2]d\tau, \tag{14}$$

$$\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{z_i}{\sqrt{z_i^2+\delta}}dxd\tau = \int_{\Omega_t}\frac{(z_i+k_1)z_i}{\sqrt{z_i^2+\delta}}dx - \delta I_1(z_i,k_1) + I_2(z_i,k_1) \quad i = 1,2, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} I_1(z_i,k_1) = \int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{z_i+k_1}{(z_i^2+\delta)^{3/2}}\frac{\partial z_i}{\partial t}dxd\tau, \\ I_2(z_i,k_1) = -\int_{\Omega_0}\frac{(z_{i0}+k_1)z_{i0}}{\sqrt{z_{i0}^2+\delta}}dx + \int_0^t m(\tau)\left[\frac{(z_{ib}+k_1)z_{ib}}{\sqrt{z_{ib}^2+\delta}} - \frac{(z_{ia}+k_1)z_{ia}}{\sqrt{z_{ia}^2+\delta}}\right]d\tau. \end{gathered} \tag{16}$$

Доказательство. Вследствие (11) имеют место следующие равенства: $z_i(x,0) = z_{i0}$, $z_i(a(t),t) = z_{ia}$ $z_i(b(t),t) = z_{ib}$, где $i = 1,2$. Умножим $(\partial y/\partial t)$ на z_i, а затем на $z_i/\sqrt{z_i^2+\delta}$, $i = 1,2$, и проинтегрируем по области Ω_t. Используя (13), получаем

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial y}{\partial t}z_i\,dx = \int_{\Omega_t}\frac{\partial z_i}{\partial t}z_i\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}z_i^2\,dx + m(t)[(z_{ib})^2 - (z_{ia})^2],$$

$$\int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{z_i}{\sqrt{z_i^2 + \delta}} dx = \int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial (z_i + k_1)}{\partial t} \frac{z_i}{\sqrt{z_i^2 + \delta}} dx =$$
$$= \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_t} \frac{(z_i + k_1) z_i}{\sqrt{z_i^2 + \delta}} dx - \delta \int\limits_{\Omega_t} \frac{(z_i + k_1)}{(z_i^2 + \delta)^{3/2}} \frac{\partial z_i}{\partial t} dx + m(t) \left[\frac{(z_{ib} + k_1) z_{ib}}{\sqrt{(z_{ib})^2 + \delta}} - \frac{(z_{ia} + k_1) z_{ia}}{\sqrt{(z_{ia})^2 + \delta}} \right].$$

Проинтегрируем по времени от 0 до t, получим (14), (15). Лемма доказана.

Согласно предположению о суммируемости $(\partial^2 u/\partial x^2)$ и $(\partial u/\partial t)$, функция $(\partial u/\partial x)$ непрерывна по x при почти всех $t \in (0,T)$. Чтобы найти априорную оценку для функции скорости $u(x,t)$, получим выражения для $(\partial u/\partial x)\big|_{x=a(t)}$, $(\partial u/\partial x)\big|_{x=b(t)}$, через данные задачи. Для этого перепишем (6) в виде равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{u\rho}\right),$$

которое рассмотрим при $x = a(t)$ и $x = b(t)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u_1(t)}{m(t)}\right), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=b(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u_2(t)}{m(t)}\right). \tag{17}$$

Умножим (5) на u скалярно в $L^2(\Omega_t)$. Учитывая (13), (17), получаем

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} |u|^2\,dx + m(t)(u_2^2(t) - u_1^2(t)) + \int\limits_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dx = \\ = \mu m(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{u_2(t) - u_1(t)}{m(t)}\right] - Rm(t)(\theta_2(t) - \theta_1(t)). \end{gathered} \tag{18}$$

Обозначим через

$$\begin{gathered} M_u = \max\left\{\|u_1\|_{H^1(0,T)}, \|u_2\|_{H^1(0,T)}, \|u_0\|_{L^\infty(0,L)}\right\} > 0, \\ \Sigma(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{u\in(-M_u;M_u)} |u|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_0|^2\,dx + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^t m(\tau)[(u_2)^2 - (u_1)^2 + 2R(\theta_2 - \theta_1)]d\tau - \mu\int\limits_0^t m(\tau)\left(\frac{u_2(\tau) - u_1(\tau)}{m(\tau)}\right)' d\tau. \end{gathered} \tag{19}$$

Заметим, что $\Sigma(t) \in C[0,T]$ и существуют такие $\sigma_0 \ge 0$, $\sigma_1 > 0$, что

$$-\infty < -\sigma_0 \le \Sigma(t) \le \sigma_1 < \infty. \tag{20}$$

Положим $\zeta_1 = \max\{u - M_u, 0\} \ge 0$, $\zeta_2 = \min\{u + M_u, 0\} \le 0$.

Умножим (5) последовательно на ζ_1, ζ_2 скалярно в Ω_t и проинтегрируем по времени. Воспользовавшись (14) и условиями: $\zeta_i\big|_{t=0} = 0$, $\zeta_i\big|_{x=a(t)} = 0$, $\zeta_i\big|_{x=b(t)} = 0$, $i = 1,2$, найдем

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t} |\zeta_1|^2\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{u>M_u} \left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dx d\tau = 0, \\ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t} |\zeta_2|^2\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{u<-M_u} \left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dx d\tau = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Проинтегрируем (18) по времени от 0 до t, учитывая (19), (21), находим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{u\in(-M_u;M_u)} \left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dx d\tau + \Sigma(t) = 0. \tag{22}$$

Объединяя (21) и (22), вследствие (20), получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_1|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_2|^2dx+\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dxd\tau-\sigma_0\le 0. \tag{23}$$

Пусть $\rho\ge 0$. Обозначим через

$$M=\max\left\{\|\theta_1\|_{H^1(0,T)},\|\theta_2\|_{H^1(0,T)},\|\theta_0\|_{L^\infty(0,L)},\|\varphi_0\|^{1/4}_{L^\infty(0,L)}\right\}>0.$$

Положим $\eta=\max\{\theta-M,0\}\ge 0$, $\eta|_{t=0}=0$, $\eta|_{x=a(t)}=0$, $\eta|_{x=b(t)}=0$. Умножим (7) на $(\eta/\sqrt{\eta^2+\delta_1})$, $\delta_1>0$, скалярно в Ω_t. Учитывая (15), находим

$$\begin{gathered}c_\nu\int_{\Omega_t}\frac{(\eta+\sigma_0/(c_\nu L))\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dx+\lambda\delta_1\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\rho}{(\eta^2+\delta_1)^{3/2}}dxd\tau-\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dxd\tau+\\+\int_0^t\int_{\Omega_t}bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dxd\tau=\delta_1\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{(\eta+\sigma_0/(c_\nu L))}{(\eta^2+\delta_1)^{3/2}}\frac{\partial\eta}{\partial t}dxd\tau.\end{gathered} \tag{24}$$

Заметим, что

$$\int_0^t\int_{\theta>M,\varphi>M^4}bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dxd\tau\le\int_0^t\int_{\Omega_t}bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dxd\tau. \tag{25}$$

Равенство (24) вместе с (23), (25) приводит к оценке

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_1|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_2|^2dx+c_\nu\int_{\Omega_t}\frac{(\eta+\sigma_0/(Lc_\nu))\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dx-\int_{\Omega_t}\frac{\sigma_0}{L}dx+\\+\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\left(1-\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}\right)dxd\tau+\\+\int_0^t\int_{\theta>M,\varphi>M^4}bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dxd\tau\le\delta_1\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{(\eta+\sigma_0/(Lc_\nu))}{(\eta^2+\delta_1)^{3/2}}\frac{\partial\eta}{\partial t}dxd\tau.\end{gathered} \tag{26}$$

Далее, пусть

$$\psi=\begin{cases}\varphi^{1/4}-M, & \varphi>M^4,\\ 0, & \varphi\le M.\end{cases}$$

Умножим (8) скалярно на $(\psi/\sqrt{\psi^2+\delta_1})$. Учитывая (9), получаем

$$\begin{gathered}\frac{\alpha\delta_1}{4}\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\frac{\rho\varphi^{-3/4}}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}dxk_\alpha\int_{\Omega_t}(\varphi-\theta^4)\frac{\rho^{-1}\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}dx+\\+\gamma(\varphi|_{x=b(t)}-\theta_2^4)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}\bigg|_{x=b(t)}+\gamma(\varphi|_{x=a(t)}-\theta_1^4)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}\bigg|_{x=a(t)}=0.\end{gathered}$$

Последние два слагаемых неотрицательны, так как $\varphi>M^4\ge\max\{\theta_1^4,\theta_2^4\}$. Таким образом,

$$\int_{\varphi>M^4,\theta>M}k_\alpha\rho^{-1}(\varphi-\theta^4)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}dx\le\int_{\varphi>M^4}k_\alpha\rho^{-1}(\varphi-\theta^4)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}dx\le 0. \tag{27}$$

Умножая (27) на b, интегрируя по времени и складывая получившееся выражение с (26), находим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_1|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_2|^2dx+c_{\nu}\int_{\Omega_t}\frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dx+\frac{\sigma_0}{L}\int_{\Omega_t}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}-1\right)dx+\\+\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\left(1-\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}\right)dxd\tau+\\+\int_0^t\int_{\theta>M,\varphi>M^4}bk_{\alpha}(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}-\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}\right)dxd\tau\le\delta_1\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{(\eta+\sigma_0/(Lc_{\nu}))}{(\eta^2+\delta_1)^{3/2}}\frac{\partial\eta}{\partial t}dxd\tau.\end{gathered}\tag{28}$$

Доказательство обоснования предельного перехода по δ_1 в (28) требует только слагаемое, стоящее в правой части этого выражения. Для этого заметим, что

$$\begin{gathered}\delta_1\int_{\Omega_t}\frac{(\eta+\sigma_0/(Lc_{\nu}))}{(\eta^2+\delta_1)^{3/2}}\frac{\partial\eta}{\partial t}dx=\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(\sigma_0/(Lc_{\nu}))\eta-\delta_1}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}\right)dx=\\=\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\frac{(\sigma_0/(Lc_{\nu}))\eta-\delta_1}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dx\to\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\frac{\sigma_0}{Lc_{\nu}}dx=0\quad\text{при}\quad\delta_1\to0.\end{gathered}\tag{29}$$

При стремлении δ_1 к нулю, неравенство (28) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_1|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_2|^2dx+c_{\nu}\int_{\Omega_t}|\eta|dx\le0,\quad t>0.$$

Отсюда следует, что $\zeta_1=0$, $\zeta_2=0$, $\eta=0$, т.е. $-M_u\le u\le M_u$, $\theta\le M$.

Выберем $\psi=\max\{\varphi-M^4,0\}\ge0$, $\psi|_{t=0}=0$. Умножим (8) на ψ, учитывая (9), получаем

$$\alpha\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2dx+k_{\alpha}\int_{\varphi>M^4}\rho^{-1}(\varphi-\theta^4)(\varphi-M^4)dx+\gamma(\varphi|_{x=b(t)}-\theta_2^4)\psi(b(t),t)+\gamma(\varphi|_{x=a(t)}-\theta_1^4)\psi(a(t),t)=0.$$

Так как первые два слагаемых неотрицательны, то

$$\begin{gathered}0\ge\gamma(\varphi|_{x=b(t)}-\theta_2^4)\,\psi|_{x=b(t)}+\gamma(\varphi|_{x=a(t)}-\theta_1^4)\,\psi|_{x=a(t)}=\gamma(\varphi|_{x=b(t)}-M^4)\,\psi|_{x=b(t)}+\gamma(M^4-\theta_2^4)\,\psi|_{x=b(t)}+\\+\gamma(\varphi|_{x=a(t)}-M^4)\,\psi|_{x=a(t)}+\gamma(M^4-\theta_1^4)\,\psi|_{x=a(t)}\ge\gamma(\psi|_{x=b(t)})^2+\gamma(\psi|_{x=a(t)})^2.\end{gathered}$$

Отсюда $\psi|_{x=a(t)}=0$, $\psi|_{x=b(t)}=0$, т.е. $\varphi|_{a(t)}\le M^4$, $\varphi|_{b(t)}\le M^4$.

Для оценок снизу умножим (21), (22) на (-1) и сложим полученные выражения, учитывая (20), $\zeta_1=0$, $\zeta_2=0$, получаем

$$-\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dxd\tau-\sigma_1\le0.\tag{30}$$

Пусть $\varepsilon>0$, положим $\eta=\min\{\theta+\varepsilon,0\}\le0$, $\eta|_{t=0}=0$, $\eta|_{x=a(t)}=0$, $\eta|_{x=b(t)}=0$, $\psi=-|\varphi|^{1/4}+\varepsilon$ при $\varphi<-\varepsilon^4$, и $\psi=0$ при $\varphi\ge-\varepsilon^4$.

Умножим (7) на $(\eta/\sqrt{\eta^2+\delta_2})$, $\delta_2>0$, а (8) – на ψ скалярно в Ω_t, проинтегрируем по времени. Учитывая (9), (15), (30), находим

$$\begin{gathered}c_{\nu}\int_{\Omega_t}\frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^2+\delta_2}}dx+\frac{\sigma_1}{L}\int_{\Omega_t}\left(\frac{(-\eta)}{\sqrt{\eta^2+\delta_2}}-1\right)dx+\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\left(-1+\frac{(-\eta)}{\sqrt{\eta^2+\delta_2}}\right)dxd\tau+\\+\int_0^t\int_{\theta>M,\varphi>M^4}bk_{\alpha}(|\theta^3|\theta-\varphi)\rho^{-1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_2}}-\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_2}}\right)dxd\tau\le\delta_2\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{(\eta-\sigma_1/(Lc_{\nu}))}{(\eta^2+\delta_2)^{3/2}}\frac{\partial\eta}{\partial t}dxd\tau.\end{gathered}\tag{31}$$

Устремляя δ_2 к нулю, рассуждая аналогично (28), приходим к оценке

$$\int\limits_{\Omega_t} |\eta| dx \le 0, \quad t > 0.$$

Отсюда следует, что $\eta = 0$, т.е. $\theta \ge -\varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем $\theta \ge 0$. Аналогично находим $\varphi(a(t),t) \ge 0$, $\varphi(b(t),t) \ge 0$.

Таким образом, справедливы следующие равномерные оценки сильного решения:

$$|u| < M_u, \quad 0 < \theta < M, \quad 0 < \varphi(a(t),t) < M^4, \quad 0 < \varphi(b(t),t) < M^4. \tag{32}$$

Оценки (32) справедливы до тех пор, пока $\rho \ge 0$. Поэтому на следующем этапе выводится соответствующая оценка для плотности.

4. ОЦЕНКА СНИЗУ И СВЕРХУ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ

Исключим выражение $(\rho\partial u/\partial x)$ из (5), используя (6), и проинтегрируем получившееся равенство по x от $a(t)$ до произвольного $x(t) > a(t)$:

$$\mu\frac{\partial \ln\rho}{\partial t} - R\rho\theta = \mu\frac{\partial \ln\rho_1}{\partial t} - R\rho_1\theta_1 + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{a(t)}^{x(t)} u dx' - (u_1)^2\rho_1 + u^2\rho.$$

После вторичного интегрирования по времени получим равенство

$$\mu\ln\rho - \int\limits_0^t \rho(u^2 + R\theta)d\tau = \mu\ln\rho_0(x) + \mu\ln\frac{\rho_1(t)}{\rho_1(0)} - \int\limits_0^t \rho_1((u_1)^2 + R\theta_1)d\tau + \int\limits_{a(t)}^{x(t)} u dx' - \int\limits_0^{x(t)} u_0 dx'. \tag{33}$$

Обозначим через

$$\Pi(x,t) = \ln\frac{\rho_0(x)\rho_1(t)}{\rho_1(0)} - \frac{1}{\mu}\int\limits_0^t \rho_1((u_1)^2 + R\theta_1)d\tau + \frac{1}{\mu}\int\limits_{a(t)}^{x(t)} u dx' - \frac{1}{\mu}\int\limits_0^{x(0)} u_0 dx'. \tag{34}$$

Заметим, что $\Pi(x,t) \in C(\bar{Q})$ и существуют постоянные $p_0 < p_1$ такие, что

$$-\infty < p_0 \le \Pi(x,t) \le p_1 < \infty. \tag{35}$$

Из (33), учитывая (34), получаем равенство

$$\rho\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int\limits_0^t \rho(u^2 + R\theta)d\tau\right\} = \exp\{\Pi(x,t)\}. \tag{36}$$

Умножим (36) на $\mu^{-1}(u^2 + R\theta)$ и проинтегрируем по времени от 0 до t, найдем

$$\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int\limits_0^t \rho(u^2 + R\theta)d\tau\right\} = 1 + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^t \exp\{\Pi(x,\tau)\}(u^2 + R\theta)d\tau.$$

Отсюда и из (36) следует равенство

$$\rho(x,t) = \frac{\exp\{\Pi(x,t)\}}{1 + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^t \exp\{\Pi(x,\tau)\}(u^2 + R\theta)d\tau}. \tag{37}$$

Учитывая (32), (35), из (36) приходим к следующим равномерным оценкам для функции плотности:

$$0 < m_\rho \le \rho(x,t) \le M_\rho < \infty, \tag{38}$$

где

$$m_\rho = m_\rho(M_0, m_0, M, M_u, T), \quad M_\rho = M_\rho(M_0, m_0, M, M_u, T).$$

5. ОЦЕНКИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ИСХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Используя выведенные неравенства, докажем априорные оценки, указанные в теореме 1. Обозначим через

$$C_M = C(M, M_u, M_\rho, m_\rho) < \infty. \tag{39}$$

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $g \in H^{2,1}$, $g_i \in H^1(0,T)$, $i = 1,2$ *такие, что* $g(a(t),t) = g_1(t)$, $g(b(t),t) = g_2(t)$. *Тогда* $g \in L^2(0,T;C^1(\overline{\Omega}))$ *и выполняется оценка*

$$\max_{x\in[a(t);b(t)]}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2 \le C\left(\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2 dx + |g_1(t)|^2 + |g_2(t)|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|^2 dx\right)^{1/2} + C(|g_1(t)|^2 + |g_2(t)|^2) \tag{40}$$

для п.в. $t \in (0,T)$.

Доказательство. Пусть $h \in H^{2,1}$ – произвольная функция. Как следствие вложения $H^2(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$ заключаем, что $h \in C(\overline{Q})$ и $(\partial h/\partial x) \in C(\overline{\Omega})$ для почти всех $t > 0$. Будем считать, что $h|_{x=a(t)} = 0$, $h|_{x=b(t)} = 0$ при $t \in [0,T]$ и существует $x_1(t) \in (a(t), b(t))$ такая, что $(\partial h/\partial x)|_{x=x_1(t)} = 0$. Таким образом, имеет место формула

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^2 = 2\int_{x_1(t)}^{x(t)}\left|\frac{\partial h}{\partial \xi}\right| \operatorname{sign}\left(\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}d\xi.$$

Отсюда с помощью неравенства Гёльдера выводим

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^2 \le 2\left(\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{41}$$

Пусть $g_1(x)$, $g_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 2. Представим $g(x,t)$ в виде

$$g(x,t) = h(x,t) + g_1(t) + \frac{g_2(t) - g_1(t)}{L}(x(t) - a(t)). \tag{42}$$

Для функции g, определенной в (42), вследствие (41) справедлива оценка (40). Лемма доказана.

На первом этапе оценим функцию φ через норму θ в пространстве $L^2(\Omega)$. Для этого умножим (8) на φ скалярно в $L^2(\Omega_t)$, получим

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega_t)} \le C\|\theta\|^2_{L^2(\Omega_t)}, \quad t \ge 0. \tag{43}$$

Далее, из (18), учитывая (12), (32), (43), находим оценку

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \int_0^t \|u\|^2_{H^1(\Omega_\tau)}d\tau \le TC_M, \quad t \in [0,T], \tag{44}$$

где постоянная C_M определенна в (39) и не зависит от T.

Получим априорную оценку производной функции температуры θ, определив сначала значения $(\rho\theta(\partial\theta/\partial x))|_{x=b(t)}$, $(\rho\theta(\partial\theta/\partial x))|_{x=a(t)}$ через данные задачи. Следуя доказательству леммы 2, найдется такая точка $x_1(t) \in (a(t), b(t))$, что

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=x_1(t)} = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{L}. \tag{45}$$

Обозначим через

$$
\begin{gathered}
N(x,t) = \theta(x,t)\rho(x_1,t)\frac{\theta_2(t)-\theta_1(t)}{L} + \frac{c_v}{\lambda}\theta(u\rho\theta - (u\rho\theta)|_{x=x_1(t)}) - \\
-\frac{\theta(x,t)}{\lambda}\int\limits_{x_1(t)}^{x(t)}\left[\mu\rho\left|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|^2 - R\rho\theta\frac{\partial u}{\partial\xi} - bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\right]d\xi.
\end{gathered} \tag{46}
$$

Заметим, что в силу (12), (32), (38), (44), справедливо неравенство

$$
\max_{x\in[a(t);b(t)]}\int\limits_0^t |N(x,\tau)|\,d\tau \le C_M T, \quad t>0. \tag{47}
$$

Проинтегрируем (7) от $x_1(t)$ до произвольной точки $x(t)\in[a(t),b(t)]$, учитывая (45) и используя правило дифференцирования интеграла от параметра. Затем умножим полученное равенство на $\lambda^{-1}\theta(x,t)$, найдем

$$
\theta(x,t)\rho(x,t)\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{c_v}{\lambda}\theta(x,t)\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1(t)}^{x(t)}\theta(\xi,t)d\xi + N(x,t), \tag{48}
$$

где $N(x,t)$ определена в (46). Рассмотрим (48) в точке $x=a(t)$,

$$
\begin{gathered}
\left(\theta\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\Big|_{x=a(t)} = \frac{c_v}{\lambda}\theta_1(t)\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1(t)}^{a(t)}\theta(\xi,t)d\xi + N(a(t),t) = \\
= \frac{c_v}{\lambda}\frac{d}{dt}\left(\theta_1(t)\int\limits_{x_1(t)}^{a(t)}\theta(\xi,t)d\xi\right) - \frac{c_v}{\lambda}\frac{d\theta_1}{dt}\int\limits_{x_1(t)}^{a(t)}\theta(\xi,t)d\xi + N(a(t),t).
\end{gathered} \tag{49}
$$

Проинтегрируем (49) по времени от 0 до t, получим

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^t\left(\theta\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\Big|_{x=a(t)}d\tau = \frac{c_v}{\lambda}\theta_1(t)\int\limits_{x_1(t)}^{a(t)}\theta(x,t)dx - \frac{c_v}{\lambda}\theta_1(0)\int\limits_{x_1(0)}^{a(0)}\theta_0(x)dx - \\
-\frac{c_v}{\lambda}\int\limits_0^t\int\limits_{x_1(t)}^{a(t)}\theta_1'(\tau)\theta(\xi,\tau)d\xi d\tau + \int\limits_0^t N(a(\tau),\tau)d\tau.
\end{gathered} \tag{50}
$$

Вследствие (12), (32), (47) каждое слагаемое в правой части (50) ограниченно для любого $t\in[0,T]$. Рассуждая аналогично для точки $x=b(t)$, найдем

$$
\int\limits_0^t\left(\theta\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\Big|_{x=b(t)}d\tau - \int\limits_0^t\left(\theta\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\Big|_{x=a(t)}d\tau \le C_M T, \tag{51}
$$

где постоянная C_M определена в (39).

Используя (43), (44), (51), из (7) стандартным способом получаем априорную оценку

$$
\|\theta\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \int\limits_0^t\|\theta\|^2_{H^1(\Omega_\tau)}d\tau \le TC + C_M, \quad t\in[0,T]. \tag{52}
$$

Найдем оценку для функции $(\partial\rho/\partial x)$. С этой целью умножим (6) на $(1/\rho)$, продифференцируем по x полученное равенство и учитывая первое слагаемое в правой части (5), найдем

$$
\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + R\theta\frac{\partial\rho}{\partial x} + R\rho\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.
$$

Проинтегрируем по времени последнее равенство, возведем в квадрат, затем еще раз проинтегрируем по области Ω_t. После простых преобразований найдем следующее выражение:

$$\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|^2 dx \le C_M\int_{\Omega_0}\left|\frac{\partial\rho_0}{\partial x}\right|^2 dx + C_M\int_0^t\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|^2 dxd\tau + C_M\int_0^t\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|^2 dxd\tau + C_M\int_{\Omega_t}(|u|^2+|u_0|^2)dx,$$

из которого, с помощью леммы Гронулла, (44), (52), получим оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|^2 dx \le TC_M,\quad t\in[0,T]. \tag{53}$$

Здесь постоянная C_M определена в (39).

Получим оценки старших производных функций u, θ. Обозначим через

$$u_b = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=b(t)},\quad u_a = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a(t)},\quad \theta_b = \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=b(t)},\quad \theta_a = \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=a(t)}.$$

Умножим (5), (7) на u, θ, соответственно, скалярно в $L^2(\Omega)$. После применения формулы интегрирования по частям, учитывая (9), (13), найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + c_v\left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|^2\right)dx + \int_{\Omega_t}\rho\left(\mu\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 + \lambda\left|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|^2\right)dx = I_1(t)+I_2(t)+I_3(t), \tag{54}$$

где

$$\begin{gathered}I_1(t) = -\frac{1}{2}m(t)\left[|u_b|^2-|u_a|^2+|\theta_b|^2-|\theta_a|^2\right] + u_2'(t)u_b - u_1'(t)u_a + \theta_2'(t)\theta_b - \theta_1'(t)\theta_a,\\ I_2(t) = -\int_{\Omega_t}\left(\mu\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \mu\rho\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx,\\ I_3(t) = -\int_{\Omega_t}\left(R\rho\theta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + R\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\theta\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)dx.\end{gathered} \tag{55}$$

Для оценки $I_1(t)$ применим лемму 2 к функциям u, θ. Используя (11), (38), получаем

$$\begin{gathered}I_1(t) = -\frac{1}{2}m(t)\left[|u_b|^2-|u_a|^2+|\theta_b|^2-|\theta_a|^2\right] + u_2'(t)u_b - u_1'(t)u_a + \theta_2'(t)\theta_b - \theta_1'(t)\theta_a \le\\ \le C\left(\int_{\Omega_t}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|^2\right]^2 dx + |u_i|^2 + |\theta_i|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_t}\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|^2\right]dx\right)^{1/2} + C(|u_i'(t)|^2 + |\theta_i'(t)|^2),\\ i=1,2.\end{gathered} \tag{56}$$

Оценим $I_2(t)$, применяя лемму 2 для функций u, θ и оценку (53):

$$\begin{gathered}I_2(t) = -\int_{\Omega_t}\left(\mu\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \mu\rho\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx \le C\max_{a(t)\le x\le b(t)}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|\right\}\left(\left\|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|\right)\times\\ \times\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\|\right) \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\|^2\right) + C_{\varepsilon_1}\left(\int_{\Omega_t}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|^2\right]^2 dx + |u_i|^2 + |\theta_i|^2\right)^{1/2}\times\\ \times\left(\int_{\Omega_t}\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|^2\right]dx\right)^{1/2} + C_{\varepsilon_1}(|u_i'(t)|^2 + |\theta_i'(t)|^2),\quad i=1,2.\end{gathered} \tag{57}$$

При оценке $I_3(t)$ воспользуемся неравенством Коши и (38)

$$I_3(t) = -\int_{\Omega_t}\left(R\rho\theta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + R\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\theta\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)dx \le$$
$$\le \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\|^2\right) + C_{\varepsilon_1}\left(1 + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\|^2\right). \quad (58)$$

Подставляя (56)–(58) в (54) и выбирая $\varepsilon_1 = m_0\min\{\mu,\lambda\}/2$, получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\|^2\right) + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\|^2 \le C\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\|^2 + |u_i|^2 + |\theta_i|^2\right)^{1/2}\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\|^2\right)^{1/2} +$$
$$+ C\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\|^2\right) + C(|u_1'(t)|^2 + |\theta_1'(t)|^2 + |u_2'(t)|^2 + |\theta_2'(t)|^2). \quad (59)$$

Применяя неравенство Коши к первому слагаемому правой части (59), интегрируя по времени и учитывая (44), (52), (53), найдем оценку

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_t)} + \|\theta\|^2_{H^1(\Omega_t)} + \int_0^t (\|u\|^2_{H^2(\Omega_\tau)} + \|\theta\|^2_{H^2(\Omega_\tau)})d\tau \le C_M T, \quad t > 0, \quad (60)$$

где постоянная C_M определена в (39).

Заметим, что вследствие леммы 2 справедливо неравенство

$$\max_{x(t)\in[a(t),b(t)]}\int_0^t\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|^2\right)d\tau \le C_M T, \quad t > 0. \quad (61)$$

Выражая из (6) $\partial\rho/\partial t = -\rho^2(\partial u/\partial x)$, учитывая (61), получаем

$$\max_{x(t)\in[a(t),b(t)]}\int_0^t\left|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|^2 d\tau \le C_M T, \quad t > 0. \quad (62)$$

Из (5)–(7) учитывая (43), (44), (52), (53), находим

$$\int_0^T\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\|^2\right)dt + \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\|^2 \le C_M. \quad (63)$$

Получим оценку старшей производной для функции φ. Умножим (8) на φ скалярно в $L^2(\Omega_t)$, $t \ge 0$, найдем

$$\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 dx + \int_{\Omega_t}|\varphi|^2 dx + |\varphi(a(t),t)|^2 + |\varphi(b(t),t)|^2 \le C\int_{\Omega_t}|\theta|^2 dx + C(|\theta_1(t)|^2 + |\theta_2(t)|^2) \le C_M, \quad t > 0.$$

Рассуждая аналогично лемме 2, можем записать неравенство

$$\max_{a(t)\le x\le b(t)}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 \le C\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 dx + C|\varphi(a(t),t)|^2 + C|\varphi(b(t),t)|^2 + \varepsilon\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx.$$

Из равенства

$$\alpha\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = k_\alpha(\varphi - \theta^4)\rho^{-1} - \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

вытекает формула

$$\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx \le C\max_{a(t)\le x\le b(t)}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|^2 dx + C_M.$$

Выбирая $\varepsilon = 1/(2C_M)$, находим оценку

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_t} \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx \le TC_M. \tag{64}$$

Замечание 1. Единственность решения проверяется стандартным способом составления однородной задачи для разности двух возможных различных решений. Найденные априорные оценки сильного решения гарантируют ограниченность нелинейных слагаемых в соответствующих пространствах.

Замечание 2. Полученные оценки гарантируют существование решения "в целом" по времени вместе с локальной теоремой. Локальная теорема доказывается с помощью принципа сжатых отображений. Полученные априорные оценки сильного решения зависят только от данных задачи и от величины T, но не от величины интервала существования локального решения. Поэтому локальное решение можно продолжить на весь отрезок $[0,T]$.

Изложим доказательство оценок для классических решений из теоремы 2. Сначала заметим, что согласно уравнению (6)

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial t} = -\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вследствие (53), (60), (61), найдем оценку

$$\int\limits_0^T \left\|\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial t}\right\|^2 dt \le C\left\|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\|^2 \int\limits_0^T \left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \max_{a(t)\le x\le b(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right) dt \le TC_M. \tag{65}$$

Продифференцируем (8), (9) по t, получим следующую краевую задачу, относительно функции $\partial\varphi/\partial t$:

$$\begin{gathered}
-\alpha\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + k_\alpha\rho^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 4k_\alpha\rho^{-1}\theta^3\frac{\partial\theta}{\partial t} + k_\alpha\rho^{-2}(\varphi-\theta^4)\frac{\partial\rho}{\partial t},\\
-\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|_{x=a(t)} + \gamma\frac{\partial}{\partial t}(\varphi|_{x=a(t)} - \theta_1^4) = 0,\\
\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|_{x=b(t)} + \gamma\frac{\partial}{\partial t}(\varphi|_{x=b(t)} - \theta_2^4) = 0.
\end{gathered} \tag{66}$$

Умножим уравнение в (66) на $(\partial\varphi/\partial t)$ скалярно в $L^2(\Omega_t)$, учитывая (62), (63), получаем

$$\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}\right|^2 dx + \int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + \left|\frac{\partial\varphi(a(t),t)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi(b(t),t)}{\partial t}\right|^2 \le C_M, \quad t\in[0,T]. \tag{67}$$

Далее, дифференцируя (5) по t, а затем умножая скалярно в $L^2(\Omega_t)$ полученное равенство на $(\partial u/\partial t)$, после простых выкладок получаем оценку

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt + \max_{0\le t\le T}\int\limits_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \le TC_M. \tag{68}$$

Аналогично, дифференцируя по t уравнение (7) и учитывая (66), выводим

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left|\frac{\partial^2\theta}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt + \max_{0\le t\le T}\int\limits_\Omega\left|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|^2 dx \le TC_M. \tag{69}$$

Оценки (53), (60), (63)–(65), (67)–(69) по теореме вложения [27] гарантируют непрерывность в $\bar{Q}$ по Гёльдеру с показателем 1/2 для функций ρ, u, θ, φ. Поэтому можно утверждать, что при выполнении условий теоремы 1, имеют место следующие оценки:

$$\|\rho\|_\beta + \|u\|_\beta + \|\theta\|_\beta + \|\varphi\|_\beta \le C_0, \quad 0<\beta\le 1/2. \tag{70}$$

Здесь $\|\cdot\|_r$ – норма в $C^r(\bar{Q})$, $r\ge 0$.

Отметим, что необходимые оценки для обоснования гёльдеровской непрерывности с показателем 1/2 для функции $(\partial\rho/\partial x)$, получаются из (37) способом, аналогичным в работе [25].

Таким образом, уравнения (5), (7), (8) можно рассматривать как смешанную систему, состоящую из двух параболических и эллиптического уравнений относительно $u(x,t)$, $\theta(x,t)$, $\varphi(x,t)$ с коэффициентами и правыми частями из $C^{1/2}(\bar{Q})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - R\theta\frac{\partial\rho}{\partial x} - R\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{71}$$

$$c_\nu\frac{\partial\theta}{\partial t} = \lambda\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} - R\rho\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - bk_\alpha(\theta^4 - \varphi)\rho^{-1}, \tag{72}$$

$$-\alpha\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = k_\alpha\rho^{-1}(\varphi - \theta^4) \tag{73}$$

вместе с краевыми условиями (9). Функция ρ определена формулой (37).

Пусть $\nu = (1/2)\min\{\beta, 1/2\}$. Из теории краевых задач [28], [29], считая выражение $(\mu\rho(\partial u/\partial x)^2 - bk_\alpha(\theta^4 - \varphi)\rho^{-1})$ правой частью параболического уравнения (72) относительно θ, получим оценку

$$\|\theta\|_{2+2\nu,1+\nu} \le C_0(1 + \|\partial u/\partial x\|_0\,\|\partial u/\partial x\|_{2\nu,\nu} + \|\partial u/\partial x\|_{2\nu,\nu}). \tag{74}$$

Здесь $\|\cdot\|_{2k+2\nu,k+\nu}$ — норма в $C^{2k+2\nu,k+\nu}(\bar{Q})$.

Точно так же, рассматривая (71) как параболическое уравнение относительно u с правой частью $(R\theta(\partial\rho/\partial x) + R\rho(\partial\theta/\partial x))$, и учитывая (70), (74), запишем

$$\|u\|_{2+2\nu,1+\nu} \le C_0(1 + \|\partial u/\partial x\|_0\,\|\partial u/\partial x\|_{2\nu,\nu}). \tag{75}$$

Рассуждая аналогично [25], используя интерполяционные неравенства [30]

$$\|\partial u/\partial x\|_0 \le C_0\,\|\partial u/\partial x\|_{1/2}^{1-s}\,\|\partial u/\partial x\|_{2+2\nu,1+\nu}^{s},$$

$$\|\partial u/\partial x\|_{2+2\nu,1+\nu} \le C_0\,\|\partial u/\partial x\|_{1/2}^{1-r}\,\|\partial u/\partial x\|_{2+2\nu,1+\nu}^{r},$$

где $s = 1/(3+4\nu)$, $r = (1+4\nu)/(3+4\nu)$, из (75) найдем

$$\|u\|_{2+2\nu,1+\nu} \le C_0(1 + \|\partial u/\partial x\|_{2+2\nu,1+\nu}^{r+s}).$$

Причем, $r + s < 1$. Применяя неравенство Юнга, из этой формулы, учитывая (70), находим оценку для $u(x,t)$, а затем из (74) оцениваем θ:

$$\|u\|_{2+2\nu,1+\nu} + \|\theta\|_{2+2\nu,1+\nu} \le C_0.$$

После этого гладкость ρ повышается на основе формулы (37). Таким образом,

$$\|\rho\|_{1+\nu,1+\nu/2} \le C_0.$$

Далее, из теории разрешимости краевых эллиптических задач [27] находим оценку для функции φ:

$$\|\varphi\|_{2+2\nu,1} \le C_0.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
2. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 28. № 2. С. 275–282.

3. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Comm. Nonlinear Sci. Num. Simulat. 2018. T. 57. P. 290–298.
4. *Kelley C.T.* Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations // Transport Theory Statist. Phys. 1996. T. 25. № 2. P. 249–260.
5. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1986.
6. *Modest M.F.* Radiative heat transfer. New York: Academic Press, 2003.
7. *Boas D.A.* Diffuse photon probes of structural and dynamical properties of turbid media: theory and biomedical applications. A Ph.D. Dissertation in Physics, University of Pennsylvania, 1996.
8. *Кажихов А.В., Шелухин В.В.* Однозначная разрешимость “в целом” по времени начально-краевых задач для одномерных уравнений вязкого газа // Прикл. матем. и механ. 1977. Т. 41. С. 282–291.
9. *Канель Я.И.* Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа. // Дифференц. ур-ния. 1968. Т. 4. № 4. С. 721–734.
10. *Itaya N.* On the temporally global problem of the generalised Burgers' equation // J. Math.Kyoto Univ. 1974. T. 14. № 4. P. 129–177.
11. *Амосов А.А.* Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 3. С. 510–535.
12. *Амосов А.А.* Нестационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 59. С. 5–34.
13. *Amosov A.A.* Some properties of boundary value problem for radiative transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions // J. Math. Sci. (United States). 2015. V. 207. № 2. P. 118–141.
14. *Амосов А.А.* Существование глобальных обобщенных решений уравнений одномерного движения вязкого реального газа с разрывными данными // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. № 4. С. 486–499.
15. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by the SP 1 system // Comm. Math. Sci. 2007. T. 5. № 4. P. 951–969.
16. *Druet P.E.* Existence of weak solutions to the time dependent MHD equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2009. T. 5. P. 2914–2936.
17. *Ducomet B., Necasova S.* Global weak solutions to the 1D compressible Navier?Stokes equations with radiation // Commun. Math. Anal. 2010. T. 8. № 3. P. 23–65.
18. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Y., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Solvability of P1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem // Appl. Math. Comput. 2014. T. 249. P. 247–252.
19. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM: Math. Model. Num. Anal. 2017. T. 51. P. 2511–2519.
20. *Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. T. 289. P. 371–380.
21. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. T. 460. № 2. P. 737–744.
22. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
23. *Кажихов А.В.* О краевых задачах для уравнения Бюргерса сжимаемой жидкости в областях с подвижными границами // Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1976. Т. 26.
24. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
25. *Кажихов А.В.* О глобальной разрешимости одномерных краевых задач для уравнений вязкого теплопроводного газа. Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1976. Т. 24.
26. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 11. С. 1806–1816.
27. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
28. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Наука, 1968.
29. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. 1959. T. 13. № 2.
30. *Ладыженская О.Л., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.