ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1158–1179

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 533.95

# СТАЦИОНАРНЫЕ И ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИОНИЗАЦИИ[1)]

© 2022 г. М. Б. Гавриков[1,*], А. А. Таюрский[1,2,**]

[1] 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

[2] 105005 Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия

*e-mail: mbgavrikov@yandex.ru

**e-mail: tayurskiy2001@mail.ru

Поступила в редакцию 13.01.2022 г.
Переработанный вариант 13.01.2022 г.
Принята к публикации 11.03.2022 г.

В работе решен ряд математических задач теории ионизации применительно к процессам в стационарных плазменных двигателях. Рассмотрены две основные математические модели ионизации – гидродинамическая и кинетическая. В центре внимания находится вопрос о существовании ионизационных колебаний (бривинг-мод). На базе одномерной гидродинамической модели решена краевая задача для стационарных уравнений ионизации. Доказаны ее однозначная разрешимость и отсутствие бривинг-мод в случае знакоопределенных скоростей атомов и ионов. В практически важном случае, когда в области течения ионная скорость имеет единственный нуль с положительной производной, доказано, что стационарная краевая задача имеет счетное число решений, и сформулировано необходимое и достаточное условие существования бривинг-мод. Предложен численный алгоритм исследования бривинг-мод. Дано аналитическое решение уравнений ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов, а полученные формулы применены к аналитическому решению задачи Коши, краевой и смешанной задач в простейших областях. В случае одномерной кинетической модели ионизации численно показано существование бривинг-мод и проведен краткий анализ полученных результатов. Библ. 18. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** ионизационные колебания, бривинг-моды, характеристики.

**DOI:** 10.31857/S0044466922070043

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже рассматриваются математические задачи, связанные с ионизацией плазмы, применительно к процессам, происходящим в стационарных плазменных двигателях (СПД). СПД были предложены А.И. Морозовым и с 1971 г. успешно и безальтернативно используются для коррекции орбит космических летательных аппаратов. История вопроса изложена в [1]–[4].

Экспериментально фиксируется принципиально важный эффект низкочастотных (10–30 кГц) колебаний разрядного тока в камере СПД. С практической точки зрения этот эффект носит паразитический характер, а механизм указанных осцилляций неясен, но вероятной причиной, предположительно, являются возможные колебания концентраций атомов ($n_a$) и ионов ксенона ($n_i$) в СПД при ионизации. С другой стороны, особый интерес представляют стационарные течения плазмы в СПД. Целью работы являются, во-первых, нахождение стационарных решений нелинейных уравнений одномерной ионизации и, во-вторых, анализ причин появления периодических колебаний концентраций $n_i$, $n_a$, подчиняющихся системе

$$\partial n_a/\partial t + \partial(n_a v_a)/\partial z = -\beta n_a n_i, \quad \partial n_i/\partial t + \partial(n_i v_i)/\partial z = \beta n_a n_i, \quad 0 \le z \le L, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

при определенных начальных и граничных условиях для $n_a$, $n_i$ (см. ниже). Здесь $v_a(z)$, $v_i(z)$ – известные продольные скорости атомов и ионов Xe, $\beta = \mathrm{const} > 0$ – заданная величина (коэффициент ионизации), $L$ – длина установки СПД. Удивительным и требующим математического

[1)]Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Минобрнауки РФ № 075-15-2019-1623.

объяснения является факт существования периодических по времени колебаний концентраций $n_i$ и $n_a$, получаемых при решении системы (1) для непериодических входных данных – функций $v_a(z)$, $v_i(z)$ и начальных и граничных условий для $n_i$ и $n_a$. Доминирующее на сегодняшний день в научной литературе объяснение этого феномена основано на модели “хищник–жертва” Лотки–Вольтерра [5], [6], которая описывает динамику численности популяций жертв ($N_1$) и хищников ($N_2$), питающихся жертвами, посредством пары обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$dN_1/dt = -\gamma_1 N_1 N_2 + \mu_1 N_1, \quad dN_2/dt = \gamma_2 N_1 N_2 - \mu_2 N_2, \quad \gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2 > 0. \tag{2}$$

В случае ионизации плазмы “жертвами” считаются атомы ксенона, а “хищниками” – электроны, которые в силу условия квазинейтральности плазмы отождествляются с ионами, причем $\gamma_1 = \gamma_2 = \beta > 0$ – коэффициент ионизации, а регенеративные члены $\mu_1 N_1$, $\mu_2 N_2$ обусловлены переносом атомов и ионов. При этом под $N_1$ и $N_2$ понимаются средние по отрезку $[0, L]$ концентрации атомов и ионов ксенона соответственно: $N_1 = \langle n_a \rangle$, $N_2 = \langle n_i \rangle$, где $\langle f \rangle = L^{-1}\int_0^L f(z)dz$ для любой интегрируемой на $[0, L]$ функции $f$. Впервые на феноменологическом уровне модель (2) использовалась для объяснения временных колебаний концентраций $n_a$ и $n_i$ в [7], [8]. В частности, в работе [8] считалось $\mu_1 = V_a/L$, $\mu_2 = V_i/L$, где $V_a$, $V_i$ – известные, не зависящие от времени скорости атомов на входе в СПД и ионов на выходе. Решениями уравнений Лотки–Вольтерра (2) являются [6] периодические кривые (циклы) на плоскости $(N_1, N_2)$, расположенные в первом квадранте $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ и стягивающиеся к единственной особой точке этой системы $N_1^0 = \mu_2/\gamma_2$, $N_2^0 = \mu_1/\gamma_1$. Предельное значение $\omega_\infty$ частот циклов при их стягивании к особой точке этой системы (2) проще всего получить решением линеаризованных в окрестности особой точки $(N_1^0, N_2^0)$ уравнений системы (2). Оказывается, предельная частота $\omega_\infty = (\mu_1\mu_2)^{1/2}$ не зависит от $\gamma_1$, $\gamma_2$ и для предположений работы [8] дает значение $\omega_\infty = (V_1V_2)^{1/2}/L$, что примерно совпадает с экспериментально получаемой частотой колебаний разрядного тока в СПД. Этот факт совпадения экспериментальной частоты с частотой, вычисляемой по феноменологической модели (2), имеющий, не исключено, случайный характер, лежит в методологической основе и является оправданием применения модели Лотки–Вольтерра к анализу ионизационных колебаний плазмы в СПД. Дальнейшее развитие модели “хищник–жертва” применительно к процессам в СПД содержится в [9], [10]. Так, в [10] для анализа процесса ионизации предложена двухзонная модель “хищник–жертва”, в которой количество уравнений системы (2) увеличивается вдвое. В работе [11] ионизационные колебания концентраций $n_i$, $n_a$ впервые были названы “бривинг”-модами (breathing mode). Основная проблема при использовании модели Лотки–Вольтерра для анализа ионизационных колебаний плазмы в СПД сводится к нахождению математически корректного вывода феноменологических уравнений (2) из законов сохранения (1), что до сих пор никем не было сделано. В работе [12] редукция (1) $\Rightarrow$ (2) получалась осреднением уравнений (1) по отрезку $[0, L]$ в каждый момент времени, однако при этом использовались неочевидные допущения: $\langle n_i n_a \rangle = \langle n_i \rangle \langle n_a \rangle$, $\langle n_a \rangle = n_a(t, 0)$, $\langle n_i \rangle = n_i(t, L)$, $n_a(t, L) \equiv 0$, $n_i(t, 0) \equiv 0$.

Проведенное ниже исследование показывает, что существование ионизационных колебаний (бривинг-мод) в СПД обусловлено фундаментальными математическими свойствами системы (1) и скорее всего никак не связано с феноменологической моделью Лотки–Вольтерра.

Как показывают численные расчеты, в случае знакоопределенных скоростей $v_a(z)$, $v_i(z)$ решение начально-краевой задачи для системы (1) со стационарными граничными условиями при $t \to +\infty$ выходит на установление, стремясь, как и следовало ожидать, к стационарному состоянию, определяемому системой (1). Как следствие, в этом случае бривинг-моды отсутствуют. Стационарные решения системы (1) играют особую роль, поскольку они определяют установившиеся режимы работы СПД. В разд. 2 проведено интегрирование в квадратурах стационарных уравнений (1). Показано, что краевая задача для стационарной системы (1) в случае знакоопределенных скоростей $v_a(z)$, $v_i(z)$ всегда имеет, и притом единственное, решение. В случае знакопеременных скоростей ситуация кардинально меняется. Ограничиваясь физически важным случаем $v_a(z) > 0$, $z \in [0, L]$ (чаще всего считается $v_a(z) \equiv v_a > 0$), установлено, что краевая задача для стационарной системы (1) имеет счетное число решений, если $v_i(z)$ принадлежит классу знакопеременных функций, имеющих единственный нуль $z_0 \in (0, L)$, для которого $v_i'(z_0) > 0$. Скорость $v_i(z)$ из указанного класса функций особенно актуальна для анализа процессов в СПД. Экспериментально [13] показано, что в камере СПД всегда возникает двумерная прианодная зона, в которой продольная ионная скорость отрицательна, а вне этой зоны – положительна. Применительно к одномерной модели приходим к скорости $v_i(z)$ указанного выше типа. В частности, для таких скоростей $v_i(z)$, как показывают расчеты, могут существовать бривинг-моды. Более того, стационарные решения для скоростей $v_i(z)$, не входящих в указанный выше класс, отсутствуют.

В разд. 3 в случае $v_a = \text{const}$, $v_i = \text{const}$ нелинейная система (1) решается аналитически. Полученные интегральные аналитические выражения для неизвестных $n_a$, $n_i$ позволяют решить аналитически задачу Коши в полуплоскости $t \ge 0$ и простейшие краевые (в полуплоскости $z \ge 0$) и смешанные (в первом квадранте $t \ge 0$, $z \ge 0$) задачи для этой системы. Методы, развитые в этом разделе, позволяют решать и другие начально-краевые задачи для системы (1) в случае постоянных скоростей $v_a$, $v_i$. Из выведенных в разд. 3 формул для решения системы (1), в частности, следует отсутствие бривинг-мод в случае $v_a = \text{const}$, $v_i = \text{const}$.

В разд. 4 для случая $v_a = \text{const} > 0$ и знакопеременных скоростей $v_i(z)$, имеющих единственный нуль $z_0 \in (0, L)$, для которого $v_i'(z_0) > 0$, обсуждается причина возникновения ионизационных колебаний (бривинг-мод) при решении системы (1). В этом случае прямая $z = z_0$ является характеристикой системы (1), а необходимое и достаточное условие существования бривинг-мод состоит в периодичности значений функций $n_i$, $n_a$ на указанной характеристике, $n_i(t) = n_i(t, z_0)$, $n_a(t) = n_a(t, z_0)$ при $t \to +\infty$. В разд. 4 выведено ОДУ, которому удовлетворяет функция $n_i(t)$, совпадающее с условием разрешимости [14] для квазилинейных систем уравнений в частных производных, и указана процедура нахождения функции $n_a(t)$. Оказывается, значения $n_i$, $n_a$ на характеристике $z = z_0$ подчиняются системе ОДУ более сложной, чем уравнение Лотки–Вольтерра. Сами функции $n_i(t)$, $n_a(t)$ находятся численным решением уравнений ионизации (1) посредством предложенной в работе разностной схемы. Аналитическое исследование существования и свойств функций $n_i(t)$, $n_a(t)$ выходит за рамки настоящей работы.

Недостаток модели ионизации (1) в том, что скорость ионов $v_i$ стационарная и задается, а не ищется из уравнения движения ионов. Поэтому справедливость выводов, которые делаются на основе анализа решений системы (1) (в том числе о наличии ионизационных колебаний), в значительной степени зависит от того, насколько правильно выбрана скорость $v_i$. Скорость ионов, определяемая из уравнения движения ионов, вообще говоря, зависит от времени, $v_i = v_i(t, z)$, что не учитывается в системе (1). Поэтому в разд. 5 существование ионизационных колебаний устанавливается на базе численного исследования посредством метода макрочастиц значительно более точной модели ионизации, состоящей из кинетического уравнения для ионов, двигающихся в заданном постоянном и однородном электромагнитном поле в СПД, и уравнения переноса атомов ксенона с учетом ионизации. При этом индукционные электромагнитные поля, порождаемые плазменными токами в СПД, и рассеяние электронов и ионов на боковых стенках камеры считаются пренебрежимо малыми.

## 2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИОНИЗАЦИИ

Ниже ограничимся исключительно важным случаем $v_a(z) > 0$ и даже еще более жестким ограничением $v_a = \text{const} > 0$.

В случае $\partial/\partial t = 0$ система уравнений ионизации принимает вид:

$$d(n_a v_a)/dz = -\beta n_i n_a, \quad d(n_i v_i)/dz = \beta n_i n_a, \quad z \ge 0. \tag{3}$$

Складывая почленно уравнения (3), приходим к первому интегралу системы (3):

$$n_a v_a + n_i v_i \equiv C = \text{const}. \tag{4}$$

Из (4) следует $n_a v_a = C - u$, $u \underset{\text{def}}{=} u_i v_i$. Подставляя эти выражения во второе уравнение (3), получаем для нахождения $u(z)$ ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$du/dz = (C-u)u\beta v_i^{-1}(z)v_a^{-1}(z). \tag{5}$$

Откуда имеем

$$\int \frac{du}{(C-u)u} = \int \frac{\beta dz}{v_i(z)v_a(z)} \underset{C\neq 0}{\Rightarrow} \frac{1}{C}\ln\left|\frac{u}{C-u}\right| = \int \frac{\beta dz}{v_i(z)v_a(z)}. \tag{6}$$

Если $C = 0$, то верно

$$u = \left(\int \beta v_i^{-1}(z)v_a^{-1}(z)dz\right)^{-1}. \tag{7}$$

Уравнение (5) имеет также два особых решения $u \equiv C$, $u \equiv 0$. Первое не имеет физического смысла, второе дает $n_i \equiv 0$, $n_a = C/v_a(z)$ и соответствует случаю, когда ионизация отсутствует. Анализ формул (6) и (7) зависит от количества и расположения нулей $v_i(z)$, которые входят в знаменатель подынтегрального выражения в (6) и (7).

Допустим на $[0, L]$ скорости $v_a(z)$, $v_i(z)$ знакопостоянные. Тогда из (6) следует

$$\begin{gathered} u(z) = CDe^{F(z)}[1 + De^{F(z)}]^{-1}, \quad n_i(z) = CDe^{F(z)}v_i^{-1}(z)[1 + De^{F(z)}]^{-1}, \\ n_a(z) = Cv_a^{-1}[1 + De^{F(z)}]^{-1}, \quad F(z) = C\beta\int_0^z v_i^{-1}(z)v_a^{-1}(z)dz, \end{gathered} \tag{8}$$

где $C \neq 0$, $D$ — произвольные константы. Из $n_a(z) \geq 0$ и $v_a(z) > 0$ следует $C(1 + D\exp F(z)) > 0$, и, значит, знак $D$ совпадает со знаком $v_i(z)$. Константы $C$ и $D$ в формуле (8) ищутся из граничных условий для $n_a$, $n_i$. Если $v_i(z) > 0$, то на левой границе $z = 0$ задаются $n_a(0) = n_{a0} > 0$, $n_i(z) = n_{i0} > 0$. Если $v_i(z) < 0$, то на левой границе задается $n_a(0) = n_{a0} > 0$, а на правой границе $z = L$ задается $n_i(L) = n_{iL} > 0$.

Если $v_i(z) > 0$ на $[0, L]$, то из (4) следует $C > 0$ и для неособого решения $D > 0$. Из (4) следует $C = n_{a0}v_a(0) + n_{i0}v_i(0)$, тогда из (8) выводим

$$D = C/(n_{a0}v_a(0)) - 1 = (n_{i0}/n_{a0})(v_i(0)/v_a(0)).$$

Итак, константы $C$ и $D$ в (8) однозначно определяются по граничным условиям, а краевая задача для системы (3) имеет, и притом единственное, решение.

Если $v_i(z) < 0$ на $[0, L]$, то исследование разрешимости краевой задачи для системы (3) более громоздкое. Краевые условия, согласно (8), дают следующее:

$$\begin{gathered} n_{a0}v_a(0) = C(1 + D)^{-1}, \quad n_{iL}v_i(L) = CD\exp[-C\beta F_0(L)][1 + D\exp[(-C\beta F_0(L))]^{-1}, \\ F_0(z) \underset{\text{def}}{=} \int_0^z \frac{dz}{v_a(z)|v_i(z)|} > 0. \end{gathered}$$

Обозначая $k_i = n_{iL}|v_i(L)| > 0$, $k_a = n_{a0}v_a(0) > 0$ и исключая $D = C/k_a - 1$, получаем для нахождения константы $C$ трансцендентное уравнение:

$$f(C) \underset{\text{def}}{=} \exp[-C\beta F_0(L)] = k_a k_i (k_a - C)^{-1}(k_i + C)^{-1} \underset{\text{def}}{=} g(C). \tag{9}$$

Уравнение (9) всегда имеет решение $C = 0$. Другие решения, отличные от $C = 0$, могут существовать только при $-k_i < C < k_a$. На этом интервале функция $g(C)$, легко проверить, имеет единственный absmin в точке $C_0 = (k_a - k_i)/2$ и $g(-k_i + 0) = g(k_a - 0) = +\infty$. Поэтому из геометрических соображений легко следует, что при $g'(0) \neq f'(0) \Leftrightarrow k_i^{-1} - k_a^{-1} \neq \beta F_0(L)$ уравнение (9) имеет на $(-k_i, k_a)$ еще одно решение $C$, отличное от нуля. Для этого решения и константы $D = C/k_a - 1$ краевая задача для системы (3) имеет, и притом единственное, решение, задаваемое формулами (8). Если $g'(0) = f'(0)$, то прямое вычисление показывает, что $g''(0) > f''(0)$, и из геометрических соображений следует, что уравнение (9) имеет на $(-k_i, k_a)$ только нулевое решение. В этом случае стационарное решение системы (3) ищется по формуле (7), которая дает

$$n_i = -[D - \beta F_0(z)]^{-1}[v_i(z)]^{-1}, \quad n_a = -n_i v_i / v_a = -[D - \beta F_0(z)]^{-1}[v_a(z)]^{-1}.$$

Граничные условия при $z = 0$ для $n_a$ и $z = L$ для $n_i$ дают два уравнения для нахождения одной константы $D$:

$$k_i = -[D - \beta F_0(L)]^{-1}, \quad k_a = -D^{-1},$$

которые в силу условия $g'(0) = f'(0) \Leftrightarrow k_i^{-1} - k_a^{-1} = \beta F_0(L)$ совместны и имеют единственное решение $D = -k_a^{-1}$. В частности, $D$ отрицательно, и в формулах для $n_i$, $n_a$ не приходится делить на нуль. Итак, при $v_i(z) < 0$ краевая задача для системы (3) тоже имеет, и притом единственное, решение.

Численное решение начально-краевой задачи для системы (1) по разностной схеме, предлагаемой ниже, со стационарными краевыми условиями в случае знакопостоянных $v_a(z)$, $v_i(z)$ показывает, что ее решение при $t \to +\infty$ сходится к стационарному решению системы (1), в частности, осцилляции концентраций $n_i$, $n_a$ (бривинг-моды) отсутствуют.

Рассмотрим теперь случай знакопеременных ионных скоростей $v_i(z)$ на типичном примере $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $z_0 \in (0, L)$, $\alpha > 0$. Тогда $v_i(z_0) = 0$, $\alpha = v_i'(z_0) > 0$. Будем искать только такие стационарные решения, для которых $n_i(z)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком интервале, лежащем в $[0, L]$ (если это не так, то $n_i(z) \equiv 0$ на некотором интервале $[0, L]$ и, значит, на этом интервале процесс ионизации прекратился, что противоречит экспериментальным данным по СПД). Из первого интеграла (4), вычисленного в точке $z_0$, следует, что $C \geq 0$. Случай $C = 0$ приводит к физически абсурдным решениям (см. ниже). Поэтому считаем $C > 0$. Тогда стационарное решение вычисляется по формулам (6), примененным отдельно к полуинтервалам $[0, z_0)$ и $(z_0, L]$, и имеет вид

$$n_i(z) = \frac{CD_\pm |z - z_0|^\zeta}{\alpha(z - z_0)(1 + D_\pm |z - z_0|^\zeta)}, \quad n_a(z) = \frac{C/v_a}{1 + D_\pm |z - z_0|^\zeta}, \quad \zeta = \frac{C\beta}{\alpha v_a}, \tag{10}$$

где константа $D_+$ действует в полуинтервале $(z_0, L]$, а константа $D_-$ – в полуинтервале $[0, z_0)$. Граничное условие ставится только для $n_a$ на левой границе $z = 0$: $n_a = n_{a0} > 0$. Поскольку $v_i(0) < 0 < v_i(L)$, то для $n_i$ граничные условия на концах $z = 0$ и $z = L$ не нужны. Таким образом, для нахождения стационарного решения (10), удовлетворяющего заданному граничному условию, необходимо по одной константе $n_{a0}$ найти три константы $C$, $D_+$, $D_-$.

Проведем следующее рассуждение. Пусть $n_i(z)$ бесконечно дифференцируема в окрестности $z_0$ и не все производные $n_i$ в точке $z_0$ обращаются в нуль. Пусть $k \geq 0$ – наименьшее целое, для которого $n_i^{(k)}(z_0) \neq 0$. Поскольку $n_i \geq 0$ всюду в $[0, L]$, то с помощью формулы Тейлора (см. ниже) нетрудно показать, что $k$ – четное. Пусть $k = 2\ell$, $\ell \geq 0$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем

$$\begin{gathered} n_i(z) = \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}(z - z_0)^{2\ell} + r(z), \quad n_a(z) = n_a(z_0) + n_a'(z_0)(z - z_0) + R(z), \\ r(x) = o((z - z_0)^{2\ell}), \quad R = o(z - z_0), \quad z \to z_0. \end{gathered} \tag{11}$$

Проинтегрируем стационарное уравнение неразрывности для $n_i$ по отрезку $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$:

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \frac{\partial n_i v_i}{\partial z} dz = \beta \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} n_i n_a dz.$$

Выражение слева равно

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \frac{\partial n_i v_i}{\partial z} dz = (n_i v_i)\Big|_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} = n_i(z_0+\varepsilon)v_i(z_0+\varepsilon) - n_i(z_0-\varepsilon)v_i(z_0-\varepsilon) =$$

$$= \alpha\varepsilon[n_i(z_0+\varepsilon) - n_i(z_0-\varepsilon)] = \alpha\varepsilon\left[2\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}\varepsilon^{2\ell} + r(z_0+\varepsilon) + r(z_0-\varepsilon)\right] =$$

$$= 2\alpha\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}\varepsilon^{2\ell+1} + \Delta(\varepsilon), \quad \Delta(\varepsilon) = \alpha\varepsilon[r(z_0+\varepsilon) + r(z_0-\varepsilon)],$$

где из (11) следует $\Delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^{2\ell+1})$, $\varepsilon \to 0$.

Выражение справа равно

$$\beta\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} n_i n_a dz = \beta\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}\left[\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}(z-z_0)^{2\ell} + r(z)\right][n_a(z_0) + n_a'(z_0)(z-z_0) + R(z)]dz =$$

$$= \beta n_a(z_0)\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}(z-z_0)^{2\ell}dz + B(\varepsilon) = 2\beta n_a(z_0)\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell+1)!}\varepsilon^{2\ell+1} + B(\varepsilon),$$

где из явного вида для $B(\varepsilon)$ и (11) легко следует $B(\varepsilon) = o(\varepsilon^{2\ell+1})$, $\varepsilon \to 0$. Приравнивая выведенные выражения для правой и левой частей интегрального тождества, деля полученное равенство на $\varepsilon^{2\ell+1}$ и устремляя $\varepsilon$ к нулю, имеем

$$2\alpha\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!} = 2\beta n_a(z_0)\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell+1)!} \underset{n_i^{(2\ell)}(z_0)\neq 0}{\Longrightarrow} n_a(z_0) = \frac{\alpha}{\beta}(2\ell+1).$$

Подставляя найденное решение $n_a(z_0)$ во второе уравнение (10) в точке $z_0$, получаем $(\alpha/\beta)(2\ell+1) = C/v_a$, откуда получаем значение константы $C = \alpha v_a(2\ell+1)/\beta$ и равенство $\zeta = (2\ell+1)$. Поэтому первое уравнение (10) дает

$$z < z_0: \ n_i(z) = -\frac{CD_-}{\alpha}\frac{(z-z_0)^{2\ell}}{1 + D_-|z-z_0|^{2\ell+1}}, \quad z > z_0: \ n_i(z) = \frac{CD_+}{\alpha}\frac{(z-z_0)^{2\ell}}{1 + D_+|z-z_0|^{2\ell+1}}. \tag{12}$$

Из формулы Тейлора следует, что существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0}\frac{n_i(z)}{(z-z_0)^{2\ell}} = \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}.$$

Поэтому из (12) следует, что $-D_- = D_+ \underset{\text{def}}{=} D$, т.к. $C \neq 0$, и тогда обе формулы (12) и обе формулы (10) для $n_a$ объединяются в одну уже без знака модуля

$$n_i(z) = \frac{CD(z-z_0)^{2\ell}}{\alpha(1 + D(z-z_0)^{2\ell+1})}, \quad n_a(z) = \frac{C/v_a}{1 + D(z-z_0)^{2\ell+1}}, \quad \ell = 0,1,2,\ldots, \quad z \in [0,L],$$
$$C = \alpha v_a(2\ell+1)/\beta, \quad D = (1 - C/(n_{a0}v_a))/z_0^{2\ell+1}. \tag{13}$$

Теперь ищется константа $D$ из второго равенства (13), $D = (1 - C/(n_{a0}v_a))/z_0^{2\ell+1}$. Из интеграла (4) следует $C \le n_{a0}v_a$, поэтому $D \ge 0$. Но при $D = 0$ из (13) следует $n_i(z) \equiv 0$, $z \in [0,L]$, что невозможно. Значит, $D > 0$.

Итак, установлено, что краевая задача для стационарной системы (1) в случае $v_a = \text{const} > 0$, $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $\alpha > 0$, $z_0 \in (0,L)$, имеет на отрезке $[0,L]$ счетное число решений, задаваемых формулой (13). Если $n_i(z)$ аналитична в окрестности $z_0$, то, очевидно, других решений указанная краевая задача не имеет, и в этом случае формула (13) дает общий вид решений краевой задачи для стационарной системы (1). Наконец, в случае $C = 0$ стационарное решение системы (1) задается формулой (7) применительно к каждому полуинтервалу $[0, z_0)$, $(z_0, L]$:

$$n_i(z) = (v_a/\beta)(z - z_0)^{-1}\ln^{-1} D_{\pm}|z - z_0|, \quad n_a(z) = (\alpha/\beta)\ln^{-1} D_{\pm}|z - z_0|,$$

где $D_{\pm}$ – положительные константы, причем константа $D_-$ действует для $z < z_0$, а $D_+$ – для $z > z_0$. Полученное решение физически абсурдно, поскольку $\lim\limits_{z\to z_0+0} n_i(z) = -\infty$, $\lim\limits_{z\to z_0-0} n_i(z) = +\infty$, в частности, нарушается неотрицательность концентрации $n_i(z)$ и интегрируемость функции $n_i(z)$ на $[0, L]$ (в точке $z = z_0$ интеграл от $n_i(z)$ расходится).

Предложенный способ построения решений краевых задач пригоден для любой функции $v_i(z)$, имеющей единственный нуль $z_0$ на $[0, L]$, причем $0 < z_0 < L$ и $v_i'(z_0) > 0$. Приведем два примера.

**Пример 1.** Пусть $v_i(z) = a(z + z_1)(z - z_0)$, $z_1 > 0$, $0 < z_0 < L$, $a > 0$. Тогда $\alpha = v_i'(z_0) = a(z_0 + z_1) > 0$. Действуя по схеме, предложенной выше, получаем счетное число решений краевой задачи для (3) с граничным условием $n_a(0) = n_{a0} > 0$:

$$n_i(z) = \frac{CD(z - z_0)^{2\ell}}{a(z + z_1)[(z + z_1)^{2\ell+1} + D(z - z_0)^{2\ell+1}]}, \quad n_a(z) = \frac{C}{v_a}\frac{(z + z_1)^{2\ell}}{(z + z_1)^{2\ell+1} + D(z - z_0)^{2\ell+1}},$$
$$C = (2\ell + 1)\alpha v_a\beta^{-1}, \quad D = (1 - C/(n_{a0}v_a))(z_1/z_0)^{2\ell+1}, \quad \ell = 0, 1, 2\ldots, \quad z \in [0, L].$$

При этом $D > 0$. Если $n_i(z)$ аналитична в окрестности $z_0$, то указанные функции дают общее решение краевой задачи.

**Пример 2.** Пусть $v_i(z) = -\cos(\pi z/L)$, $z_0 = L/2$ – единственный нуль на $[0, L]$, $v_i'(z_0) = \pi/L \underset{\text{def}}{=} \alpha > 0$. Действуя по схеме, предложенной выше, получаем счетное число решений краевой задачи для (3) с граничным условием $n_a(0) = n_{a0} > 0$:

$$n_i(z) = \frac{CD(\operatorname{tg}(\alpha z/2) - 1)^{2\ell}(1 + \operatorname{tg}^2(\alpha z/2))}{(1 + \operatorname{tg}(\alpha z/2))[(1 + \operatorname{tg}(\alpha z/2))^{2\ell+1} + D(\operatorname{tg}(\alpha z/2) - 1)^{2\ell+1}]},$$
$$n_a(z) = \frac{C}{v_a}\frac{(\operatorname{tg}(\alpha z/2) + 1)^{2\ell+1}}{(\operatorname{tg}(\alpha z/2) + 1)^{2\ell+1} + D(\operatorname{tg}(\alpha z/2) - 1)^{2\ell+1}},$$
$$C = \alpha v_a\beta^{-1}(2\ell + 1), \quad D = 1 - C/(n_{a0}v_a), \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, \quad z \in [0, L].$$

При этом $D > 0$. Если $n_i(z)$ аналитична в окрестности $z_0$, то указанные функции дают общее решение краевой задачи.

Интегральное тождество, из которого выводились выше значения констант $C$, $D_{\pm}$, имеет простой смысл – это баланс количества ионов, возникающих на отрезке $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ вследствие ионизации и за счет переноса ионов со скоростью $v_i$ через границы отрезка. Основная идея подсчета констант заключалась в том, чтобы найти асимптотики обоих количеств при $\varepsilon \to 0$ ($\equiv$ главные члены разложений по $\varepsilon$ обеих частей интегрального тождества) и приравнять их. Этот прием позволяет получать и другие неочевидные результаты. Например, если $v_i(z)$ обращается в нуль в некоторой точке $z_0 \in (0, L)$, в окрестности которой $n_i$ аналитична и для которой $\alpha = v_i'(z) < 0$, то стационарная система (3) не имеет решений. Действительно, для такого решения, повторяя рассуждения выше, получаем равенство $n_a(z_0) = \alpha(2\ell + 1)/\beta$ для некоторого целого $\ell \geq 0$, из которого вытекает неравенство $n_a(z_0) < 0$, что физически абсурдно. Другой пример дает функция $v_i(z)$, которая на отрезке $[0, L]$ имеет единственный нуль $z_0 \in (0, L)$ и выполнено условие $v_i'(z_0) = 0$. Тогда система (3) решений не имеет. Действительно, повторяя рассуждения выше применительно к интегральному тождеству, получаем $n_a(z_0) = 0$, и, значит, константа $C$ в первом интеграле (4) равна нулю. С другой стороны, функция $n_a(z)$ монотонно невозрастающая на $[0, L]$ и неотрицательная, поэтому $n_a(z) \equiv 0$, $z \in [z_0, L]$, но тогда из интеграла (4) с учетом $C = 0$ и знакоопределенности $v_i(z)$ на $(z_0, L]$ следует, что и $n_i(z) \equiv 0$, $z \in [z_0, L]$, что физически абсурдно. Добавим, если вычислить $n_i$ на $[0, z_0)$ посредством формулы (7), то нетрудно убедиться в разрывности функции $n_i$ в точке $z_0$ и логарифмической расходимости интеграла от $n_i(z)$ по отрезку $[0, L]$, что противоречит физическому смыслу концентрации ионов. Обобщая предыдущие примеры, приходим к физически важному выводу, что граничная задача для системы (3) имеет решение только если скорость $v_i(z)$ обладает единственным нулем $z_0 \in (0, L)$, для которого $\alpha = v_i'(z_0) > 0$. В этом случае при определенном соотношении $\beta$ и $\alpha$ возникают ионизационные колебания (бривинг-моды).

Для численного решения перепишем систему (1) в безразмерном виде, взяв за характерные масштабы длины $L_0 = 1$ см, скорости $v_0 = 1.5 \times 10^5$ см/с, времени $t_0 = L_0/v_0 = 0.66 \times 10^{-5}$ с, концентрации $n_0 = 10^{12}$ см$^{-3}$, $\beta = 10^{-8}$ см$^3$/с. Тогда система (1) относительно безразмерных значений всех величин перепишется в виде:

$$\partial n_a/\partial t + \partial(n_a v_a)/\partial z = -k_I n_a n_i, \quad \partial n_i/\partial t + \partial(n_i v_i)/\partial z = k_I n_a n_i, \tag{14}$$

где $k_I$ — безразмерное значение коэффициента ионизации.

Рассмотрим типичный пример расчета бривинг-мод по дивергентной разностной схеме "разности против потока" [15] на равномерной сетке на отрезке $[0, L]$:

$$\begin{gathered}
\frac{n_{a,k}^1 - n_{a,k}^0}{\tau} + v_a \frac{n_{a,k}^0 - n_{a,k-1}^0}{h} + k_I n_{a,k}^1 n_{i,k}^0 = 0, \quad 0 < k \le N, \quad n_{a,0}^1 = n_{a0}, \\
\frac{n_{i,k}^1 - n_{i,k}^0}{\tau} + \frac{1}{h}\left[\frac{v_{i,k+1/2} - |v_{i,k+1/2}|}{2} n_{i,k+1}^0 + \left(\frac{v_{i,k+1/2} + |v_{i,k+1/2}|}{2} - \frac{v_{i,k-1/2} - |v_{i,k-1/2}|}{2}\right) n_{i,k}^0 - \right. \\
\left. - \frac{v_{i,k-1/2} + |v_{i,k-1/2}|}{2} n_{i,k-1}^0 \right] - k_I n_{i,k}^0 n_{a,k}^0 = 0,
\end{gathered} \tag{15}$$

где $v_{i,k+1/2} = v_i((k + 1/2)h), -1 \le k \le N$. Заметим, что при $k = 0$ значение $n_{i,-1}^0$, а при $k = N$ значение $n_{i,N+1}^0$ умножается на нуль и в силу этого не используется. Условия устойчивости для схемы имеют вид:

$$\tau \le h/v_a, \quad \tau \le h\Big[\max_{-1 \le k \le N} |v_{i,k+1/2}|\Big]^{-1}, \quad \tau \le \Big[\max_{0 \le k \le N} |v_{i,k+1/2} - v_{i,k-1/2}|\Big]^{-1}.$$

При соблюдении условий устойчивости нетрудно получить оценки

$$\max|n_{i,k}^1| \le \max|n_{i,k}^0| \Big\{1 + (\tau/h)\max|v_{i,k+1/2} - v_{i,k-1/2}| + \tau k_I \max|n_{a,k}^0|\Big\}, \quad \max|n_{a,k}^1| \le \max|n_{a,k}^0|,$$

где max берется по $0 \le k \le N$. Эти оценки гарантируют вычислительную устойчивость схемы (15) на конечном временном отрезке $[0, T]$.

Рассмотрим результаты расчета по схеме (15), представленные на фиг. 1, для $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$. Фиг. 1 демонстрирует возникновение периодических колебаний концентраций $n_a$, $n_i$ (бривинг-мод) с размерной частотой ~20 кГц. Эти колебания возникают не при всех $k_I > 0$, $\alpha > 0$. Очевидно, на плоскости $k_I > 0$, $\alpha > 0$ существует некоторая неизвестная нам область, для $(k_I, \alpha)$ из которой возникают бривинг-моды. Для $(k_I, \alpha)$, не попавших в указанную область, счет по схеме (15) приводит к установлению решения. Вероятно, появление бривинг-мод связано с неединственностью решения краевой задачи для системы (3), установленной выше. Решение начально-краевой задачи для системы (1) может при $t \to +\infty$ сходиться к одному из счетного числа стационарных состояний, задаваемых формулами (13), но может, как показывают расчеты, при $t \to +\infty$ выходить на периодический режим (фиг. 1), не притягиваясь ни к одному из стационарных состояний. Логически возможен также хаотический характер решения начально-краевой задачи для системы (1) при $t \to +\infty$, но в расчетах он зафиксирован не был. Математическая причина возникновения бривинг-мод будет разъяснена в разд. 3.

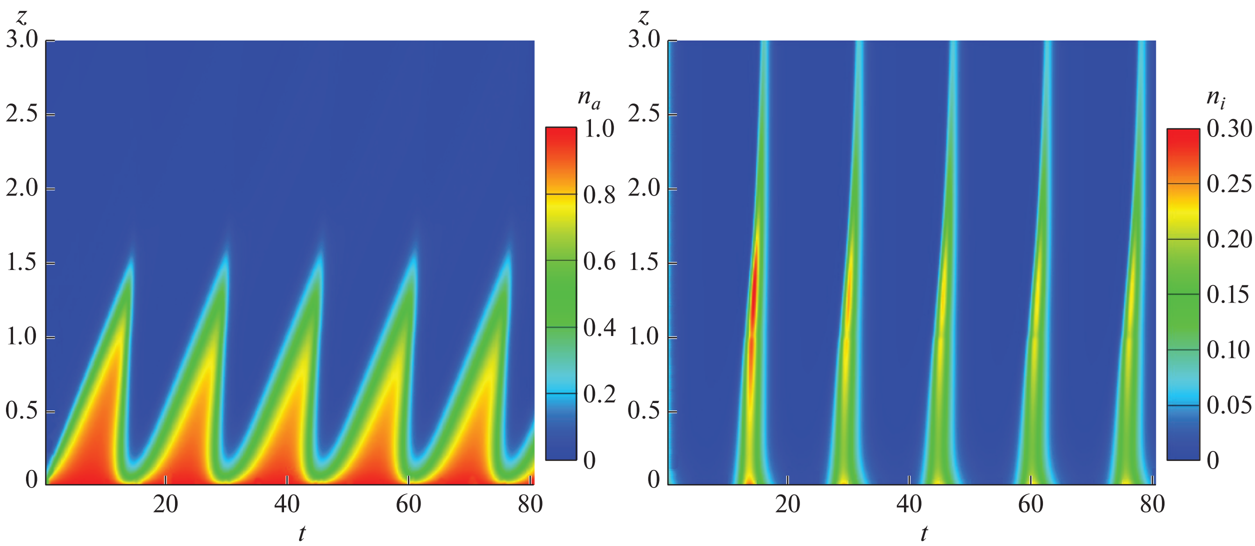
## 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ИОНИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННЫХ СКОРОСТЕЙ

Решим систему (1) в случае $v_a = \text{const}$, $v_i = \text{const}$. В безразмерном виде она является частным случаем системы (14):

$$\partial n_a/\partial t + v_a \partial n_a/\partial z = -k_I n_a n_i, \quad \partial n_i/\partial t + v_i \partial n_i/\partial z = k_I n_a n_i. \tag{16}$$

Рассмотрим основной случай $v_a \ne v_i$. Проведем замену независимых переменных:

$$(t, z) \leftrightarrow (\alpha, \beta): \ (t, z) = \alpha(1, v_a) + \beta(1, v_i),$$




**Фиг. 1.** Эволюция концентраций ионов ($n_i$) и атомов ($n_a$) в пространстве ($z$) и времени ($t$) для безразмерных значений параметров $L = 3$, $z_0 = 1$, $\alpha = 1$, $k_I = 5$, $v_a = 0.1$ с начальными и граничными значениями $n_{a0} = 1$, $n_a^0(z) = n_{a0}/(1 + 50z)$, $n_i^0(z) = 0.1$.

или в координатном виде:

$$t = \alpha + \beta, \quad z = \alpha v_a + \beta v_i, \quad \alpha = (tv_i - z)(v_i - v_a)^{-1}, \quad \beta = (z - tv_a)(v_i - v_a)^{-1}, \quad (\alpha, \beta) = \varphi(t, z). \tag{17}$$

Отсюда для дифференциальных операторов получим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{v_i}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{v_a}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial\beta}.$$

Подставляя эти выражения в систему (16), сведем ее к эквивалентному виду:

$$\partial n_a/\partial\alpha = -k_I n_a n_i, \quad \partial n_i/\partial\beta = k_I n_a n_i. \tag{18}$$

Итак, задача нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (16) в области $D$ переменных $(t, z)$ равносильна задаче нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (18) в области $\varphi(D)$ переменных $(\alpha, \beta)$. Отображение $\varphi$ линейное, невырожденное, с определителем $\det\varphi = 1/(v_i - v_a) \neq 0$. В частности, $\varphi$ прямые переводит в прямые, многоугольники – в многоугольники, выпуклые множества – в выпуклые множества и т.д. Элементарная теория решений системы (18) в прямоугольнике $\Pi = [\alpha_0, \alpha_1]\times[\beta_0, \beta_1]$, $\alpha_0 < \alpha_1$, $\beta_0 < \beta_1$, основана на двух результатах [16].

**Теорема 1.** 1) *Пусть* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – *дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезках* $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$, *соответственно, причем* $A(\alpha) \neq B(\beta)$ *для любых* $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$. *Тогда функции*

$$n_a(\alpha, \beta) \underset{\text{def}}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))}, \quad n_i(\alpha, \beta) \underset{\text{def}}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} \tag{19}$$

*составляют непрерывно дифференцируемое решение системы* (18) *в прямоугольнике* $\Pi$.

2) *Если непрерывно дифференцируемые решения* $n_a$, $n_i$ *системы* (18) *таковы, что множество нулей каждой из этих функций в* $\Pi$ *имеет пустую внутренность и* $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ *еще один комплект функций на* $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$, *соответственно, удовлетворяющий условиям части* 1) *теоремы и восстанавливающий по формулам* (19) *те же самые функции* $n_a$, $n_i$ *в* $\Pi$, *то найдутся константы* $R \neq 0$, $C$, *для которых*:

$$\bar{A}(\alpha) = RA(\alpha) + C, \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], \quad \bar{B}(\beta) = RB(\beta) + C, \quad \beta \in [\beta_0, \beta_1]. \tag{20}$$

*Обратно, если* $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ *вычисляются по* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ посредством формул (20) *для некоторых констант* $R \neq 0$, $C$, *то они удовлетворяют условиям части* 1) *и по формулам* (19) *восстанавливают те же функции* $n_a$, $n_i$, *что и для* $A(\alpha)$, $B(\beta)$.

3) *В условиях части* 1) *теоремы функции* $n_a$, $n_i$, *вычисляемые по формулам* (19), *удовлетворяют всюду в* $\Pi$ *неравенствам* $n_a \geq 0$, $n_i \geq 0$ *тогда и только тогда, когда либо* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *монотонно не убывают на* $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$, *соответственно, и* $\inf\limits_{\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]} A(\alpha) > \sup\limits_{\beta\in[\beta_0,\beta_1]} B(\beta)$ $(\equiv A(\alpha_0) > B(\beta_1))$, *либо* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *монотонно не возрастают соответственно на* $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ *и* $\sup\limits_{\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]} A(\alpha) < \inf\limits_{\beta\in[\beta_0,\beta_1]} B(\beta)$ $(\equiv A(\alpha_0) < B(\beta_1))$.

Если $A(\alpha)$, $B(\beta)$ удовлетворяют условиям части 1) теоремы 1, то $n_a$, $n_i$, вычисляемые по формулам (19), непрерывно дифференцируемы в $\Pi$ и существуют непрерывные в $\Pi$ смешанные производные $\partial^2 n_a/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_a/(\partial\beta\partial\alpha)$ и $\partial^2 n_i/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_i/(\partial\beta\partial\alpha)$. Это обстоятельство позволяет сформулировать обратное утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть* $n_a > 0$, $n_i > 0$ — *непрерывно дифференцируемое решение* (18) *в прямоугольнике* $\Pi$, *для которого существуют обе непрерывные в* $\Pi$ *смешанные частные производные* $\partial^2 n_a/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_a/(\partial\beta\partial\alpha)$ *и* $\partial^2 n_i/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_i/(\partial\beta\partial\alpha)$. *Тогда найдутся дважды непрерывно дифференцируемые функции* $A(\alpha)$, $B(\beta)$, *определенные на сторонах прямоугольника, соответственно,* $[\alpha_0, \alpha_1]$ *и* $[\beta, \beta_1]$, *для которых* $A(\alpha) \neq B(\beta)$ *при всех* $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$ *и всюду в* $\Pi$ *выполнены равенства* (19).

**Замечание.** Таким образом, для класса положительных непрерывно дифференцируемых решений системы (18), для которых в $\Pi$ существуют обе непрерывные смешанные частные производные, формулы (19) задают общий вид решений этого класса.

Из теоремы 1 п. 2) следует, что в формулах (19) всегда можно считать $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно неубывающими функциями на $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ соответственно. Кроме того, стороны прямоугольника $\Pi$ могут быть интервалами или полуинтервалами, в том числе полубесконечными или бесконечными. Соответствующие изменения формулировки теоремы 1 п. 3) очевидны.

Из теорем 1, 2 следует, что в $\varphi^{-1}(\Pi)$ решение системы (16) задается формулами:

$$n_a(t,z) = \frac{B'\left(\dfrac{z - tv_a}{v_i - v_a}\right)}{k_I\left[A\left(\dfrac{tv_i - z}{v_i - v_a}\right) - B\left(\dfrac{z - tv_a}{v_i - v_a}\right)\right]}, \quad n_i(t,z) = \frac{A'\left(\dfrac{z - tv_a}{v_i - v_a}\right)}{k_I\left[A\left(\dfrac{tv_i - z}{v_i - v_a}\right) - B\left(\dfrac{z - tv_a}{v_i - v_a}\right)\right]}, \tag{21}$$

где $A(\alpha)$, $B(\beta)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию теоремы 1 п. 1.

Формулы (21) справедливы для $v_i \neq v_a$. При $v_i = v_a$ они теряют смысл. Для $v_i = v_a = v$ общее решение системы (16) получается напрямую, без введения новых координат $\alpha$, $\beta$, интегрированием уравнений этой системы вдоль характеристик. Характеристики системы (16) имеют вид $z(t) = vt + \text{const}$ и различаются значениями const. Пусть $n_a(t) = n_a(t, z(t))$, $n_i(t) = n_i(t, z(t))$ значения неизвестных функций $n_a$, $n_i$ вдоль фиксированной характеристики. Тогда из (16) следует, что функции $n_a(t)$, $n_i(t)$ удовлетворяют системе ОДУ

$$dn_a/dt = -k_I n_a n_i, \quad dn_i/dt = k_I n_a n_i. \tag{22}$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем первый интеграл системы (22):

$$d(n_a + n_i)/dt \equiv 0 \;\Rightarrow\; n_a + n_i \equiv C = \text{const}.$$

Поскольку $n_a \geq 0$, $n_i \geq 0$, то $C \geq 0$. При $C = 0$ имеем $n_a(t) \equiv 0$, $n_i(t) \equiv 0$ — тривиальное решение системы (22), не имеющее смысла. Поэтому ниже считаем $C > 0$. Тогда $n_a = C - n_i$, и для нахождения $n_i$ имеем ОДУ

$$dn_i/dt = k_I n_i(C - n_i). \tag{23}$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dn_i}{n_i(C - n_i)} = k_I t + \text{const} \;\Rightarrow\; \frac{1}{C}\ln\left|\frac{n_i}{C - n_i}\right| = k_I t + \text{const}.$$

Поскольку $n_i \geq 0$, $n_a = C - n_i \geq 0$, то $0 \leq n_i \leq C$, и в последнем равенстве знак модуля можно убрать. В результате получим

$$n_i = CD\exp(Ck_I t)[1 + D\exp(Ck_I t)]^{-1}, \quad n_a = C - n_i = C[1 + D\exp(Ck_I t)]^{-1}, \quad D \geq 0, \quad C > 0. \tag{24}$$

В случае $D = 0$ получим одно из двух особых решений (23): $n_i \equiv 0$. Другое особое решение $n_i \equiv C$. Формулы (24) задают общее решение системы (22) на произвольной характеристике. Константы $C$ и $D$ определяются значениями $n_a$, $n_i$ в произвольной точке на рассматриваемой характеристике. В частности, при решении начально-краевых задач для системы (16) значения $C$ и $D$ определяются начальными и граничными условиями (см. ниже).

Применим формулы (21), (24) для решения начально-краевых задач для системы (16), которые представляют основной практический интерес. Ограничимся следующими простейшими задачами.

**Задача 1. Начальная задача (задача Коши):** в полуплоскости $z \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (16), для которого выполнены начальные условия $n_a(0,z) = n_a^0(z)$, $n_i(0,z) = n_i^0(z)$, $z \in \mathbb{R}$, где $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

**Задача 2. Краевая задача:** для $v_a, v_i \geq 0$ в полуплоскости $z \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (16), для которого выполнены краевые условия $n_a(t,0) = n_{a0}(t)$, $n_i(t,0) = n_{i0}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

**Задача 3. Начально-краевая (смешанная) задача:** для $v_a, v_i \geq 0$ в первом квадранте $z \geq 0$, $t \geq 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (16), для которого выполнены начальные условия $n_a(0,z) = n_a^0(z)$, $n_i(0,z) = n_i^0(z)$, $z \geq 0$ и краевые условия $n_a(t,0) = n_{a0}(t)$, $n_i(t,0) = n_{i0}(t)$, $t \geq 0$, где $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z \geq 0$, $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t \geq 0$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции на полупрямых $z \geq 0$ и $t \geq 0$, подчиняющиеся условиям согласованности:

$$n_{a0}(0) = n_a^0(0), \quad n_{i0}(0) = n_i^0(0), \quad n_{a0}'(0) + v_a(n_a^0)'(0) + k_I n_{a0}(0)n_{i0}(0) = 0,$$
$$n_{i0}'(0) + v_i(n_i^0)'(0) - k_I n_{a0}(0)n_{i0}(0) = 0.$$

Более сложные начально-краевые задачи в этой работе не рассматриваются.

В случае $v_i = v_a$ начально-краевые задачи легко решаются по формуле (32) методом характеристик.

Рассмотрим задачу 1 в случае $v_a \neq v_i$. В переменных $(\alpha,\beta)$ задача состоит в поиске непрерывно дифференцируемого решения системы (18) в полуплоскости $P \underset{\text{def}}{=} \{\alpha + \beta \geq 0\}$, которое на границе этой полуплоскости $\alpha + \beta = 0$ имеет заданные значения

$$\alpha + \beta = 0 \;\Rightarrow\; n_a(\alpha,\beta) = n_a(-\beta,\beta) = n_a^0(\alpha v_a + \beta v_i) = n_a^0(\beta(v_i - v_a)),$$
$$n_i(\alpha,\beta) = n_i(-\beta,\beta) = n_i^0(\alpha v_a + \beta v_i) = n_i^0(\beta(v_i - v_a)).$$

Выше был изложен способ решения системы (18) в произвольном прямоугольнике $\Pi$. Построим решение системы (18) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R}\times\mathbb{R} \supseteq P$, которое на прямой $\alpha + \beta = 0$ совпадает с заданными функциями, $n_a|_{\alpha+\beta=0} = n_a^0(\beta(v_i - v_a))$, $n_i|_{\alpha+\beta=0} = n_i^0(\beta(v_i - v_a))$. Если такое решение существует, то его сужение на $P$ дает, очевидно, искомое решение задачи Коши в переменных $(\alpha,\beta)$. Согласно теореме 1, решение системы (18) в прямоугольнике $\Pi_\infty$ определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (19). При этом, согласно теореме 1, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ должны удовлетворять двум условиям: 1) области значений функций $A(\alpha)$, $B(\beta)$ не пересекаются, $A(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R}) = \varnothing$, и тогда, учитывая связность прямой $\mathbb{R}$, либо $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, либо $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$,

2) если $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – монотонно невозрастающие на $\mathbb{R}$ функции, если $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – монотонно неубывающие на $\mathbb{R}$ функции.

Функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ ищутся по известным значениям $n_a$ и $n_i$ на прямой $\alpha + \beta = 0$ (т.е. из начальных условий). Из тождеств (19) получим:

$$\begin{gathered} n_a^0(\beta(v_i - v_a)) = n_a(-\beta,\beta) = B'(\beta)k_I^{-1}(A(-\beta) - B(\beta))^{-1}, \\ n_i^0(\beta(v_i - v_a)) = n_i(-\beta,\beta) = A'(-\beta)k_I^{-1}(A(-\beta) - B(\beta))^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{25}$$

Пусть $n_a(\beta) = k_I n_a^0(\beta(v_i - v_a))$, $n_i(\beta) = k_I n_i^0(\beta(v_i - v_a))$, $A_0(\beta) = A(-\beta)$. Тогда $n_a$, $n_i$ неотрицательные функции, а условия (25) дают линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для нахождения функций $A_0(\beta)$, $B(\beta)$ на прямой $\mathbb{R}$:

$$B' = n_a(\beta)(A_0 - B), \quad A_0' = -n_i(\beta)(A_0 - B). \tag{26}$$

Поскольку $n_a(\beta)$, $n_i(\beta)$ непрерывно дифференцируемы по $\beta$, то любое решение системы (26) дважды непрерывно дифференцируемо всюду на прямой. Кроме того, для любых $C, D \in \mathbb{R}$ существует, и притом единственное, решение системы (26), для которого $A_0(0) = C$, $B(0) = D$. Ниже считается $C \neq D$. Легко показать, что решение (26) с начальным условием $A_0(0) = C$, $B(0) = D$ имеет вид:

$$\begin{gathered} B(\beta) = D + (C - D)\int_0^\beta n_a(\beta)\exp(-N(\beta))d\beta, \\ A_0(\beta) = C + (D - C)\int_0^\beta n_i(\beta)\exp(-N(\beta))d\beta, \quad N(\beta) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\beta (n_a(\beta) + n_i(\beta))d\beta. \end{gathered} \tag{27}$$

Из равенств (27) несложно вывести справедливость условий 1) и 2).

Согласно теореме 1, формулы (19) с учетом (27) дают решение задачи Коши в переменных $(\alpha,\beta) \in P$:

$$n_a(\alpha,\beta) = \frac{n_a(\beta)e^{-N(\beta)}}{k_I R_0(\alpha,\beta)}, \quad n_i(\alpha,\beta) = \frac{n_i(\alpha)e^{-N(\alpha)}}{k_I R_0(\alpha,\beta)}, \quad R_0(\alpha,\beta) = \left[1 - \int_0^{-\alpha} n_i e^{-N} d\alpha - \int_0^\beta n_a e^{-N} d\beta\right].$$

В переменных $(z,t)$ получаем следующие формулы:

$$\begin{gathered} n_a(z,t) = n_a^0(z - v_a t)e^{-N(z - v_a t)}\left[1 - \frac{k_I}{v_i - v_a}\left\{\int_0^{z - v_i t} n_i^0(p)e^{-N(p)}dp + \int_0^{z - v_a t} n_a^0(p)e^{-N(p)}dp\right\}\right]^{-1}, \\ n_i(z,t) = n_i^0(z - v_i t)e^{-N(z - v_i t)}\left[1 - \frac{k_I}{v_i - v_a}\left\{\int_0^{z - v_i t} n_i^0(p)e^{-N(p)}dp + \int_0^{z - v_a t} n_a^0(p)e^{-N(p)}dp\right\}\right]^{-1}, \\ N(p) = \frac{k_I}{v_i - v_a}\int_0^p \left[n_a^0(q) + n_i^0(q)\right]dq, \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \end{gathered} \tag{28}$$

где $n_i^0(p) \geq 0$, $n_a^0(p) \geq 0$ – заданные произвольно непрерывно дифференцируемые функции и знаменатель в формулах (28) заведомо положителен. Итак, формулы (28) дают аналитическое решение системы (16) при $t \geq 0$, удовлетворяющее начальному условию $n_a(z,0) = n_a^0(z)$, $n_i(z,0) = n_i^0(z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим краевую задачу 2 в случае $v_i \neq v_a$. Анализ этого случая проходит по той же схеме, что и решение задачи Коши выше. Выделим основные моменты. В переменных $(\alpha,\beta)$ ищем непрерывно дифференцируемое решение системы (18) в полуплоскости $P_0 = \{\alpha v_a + \beta v_i \geq 0\}$, для которого функции $n_a$, $n_i$ на границе полуплоскости $P_0$, $\partial P_0 = \{\alpha v_a + \beta v_i = 0\}$ принимают заданные значения $n_a(\alpha,\beta) = n_{a0}(\alpha + \beta)$, $n_i(\alpha,\beta) = n_{i0}(\alpha + \beta)$, $\alpha v_a + \beta v_i = 0$. Построим такое непрерывно дифференцируемое решение системы (18) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq P_0$, которое на границе полуплоскости $P_0$, т.е. на прямой $\alpha v_a + \beta v_i = 0$, совпадает с заданными функциями

$n_{a0}(\alpha+\beta)$, $n_{i0}(\alpha+\beta)$. Тогда, очевидно, сужение этого решения на $P_0$ будет искомым решением краевой задачи в координатах $(\alpha,\beta)$. Согласно теореме 1, искомое решение определяется двумя непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (19). При этом функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ должны удовлетворять условиям 1) и 2), сформулированным выше. Функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ ищутся по известным значениям $n_a$, $n_i$ на границе $P_0$. На этой границе $\beta = -\alpha v_a/v_i$ и, значит, согласно (19), имеем

$$\begin{aligned} n_{a0}\left(\alpha(v_i - v_a)/v_i\right) &= B'(-\alpha v_a/v_i)k_I^{-1}[A(\alpha) - B(-\alpha v_a/v_i)]^{-1}, \\ n_{i0}\left(\alpha(v_i - v_a)/v_i\right) &= A'(\alpha)k_I^{-1}[A(\alpha) - B(-\alpha v_a/v_i)]^{-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{29}$$

Пусть $n_a(\alpha) = k_I(v_a/v_i)n_{a0}(\alpha(v_i - v_a)/v_i)$, $n_i(\alpha) = k_I n_{i0}(\alpha(v_i - v_a)/v_i)$, $B_0(\alpha) = B(-\alpha v_a/v_i)$. Тогда краевое условие (29) дает линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на прямой с переменными коэффициентами для нахождения функций $A(\alpha)$, $B_0(\alpha)$:

$$B_0' = -n_a(\alpha)(A - B_0), \quad A' = n_i(\alpha)(A - B_0). \tag{30}$$

Поскольку $n_a(\alpha)$, $n_i(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы, то любое решение системы (30) дважды непрерывно дифференцируемо и определено на всей прямой. Рассмотрим решение задачи Коши для системы (30) с начальными условиями $A(0) = C \neq B_0(0) = D$. Несложно проверить, что это решение вычисляется по формулам (см. выше):

$$B_0(\alpha) = D + (D - C)\int_0^\alpha n_a e^N d\alpha, \quad A(\alpha) = C + (C - D)\int_0^\alpha n_i e^N d\alpha, \quad N(\alpha) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\alpha (n_a + n_i)d\alpha. \tag{31}$$

Из формул (31) выводится (см. выше) справедливость условий 1) и 2) для функций $A(\alpha)$, $B(\beta) = B_0(-\beta v_i/v_a)$.

По формулам (19) с учетом выражений (31) получим решение краевой задачи в координатах $(\alpha,\beta) \in P_0$:

$$n_a(\alpha,\beta) = \frac{v_i}{v_a} n_a(-\beta v_i/v_a)\exp(N(-\beta v_i/v_a))k_I^{-1}\left[1 + \int_0^\alpha n_i e^N d\alpha + \int_0^{-\beta v_i/v_a} n_a e^N d\beta\right]^{-1},$$

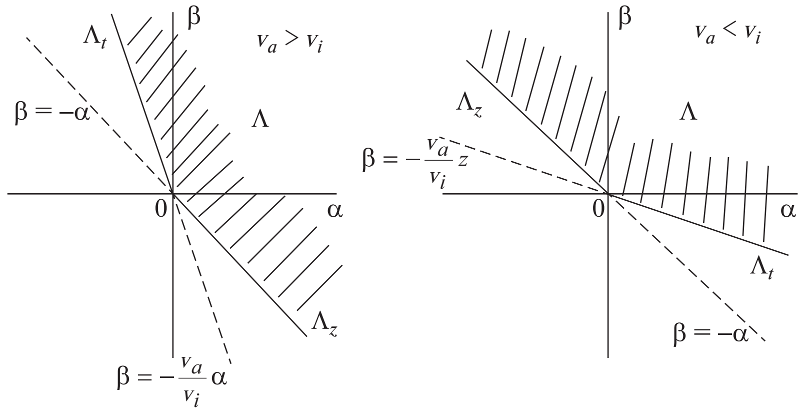
$$n_i(\alpha,\beta) = n_i(\alpha)\exp(N(\alpha))k_I^{-1}\left[1 + \int_0^\alpha n_i e^N d\alpha + \int_0^{-\beta v_i/v_a} n_a e^N d\beta\right]^{-1}.$$

Подставляя в эти формулы $\alpha = (tv_i - z)/(v_i - v_a)$, $\beta = (z - tv_a)/(v_i - v_a)$, получаем после несложных преобразований решение краевой задачи в переменных $(z,t)$:

$$\begin{gathered} n_a(z,t) = n_{a0}\left(t - \frac{z}{v_a}\right)e^{N(t - z/v_a)}\left[1 + \frac{k_I}{v_i - v_a}\left\{\int_0^{t - z/v_i} v_i n_{i0}(p)e^{N(p)}dp + \int_0^{t - z/v_a} v_a n_{a0}(p)e^{N(p)}dp\right\}\right]^{-1}, \\ n_i(z,t) = n_{i0}\left(t - \frac{z}{v_i}\right)e^{N(t - z/v_i)}\left[1 + \frac{k_I}{v_i - v_a}\left\{\int_0^{t - z/v_i} v_i n_{i0}(p)e^{N(p)}dp + \int_0^{t - z/v_a} v_a n_{a0}(p)e^{N(p)}dp\right\}\right]^{-1}, \\ N(p) = \frac{k_I}{v_i - v_a}\int_0^p [v_a n_{a0}(q) + v n_{i0}(q)]dq, \end{gathered} \tag{32}$$

где $n_{a0}(p) \geq 0$, $n_{i0}(p) \geq 0$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Итак, формулы (32) дают аналитическое решение системы (16) в полуплоскости $z \geq 0$, удовлетворяющее краевому условию $n_a(0,t) = n_{a0}(t)$, $n_i(0,t) = n_{i0}(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим смешанную задачу 3 в случае $v_a > 0$, $v_i > 0$, $v_a \neq v_i$. В координатах $(\alpha,\beta)$ ее решение сводится к поиску в тупом угле $\Lambda \underset{\text{def}}{=} \{(\alpha,\beta) : \alpha + \beta \geq 0,\ \alpha v_a + \beta v_i \geq 0\}$ непрерывно дифференцируемых функций $n_a(\alpha,\beta)$, $n_i(\alpha,\beta)$, удовлетворяющих системе (18) и имеющих заданные значения на границе угла $\partial\Lambda$. Последнее множество состоит из двух лучей, которые обозначим через




**Фиг. 2.** Угол $\Lambda$ и лучи $\Lambda_t$, $\Lambda_z$ в зависимости от $v_i$, $v_a$.

$\Lambda_t$ и $\Lambda_z$: $\partial\Lambda = \Lambda_t \cup \Lambda_z$, $\Lambda_t \cap \Lambda_z = \{(0,0)\}$, $\Lambda_t = \varphi\{(t,0) : t \geq 0\}$, $\Lambda_z = \varphi\{(0,z) : z \geq 0\}$. В зависимости от $v_i$, $v_a$ угол $\Lambda$ и лучи $\Lambda_t$, $\Lambda_z$ изображены на фиг. 2.

Значения искомого решения на лучах $\Lambda_t$, $\Lambda_z$ определяются равенствами $n_a(\alpha,\beta) = n_{a0}(\alpha+\beta)$, $n_i(\alpha,\beta) = n_{i0}(\alpha+\beta)$, $(\alpha,\beta) \in \Lambda_t$, $\alpha v_a + \beta v_i = 0$, $\alpha+\beta \geq 0$; $n_a(\alpha,\beta) = n_a^0(\alpha v_a + \beta v_i)$, $n_i(\alpha,\beta) = n_i^0(\alpha v_a + \beta v_i)$, $(\alpha,\beta) \in \Lambda_z$, $\alpha+\beta = 0$, $\alpha v_a + \beta v_i \geq 0$. Проведем построение искомого решения для случая $v_i > v_a$. Для нахождения искомого решения в угле $\Lambda$ построим непрерывно дифференцируемое решение системы (18) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R}\times\mathbb{R} \supseteq \Lambda$, которое на лучах $\Lambda_t$ и $\Lambda_z$ совпадает с указанными выше значениями. Тогда сужение построенного решения в прямоугольнике $\Pi_\infty$ на угле $\Lambda$ даст решение смешанной задачи. Решение системы (18) в $\Pi_\infty$, согласно теореме 1, определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми в $\mathbb{R}$ функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (19). Покажем, что функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ однозначно определяются значениями искомого решения на лучах $\Lambda_t$ и $\Lambda_z$. Имеем следующее:

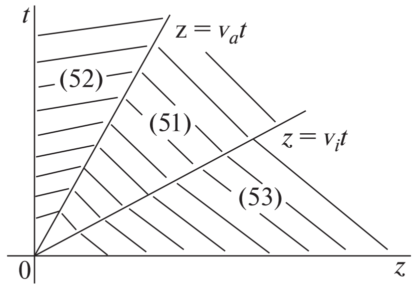
$$\begin{array}{ll}
\underset{(\beta=-\alpha v_a/v_i)}{\Lambda_t}: & \begin{array}{l} n_{a0}\left(\alpha\dfrac{v_i - v_a}{v_i}\right) = n_a(\alpha,\beta) \underset{(19)}{=} \dfrac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))} = \dfrac{B'(-\alpha v_a/v_i)}{k_I(A(\alpha)-B(-\alpha v_a/v_i))}, \quad \alpha \geq 0, \\ n_{i0}\left(\alpha\dfrac{v_i - v_a}{v_i}\right) = n_i(\alpha,\beta) \underset{(19)}{=} \dfrac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))} = \dfrac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(-\alpha v_a/v_i))}, \quad \alpha \geq 0, \end{array} \\
\underset{(\beta=-\alpha)}{\Lambda_z}: & \begin{array}{l} n_{a0}\left(\beta(v_i - v_a)\right) = n_a(\alpha,\beta) \underset{(19)}{=} \dfrac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))} = \dfrac{B'(\beta)}{k_I(A(-\beta)-B(\beta))}, \quad \beta \geq 0, \\ n_{i0}\left(\beta(v_i - v_a)\right) = n_i(\alpha,\beta) \underset{(19)}{=} \dfrac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))} = \dfrac{A'(-\beta)}{k_I(A(-\beta)-B(\beta))}, \quad \beta \geq 0. \end{array}
\end{array} \tag{33}$$

Введем в рассмотрение функции $B_0(\alpha) \underset{\text{def}}{=} B(-\alpha v_a/v_i)$, $A_0(\beta) \underset{\text{def}}{=} A(-\beta)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Тогда на полупрямой $\alpha \geq 0$ функции $B_0(\alpha)$, $A(\alpha)$, согласно (33), удовлетворяют линейной системе ОДУ с переменными коэффициентами:

$$\begin{gathered}
B_0' = -\bar{n}_{a0}(\alpha)(A - B_0), \quad A' = \bar{n}_{i0}(\alpha)(A - B_0), \quad \alpha \geq 0, \\
\bar{n}_{a0}(\alpha) \underset{\text{def}}{=} k_I\frac{v_a}{v_i}n_{a0}\left(\alpha\frac{v_i - v_a}{v_i}\right), \quad \bar{n}_{i0}(\alpha) \underset{\text{def}}{=} k_I n_{i0}\left(\alpha\frac{v_i - v_a}{v_i}\right),
\end{gathered} \tag{34}$$

а на полупрямой $\beta \geq 0$ функции $B(\beta)$, $A_0(\beta)$, согласно (33), удовлетворяют линейной системе ОДУ с переменными коэффициентами:

$$\begin{gathered}
B' = \bar{n}_a^0(\beta)(A_0 - B), \quad A_0' = -\bar{n}_i^0(\beta)(A_0 - B), \quad \beta \geq 0, \\
\bar{n}_a^0(\beta) \underset{\text{def}}{=} k_I n_a^0\left(\beta(v_i - v_a)\right), \quad \bar{n}_i^0(\beta) \underset{\text{def}}{=} k_I n_i^0\left(\beta(v_i - v_a)\right).
\end{gathered} \tag{35}$$




**Фиг. 3.** Области, где ищется решение смешанной задачи.

Решая системы (34), (35), находим функции $B_0(\alpha)$, $A(\alpha)$, $\alpha \geq 0$ и $B(\beta)$, $A_0(\beta)$, $\beta \geq 0$, после чего доопределяем $A$ и $B$ в областях отрицательных значений аргументов равенствами:

$$B(\beta) \underset{\text{def}}{=} B_0(-\beta v_i/v_a), \quad \beta \geq 0, \quad A(\alpha) = A_0(-\alpha), \quad \alpha \leq 0. \tag{36}$$

Полученные функции $A$ и $B$ на прямой являются искомыми, если выбрать решения систем (34) и (35) с одинаковыми начальными условиями $A(0) = C$, $B_0(0) = D$ и $A_0(0) = C$, $B(0) = D$, где $C \neq D$. Тогда функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ будут непрерывны на $\mathbb{R}$, а из (36) и условий согласованности в нуле следует их двукратная непрерывная дифференцируемость в нуле и, значит, на всей прямой $\mathbb{R}$.

Чтобы проверить условия 1) и 2) и преобразовать к удобному для анализа виду формулы (19), воспользуемся явными выражениями решений задач Коши для систем (35), (34), которые дают для $A(\alpha)$, $B(\beta)$ выражения:

$$A(\alpha) = \begin{cases} C + (D - C)\displaystyle\int_0^{-\alpha} \overline{n}_i^0 e^{-N} d\alpha, & \alpha \leq 0, \\ C + (C - D)\displaystyle\int_0^{\alpha} \overline{n}_{i0} e^{M} d\alpha, & \alpha \geq 0, \end{cases} \qquad B(\beta) = \begin{cases} D + (D - C)\displaystyle\int_0^{-\beta v_i/v_a} \overline{n}_{a0} e^{M} d\beta, & \beta \leq 0, \\ D + (C - D)\displaystyle\int_0^{\beta} \overline{n}_a^0 e^{-N} d\beta, & \beta \geq 0, \end{cases} \tag{37}$$

$$N(\beta) = \int_0^{\beta} (\overline{n}_a^0 + \overline{n}_a^0) d\beta, \quad M(\alpha) = \int_0^{\alpha} (\overline{n}_{a0} + \overline{n}_{i0}) d\alpha.$$

Наконец, преобразуем формулы (19), задающие решение системы (18) в прямоугольнике $\Pi_* \supseteq \Lambda$, в каждом из 4 квадрантов плоскости $(\alpha, \beta)$. При этом ограничимся только квадрантами I, II, IV, квадрант III, где $\alpha \leq 0$, $\beta \leq 0$, исключим из рассмотрения, поскольку тупой угол $\Lambda$, согласно фиг. 3, лежит в объединении квадрантов I, II, IV, а с квадрантом III пересекается только по нулевой точке. Для удобства введем в рассмотрение функции

$$N_*(p) \underset{\text{def}}{=} \frac{k_I}{v_i - v_a} \int_0^p (n_a^0(q) + n_i^0(q)) dq, \quad M_*(p) \underset{\text{def}}{=} \frac{k_I}{v_i - v_a} \int_0^p (v_a n_{a0}(q) + v_i n_{i0}(q)) dq. \tag{38}$$

Тогда $N(\beta) = N_*(\beta(v_i - v_a))$, $M(\alpha) = M_*(\alpha(v_i - v_a)/v_i)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Для $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ имеем

$$n_a(\alpha, \beta) \underset{(19)}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I[A(\alpha) - B(\beta)]} \underset{(37)}{=} \frac{n_a^0(\beta(v_i - v_a)) \exp(-N_*(\beta(v_i - v_a)))}{R_1(\alpha, \beta)},$$

$$R_1(\alpha, \beta) = 1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{\alpha(v_i - v_a)/v_i} v_i n_{i0}(p) \exp M_*(p) dp - \int_0^{\beta(v_i - v_a)} n_a^0(p) \exp(-N_*(p)) dp \right\}.$$

Аналогично

$$n_i(\alpha,\beta) \underset{(19)}{=} \frac{A'(\beta)}{k_I[A(\alpha)-B(\beta)]} \underset{(37)}{=} \frac{n_{i0}(\alpha(v_i-v_a)/v_i)\exp M_*(\alpha(v_i-v_a)/v_i)}{R_1(a,\beta)}.$$

Для двух других квадрантов аналогичные подсчеты с использованием формул (19), (37) дают:

$$\alpha \ge 0,\ \beta \le 0: \quad \begin{aligned} &n_a(\alpha,\beta) = [n_{i0}(-\beta(v_i-v_a)/v_i)\exp M_*(-\beta(v_i-v_a)/v_a)]R_2^{-1}(\alpha,\beta),\\ &n_i(\alpha,\beta) = [n_{i0}(\alpha(v_i-v_a)/v_i)\exp M_*(\alpha(v_i-v_a)/v_i)]R_2^{-1}(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

$$R_2(\alpha,\beta) = 1 + \frac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{\alpha(v_i-v_a)/v_i} v_i n_{i0}(p)e^{M_*(p)}dp + \int\limits_0^{-\beta(v_i-v_a)/v_a} v_a n_{a0}(p)e^{M_*(p)}dp\right\},$$

$$\alpha \le 0,\ \beta \ge 0: \quad \begin{aligned} &n_a(\alpha,\beta) = [n_a^0(\beta(v_i-v_a))\exp[-N_*(\beta(v_i-v_a))]]R_3^{-1}(\alpha,\beta),\\ &n_i(\alpha,\beta) = [n_i^0(-\alpha(v_i-v_a))\exp[-N_*(-\alpha(v_i-v_a))]]R_3^{-1}(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

$$R_3(\alpha,\beta) = 1 - \frac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{-\alpha(v_i-v_a)} n_i^0(p)e^{-N_*(p)}dp + \int\limits_0^{\beta(v_i-v_a)} n_a^0(p)e^{-N_*(p)}dp\right\}.$$

Осталось перейти в полученных формулах от координат $(\alpha,\beta)$ к координатам $(z,t)$, учитывая преобразование (17). При этом $\beta(v_i-v_a) = z - v_a t$, $-\alpha(v_i-v_a) = z - v_i t$, $\alpha(v_i-v_a)/v_i = t - z/v_i$, $-\beta(v_i-v_a)/v_a = t - z/v_a$. В итоге первый квадрант плоскости $(z,t)$, где ищется решение смешанной задачи для системы (16), прямыми $z = v_a t$, $z = v_i t$ делится на три области, изображенные на фиг. 3, в каждой из которых решение задается одной из формул

$$\begin{aligned} &n_a(z,t) = [n_a^0(z-v_a t)\exp[-N_*(z-v_a t)]]R_1^{-1}(z,t),\\ &n_i(z,t) = [n_{i0}(t-z/v_i)\exp[M_*(t-z/v_i)]]R_1^{-1}(z,t),\\ &R_1(z,t) = 1 + \frac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p)\exp M_*(p)dp - \int\limits_0^{z-v_a t} n_a^0(p)\exp(-N_*(p))dp\right\};\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &n_a(z,t) = [n_{a0}(t-z/v_a)\exp[M_*(t-z/v_a)]]R_2^{-1}(z,t),\\ &n_i(z,t) = [n_{i0}(t-z/v_i)\exp[M_*(t-z/v_i)]]R_2^{-1}(z,t),\\ &R_2(z,t) = 1 + \frac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p)\exp M_*(p)dp + \int\limits_0^{t-z/v_a} v_a n_{a0}(p)\exp M_*(p)dp\right\};\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &n_a(z,t) = [n_a^0(z-v_a t)\exp[-N_*(z-v_a t)]]R_3^{-1}(z,t),\\ &n_i(z,t) = [n_i^0(z-v_i t)\exp[-N_*(z-v_i t)]]R_3^{-1}(z,t),\\ &R_3(z,t) = 1 - \frac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{z-v_i t} n_i^0(p)\exp[-N_*(p)]dp + \int\limits_0^{z-v_a t} n_a^0(p)\exp[-N_*(p)]dp\right\}.\end{aligned} \tag{41}$$

Формулы (39) и (40) на луче $z = v_a t$, $t \ge 0$ и формулы (39) и (41) на луче $z = v_i t$, $t \ge 0$, очевидно, совпадают. При $z = 0$ формула (40) дает краевые условия $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t \ge 0$, а при $t = 0$ формула (41) дает начальные условия $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z \ge 0$. Итак, формулы (39)–(41) с учетом выражений (38) полностью определяют решение смешанной задачи для системы (16) по известным граничным $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t \ge 0$, и начальным $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z \ge 0$ условиям.

## 4. ИОНИЗАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ (БРИВИНГ-МОДЫ)

В разд. 2 было установлено, что для знакоопределенных на отрезке $[0,L]$ скоростей $v_a(z)$, $v_i(z)$ система уравнений ионизации (1) имеет единственное стационарное решение, удовлетворяющее заданным (стационарным) граничным условиям. При этом граничные условия для $n_a$, $n_i$ в зависимости от знака соответствующей скорости ставятся либо на левом конце $z = 0$, либо на правом $z = L$. Например, если $v_i(z) > 0$ на $[0, L]$, то на левом конце $z = 0$ считается заданной величина $n_i(0,t)$ в каждый момент времени $t \geq 0$, а если $v_i(z) < 0$, то считается заданной величина $n_i(L,t)$, $t \geq 0$, и аналогично для $n_a$. Численно было установлено также, что в случае знакоопределенных скоростей $v_a$, $v_i$ при $t \to +\infty$ решение начально-краевой задачи для системы (1) со стационарными краевыми условиями устанавливается, т.е. при $t \to +\infty$ сходится в равномерной метрике на $[0, L]$ к единственному стационарному решению системы (1). В частности, в этом случае ионизационные колебания (бривинг-моды) отсутствуют.

При исследовании процесса ионизации в СПД обычно считается $v_a(z) \equiv v_a = \text{const} > 0$. Таким образом, ограничиваясь этим практически важным случаем, можно утверждать, что необходимым (но, вероятно, не достаточным) условием существования ионизационных колебаний является знакопеременность скорости $v_i(z)$ на отрезке $[0, L]$. Этот вывод согласуется с экспериментальными данными по СПД, согласно которым [13] ионная скорость $v_i$ всегда отрицательна по направлению $z$ в прианодной области и, следовательно, применительно к одномерному случаю $v_i(z)$ имеет единственный нуль $z_0$ на $[0, L]$, причем $0 < z_0 < L$, $v_i'(z_0) > 0$ и, значит, $v_i(z)$ меняет знак с минуса на плюс, когда $z$, возрастая, проходит через точку $z_0$. Типичными модельными примерами в одномерной задаче являются функции $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $\alpha > 0$, $0 < z_0 < L$, $v_i(z) = a(z + z_1)(z - z_0)$, $a > 0$, $z_1 > 0$, $0 < z_0 < L$, $v_i(z) = -\cos(\pi z/L)$ (и тогда $z_0 = L/2$).

Рассмотрим причину возникновения бривинг-мод в случае, когда ионная скорость $v_i(z)$ имеет указанный выше специальный вид. В этом случае граничные условия ставятся только для $n_a$ на левой границе $z = 0$, для $n_i$ они формально не нужны, поскольку $v_i(0) < 0 < v_i(L)$ и, значит, ионы через границы $z = 0$ и $z = L$ покидают область $[0, L]$. Однако при этом возникает “внутреннее” граничное условие для $n_i$ на характеристике $z = z_0$ для уравнения переноса ионов (1), которое объясняет возникновение бривинг-мод. Остановимся на этом подробнее. Начально-краевая задача на отрезке $[0, L]$ для системы (1) распадается на две начально-краевые задачи на отрезках $[0, z_0]$ и $[z_0, L]$ соответственно, которые решаются последовательно. При этом краевое условие $n_i(t) \underset{\text{def}}{=} n_i(z_0, t)$ для функции $n_i$ на характеристике $z = z_0$, являющейся границей для обеих смешанных задач, ищется из решения задачи Коши для ОДУ

$$dn_i/dt = \beta n_a n_i - \alpha n_i, \quad n_i(0) = n_i^0(z_0), \quad \alpha \underset{\text{def}}{=} v_i'(z_0), \tag{42}$$

где $n_i^0(z)$, $0 \leq z \leq L$, — заданное начальное условие для $n_i$ на отрезке $[0, L]$. Уравнение (42) является тривиальным следствием второго уравнения системы (1) в точке $z_0$ с учетом равенства $v_i(z_0) = 0$. Неизвестная функция $n_a(t) \underset{\text{def}}{=} n_a(z_0, t)$, входящая в (42), находится следующим образом. Если фиксировано граничное условие $n_{a0}(t)$, $t \geq 0$, для $n_a$ на левой границе $z = 0$, то функция $n_a(t)$ ищется в банаховом пространстве $B$ непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе с производной функций на полупрямой $t \geq 0$, как неподвижная точка отображения $F : B_0 \to B_0$, где $B_0 \subseteq B$ — замкнутая гиперплоскость в $B$ коразмерности 1, определяемая условием $B_0 = \{n(t) \in B : n(0) = n_a^0(z_0)\}$, а $n_a^0(z)$, $0 \leq z \leq L$ — заданное начальное условие для $n_a$. Отображение $F$ определяется следующим образом. Если $n(t) \in B_0$, то, положив $n_a(t) = n(t)$ в (42) и решая задачу Коши (42) на полупрямой $t \geq 0$ относительно $n_i$, находим функцию $n_i(t)$, $t \geq 0$, которую принимаем за краевое условие для $n_i$ на правом конце $z = z_0$ (вместе с краевым условием $n_{a0}(t)$ для $n_a$ на левом конце $z = 0$) в смешанной задаче на отрезке $[0, z_0]$ для системы (1). Решив эту смешанную задачу, получим, в частности, на правом конце $z = z_0$ функцию $n_a(z_0, t)$, $t \geq 0$, которая, по определению, и является образом $n(t)$ при отображении $F$. Итак, функция $n_a(t)$ в уравнении (42) — это неподвижная точка определенного выше отображения $F$. Решение $n_i(t)$ задачи Коши (42) для неподвижной точки $n_a(t)$ является правым краевым условием для $n_i$ в смешанной задаче для системы (1) на отрезке $[0, z_0]$, а вместе с $n_a(t)$ дает левые краевые условия для $n_i$, $n_a$ в смешанной задаче для системы (1) на отрезке $[z_0, L]$. Отметим, что смешанные задачи на отрезках $[0, z_0]$, $[z_0, L]$ относятся к задачам Гурса [14], а уравнение (42) совпадает с условием разрешимости [14] на характеристике для квазилинейной системы уравнений в частных производных, к которой относится и система (1). Аналитическое исследование существования и единственности неподвижной точки отображения $F$ выходит за рамки настоящей работы. Численно существование неподвижной точки $F$ одновременно с решением задачи Коши (42) устанавливается расчетом по разностной схеме (15). В частности, если $k_0$ – номер узла, где $z_{k_0} = z_0$, то разностная схема (15) для $n_i$ в узле $k_0$ совпадает со схемой Эйлера решения задачи Коши (42) и дает сеточную функцию $n_{i,k_0}$, удовлетворяющую указанному выше начальному условию, а сеточная функция $n_{a,k_0}$ дает сеточную аппроксимацию неподвижной точки $F$.

Как показали расчеты, ионизационные колебания (бривинг-моды) имеют место только тогда, когда решение задачи Коши (42) при $t \to +\infty$ выходит на периодический режим. При этом $n_a(t) = n_a(z_0,t)$ на характеристике $z = z_0$ удовлетворяет уравнению

$$dn_a/dt = -\beta n_a n_i + \gamma(t) n_a, \quad n_a(0) = n_a^0(z_0), \tag{43}$$

где $\gamma(t) = -\left[(\partial n_a/\partial z)(v_a/n_a)\right]\big|_{z=z_0}$ – периодическая для больших $t$ и определяется видом скорости ионов $v_i(z)$. Из этой констатации вытекают важные и неочевидные выводы. Например, если ионная скорость $v_i(z)$ имеет хотя бы один нуль $z_0$ на интервале $(0,L)$, для которого $v_i'(z_0) \le 0$, то ионизационные колебания (бривинг-моды) отсутствуют. Действительно, тогда $n_i(z_0,t) = n_i(t)$, вычисляемая по решению задачи Коши (42), будет монотонно возрастающей на полупрямой $t \ge 0$ функцией и, следовательно, при $t \to +\infty$ не может выйти на периодический режим. Скажем, для $v_i(z) = -\cos[(2N+1)\pi z/L]$, $N > 0$ – целое бривинг-моды отсутствует. Хотя приведенный пример, согласно [13], имеет, скорее, теоретическое значение, он указывает на нетривиальность полученного результата.

Функция $\gamma(t)$ находится численно, решением разностных уравнений (15): на нулевом слое $\gamma^0 = -(n_{a,k_0}^0 - n_{a,k_0-1}^0)/h \cdot v_a/n_{a,k_0}^0$, где $z_0 = z_{k_0}$.

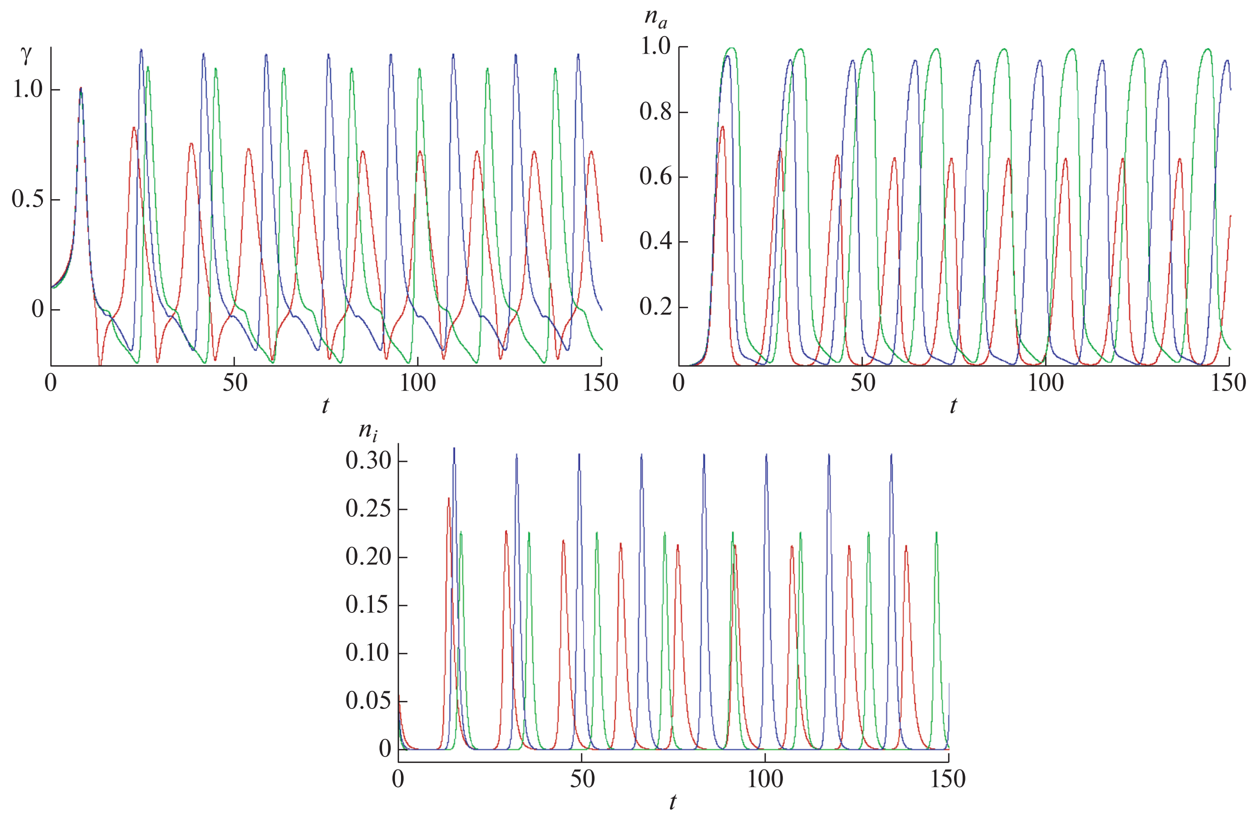
Расчеты значений $n_i$, $n_a$ на характеристике $z = z_0$ и функции $\gamma(t)$ для трех типов скоростей ионов $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $\alpha > 0$, $v_i = a(z + z_1)(z - z_0)$, $a > 0$, $v_i(z) = -\cos(\pi z/L)$ приведены на фиг. 4.

Если бы функция $\gamma(t)$ была положительной константой, то из (42), (43) вытекало бы, что на характеристике $z = z_0$ функции $n_i(t)$, $n_a(t)$ удовлетворяют уравнениям Лотки–Вольтерра, что, как показывают примеры, не имеет места. Поэтому существование бривинг-мод не удается связать с моделью Лотки–Вольтерра.

## 5. ИОНИЗАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Недостаток ионизационной модели (1) в том, что скорости $v_a(z)$, $v_i(z)$ считаются известными и не зависящими от времени $t$. Применительно к СПД обычно считается $v_a(z) \equiv v_a = \text{const} > 0$, а $v_i$ находится из уравнения движения ионов. Движение ионов определяется электромагнитным полем в камере СПД и их столкновениями с боковыми керамическими стенками камеры и поверхностью анода. Наличие в установке сильного почти радиального магнитного поля и продольного электрического поля и, как следствие, справедливость соотношения $r_{\Lambda i} \gg L$ ($r_{\Lambda i}$ – ларморовский радиус ионов) предопределяют движение ионов преимущественно в продольном направлении, параллельно поверхностям боковых стенок. Поэтому столкновениями ионов и атомов Xe со стенками в первом приближении можно пренебречь. Электромагнитное поле в СПД складывается из индукционного и внешнего электромагнитного поля, порождаемого постоянными токами обмоток СПД и заданной разностью потенциалов между анодом и катодом. Пренебрегая индукционными полями, порождаемыми плазменными токами, в частности, столкновениями ионов с электронами, приходим к следующей упрощенной кинетической модели движения ионов и атомов:

$$\begin{gathered} \partial f_i/\partial t + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_i \rangle + \langle \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{v}} f_i \rangle = \beta n_i f_a, \quad \mathbf{F}(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = e m_i^{-1}\left(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v},\mathbf{H}]\right), \\ \partial f_a/\partial t + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_a \rangle = -\beta n_i f_a, \quad n_i = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f_i d\mathbf{v}, \quad \beta = \text{const} > 0, \end{gathered} \tag{44}$$




**Фиг. 4.** Значения $n_i$, $n_a$ на характеристике $z = 1$ и функции $\gamma(t)$ для трех типов скоростей ионов $v_i(z) = z - 1$ (красная линия), $v_i(z) = (z + 0.5)(z - 1)$ (зеленая линия), $v_i(z) = -\cos(\pi z/2)$ (синяя линия).

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x})$ – известные стационарные электрическое и магнитное поля в СПД, $e$ – заряд электрона, $m_i$ – масса иона Xe, $f_i = f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, $f_a = f_a(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ – функции распределения ионов и атомов Xe по скоростям. Равенства (44) образуют систему интегродифференциальных уравнений относительно двух функций $f_i$, $f_a$ и описывают процессы ионизации и ускорения ионов в СПД. После ее решения ионная скорость вычисляется по формуле:

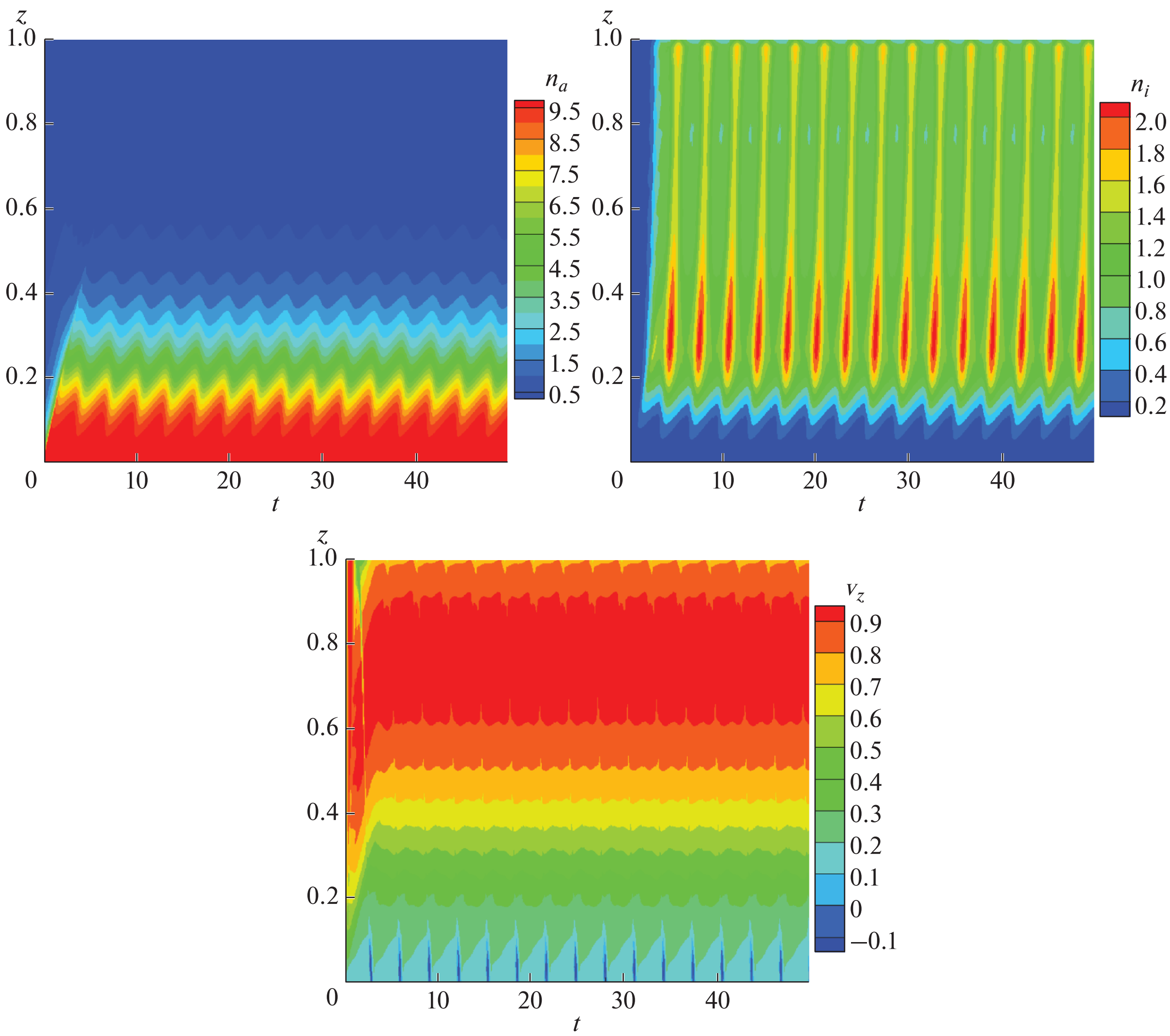
$$\mathbf{v}_i = n_i^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} f_i \mathbf{v} d\mathbf{v}. \tag{45}$$

Система (44) в случае плоской симметрии $f_i = \delta(v_x) f_i(t, z, v_y, v_z)$, $f_a = \delta(v_x)\delta(v_z)\delta(v_z - v_a) n_a(t, z) \times \times f_i(t, z, v_y, v_z)$, где $f_i(t, z, v_y, v_z)$, $n_a(t, z)$ – неизвестные функции, подлежащие нахождению, сводится к виду:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_i}{\partial z} + \frac{e}{m_i}\left[E_y + \frac{H_x v_z}{c}\right]\frac{\partial f_i}{\partial v_y} + \frac{e}{m_i}\left(E_z - \frac{H_x v_y}{c}\right)\frac{\partial f_i}{\partial v_z} = \beta n_i n_a \delta(v_y)\delta(v_z - v_a), \\
\frac{\partial n_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial n_a}{\partial z} = -\beta n_i n_a, \quad n_i = \int_{\mathbb{R}^2} f_i dv_y dv_z,
\end{gathered} \tag{46}$$

где $v_a$ – заданная скорость, с которой атомы Xe поступают в камеру СПД через левую границу со стороны анода. Интегрируя первое уравнение (46) по скоростному пространству $\mathbb{R}^2 = \{(v_y, v_z)\}$, получаем уравнение непрерывности для ионов с $\mathbf{v}_i$, вычисляемой по формуле (45):

$$\partial n_i/\partial t + \partial(v_{iz} n_i)/\partial z = \beta n_i n_a, \quad n_i = n_i(t, z), \quad v_{iz} = n_i^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f_i v_z dv_y dv_z.$$




**Фиг. 5.** Графики функций $n_i(z,t)$, $n_a(z,t)$, $v_z(z,t)$ на плоскости $(z,t)$, демонстрирующие бривинг-моды, для значений параметров $\varepsilon = 1$, $k_I = 0.56$, $E_z = 2$, $H_x = 2$, $n_i^0 = 0.1$, $n_a^0(z) = 10/(1+100z)$, $v_a = 0.1$.

В результате приходим к модели ионизации (1), в которой $v_i(t,z)$ зависит от $t$ и определяется движением ионов. Если выпрямить коаксиальную камеру СПД посредством экспоненциального отображения, то ось $r$ перейдет в ось $x$, ось $\varphi$ – в ось $y$ и значит в (46) $E_y$ – азимутальное электрическое поле, $H_x$ – радиальное магнитное поле. Из уравнений Максвелла в случае плоской симметрии, $\partial/\partial y = \partial/\partial x = 0$, следует $E_y = \text{const}$, $E_z = \text{const}$, $H_x = \text{const}$. В физически важном случае $E_y = 0$ в безразмерном виде система (46) сводится к следующей:

$$\begin{gathered}\partial f_i/\partial t + v_z\partial f_i/\partial z + \varepsilon H_x v_z \partial f_i/\partial v_y + \varepsilon\left[E_z - H_x v_y\right]\partial f_i/\partial v_z = k_I n_i n_a \delta(v_y)\delta(v_z - v_a), \\ \partial n_a/\partial t + v_a \partial n_a/\partial z = -k_I n_i n_a, \quad n_i = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f_i dv_y dv_z,\end{gathered} \tag{47}$$

где $\varepsilon = t_0\omega_{ci}$, $\omega_{ci} = eH_0/(cm_i)$, $f_0 = n_0/v_0^2$, $H_0 = 200$ Гс – характерный масштаб напряженности магнитного поля, $f_0$ – характерный масштаб значений $f$. Наконец, считается $E_0 = v_0H_0/c$ (см. формулы (14)). Система (47) решается методом макрочастиц [17] на отрезке $[0, L]$ с граничным условием зеркального отражения для ионов на левой границе $z = 0$. На правой границе $z = L$ ускоренные ионы свободно покидают отрезок $[0, L]$. Начальное условие обеспечивает спокойный старт движения макрочастиц и задается в размерном виде максвеллианом

$$f_i\big|_{t=0}(z, v_y, v_z) = \frac{n}{2\pi T/m_i}\exp\left[-\frac{v_y^2 + v_z^2}{2T/m_i}\right],$$

где $n(z)$, $T(z)$ – заданные функции (характерный масштаб температуры $T_0 = 12.1$ эВ – температура ионизации Xe). Подробно численный метод изложен в [18].

На фиг. 5 представлены результаты решения системы (47), демонстрирующие возникновение ионизационных колебаний при $t \to +\infty$, причем продольная скорость ионов $v_z$ зависит от времени, периодична для больших $t$ и меняет знак в определенные моменты времени. Заметим, что для других входных данных концентрации $n_i$, $n_a$, вычисляемые по (47), выходят на установление [18] и, таким образом, бривинг-моды отсутствуют, но при этом разрядный ток испытывает низкочастотные осцилляции вокруг некоторых средних значений. Это означает, что колебания разрядного тока необязательно обусловлены ионизационными колебаниями.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для изучения ионизационных колебаний (бривинг-мод) в стационарных плазменных двигателях (СПД) выше предложены две математические модели ионизации – гидродинамическая и кинетическая. Уравнения гидродинамической модели проще и поддаются аналитическому исследованию. В частности, выше были классифицированы стационарные решения уравнений гидродинамической модели и дано их полное аналитическое решение в случаях постоянных скоростей атомов и ионов, что, в свою очередь, позволяет аналитически решать различные начально-краевые задачи. Ионизационные колебания на базе гидродинамической модели исследовались численно, и выше был сформулирован критерий (необходимое и достаточное условие) существования бривинг-мод. Недостаток гидродинамической модели в том, что скорость ионов считается заданной и стационарной, а процесс ионизации никак не связан с ускорением ионов. В более сложной кинетической модели скорость ионов определяется из их движения, а процессы ионизации и ускорения ионов исследуются совместно. В кинетической модели, также как и в гидродинамической, существуют бривинг-моды, но картина ионизационных колебаний отличается от гидродинамического случая. Возможности кинетической модели намного шире, чем гидродинамической. В частности, кинетическая модель позволяет найти распределение ионного тока и силу тяги СПД и проанализировать причины паразитических колебаний тока и силы тяги.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Козубский К.Н., Мурашко В.М., Рылов В.П., Трифонов Ю.В., Ходенко В.П., Ким В.П., Попов Г.А., Обухов В.А.* СПД работает в космосе // Физика плазмы. 2003. Т. 29. № 3. С. 277–792.
2. *Kim V., Kozubsky K.N., Murashko V.M., Semenkin A.V.* History of the Hall Thrusters Development in USSR // IEPC-2007-142, 30th International Electric Propulsion Conference, Florence, Italy, September 17–20, 2007.
3. *Ким В.П., Семенкин А.В., Хартов С.А.* Конструктивные и физические особенности двигателей с замкнутым дрейфом электронов. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.
4. *Mitrofanova O.A., Gnizdor R.Yu., Murashko V.M., Koryakin A.I., Nesterenko A.N.* New Generation of SPT-100 // IEPC-2011-041, 32nd International Electric Propulsion Conference, Wiesbaden, Germany, September 11–15, 2011.
5. *Lotka A.J.* Elements of Physical Biology. Baltimore: Williams and Wilkins, 1925. New York: Dover Publications, Inc., 1956.
6. *Volterra V.* Lessons on the Mathematical Theory of Struggle for Life (Original: Leçons sur la théorie mathématique de la Lutte pour la vie). Paris: Gauthier-Villars, 1931. (Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с франц. 1976. 288 с.)
7. *Baranov V.I., Nazarenko Y.S., Petrosov V.A., Vasin A.I., Yashnov Y.M.* Theory of Oscillations and Conductivity for Hall Thrusters, 32nd Joint Propulsion Conference, AIAA 96-3192, 1996.
8. *Fife J., Martínez-Sánchez M., Szabo J.* A numerical study of low-frequency discharge oscillations in Hall thrusters, 33rd Joint Propulsion Conference, AIAA 97-3052, 1997.
9. *Barral S., Ahedo E.* On the Origin of Low Frequency Oscillations in Hall Thrusters // AIP Conf. Proc. 2008. V. 993. № 439. P. 439–442.
10. *Dale E., Jorns B.* Two-zone Hall thruster breathing mode mechanism, Part I: Theory, 36th International Electric Propulsion Conference, University of Vienna, Austria, 2019.

11. *Boeuf J., Garrigues L.* Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster // J. of Applied Physics. 1998. V. 84. № 7. P. 3541–3554.
12. *Chapurin O., Smolyakov A., Hagelaar G., Raitses Y.* On the mechanism of ionization oscillations in Hall thrusters // J. of Applied Physics. 2021. V. 129. № 23. P. 233307-1—233307-27.
13. *Бишаев А.М., Ким В.* Исследование локальных параметров плазмы в ускорителе с замкнутым дрейфом электронов и протяженной зоной ускорения // Ж. техн. физ. 1978. Т. 48. № 9. С. 1853–1857.
14. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
15. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
16. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Некоторые математические вопросы ионизации плазмы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 94. 48 с.
17. *Березин Ю.А., Вшивков В.А.* Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980. 95 с.
18. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Гибридная модель стационарного плазменного двигателя // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 35. 48 с.