

БЫСТРОСХОДЯЩИЙСЯ РЯД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЕКТРОВИХРЕВОМ ТЕЧЕНИИ В ПОЛУСФЕРИЧЕСКОМ СОСУДЕ¹⁾

© 2022 г. К. Ю. Малышев^{1,*}, Е. А. Михайлов^{2,3}, И. О. Тепляков⁴

¹ 119991 Москва, ул. Колмогорова, 1, стр. 2, НИИЯФ МГУ, Россия

² 119991 Москва, Ленинские горы, 1, физ. ф-т МГУ, Россия

³ 119991 Москва, Ленинский пр-т, 53, ФИАН, Россия

⁴ 125412 Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2, ОИВТ РАН, Россия

*e-mail: kmalyshyev08102@mail.ru

Поступила в редакцию 04.02.2022 г.

Переработанный вариант 04.02.2022 г.

Принята к публикации 11.03.2022 г.

Рассматривается линейная краевая задача, описывающая аксиально-симметричное установившееся электровихревое течение в вязкой жидкости в полусферическом сосуде. Течение, называемое электровихревым, возникает вследствие взаимодействия тока, пропускаемого через среду, с магнитным полем этого тока. В более ранних работах для решения задачи получены формальные двойные ряды по собственным функциям задачи Дирихле для оператора Лапласа в полушаровом слое. Коэффициенты Фурье выражаются через гипергеометрические функции и содержат собственные значения полушарового слоя. В настоящей работе классическое решение указанной краевой задачи представлено в виде однократных рядов по присоединенным функциям Лежандра. Коэффициенты разложения являются элементарными функциями радиальной переменной. Для корректного представления решения достаточно первых нескольких слагаемых. Дана оценка скорости убывания слагаемых. Гладкость решения обоснована при помощи леммы Вейля. Прделанные выкладки могут быть полезны для исследования других краевых задач, содержащих векторный оператор Лапласа. Библ. 30. Фиг. 5.

Ключевые слова: уравнение Навье–Стокса, специальные функции, неполный метод Галеркина, быстросходящийся ряд, лемма Вейля, электровихревое течение, стоксово приближение.

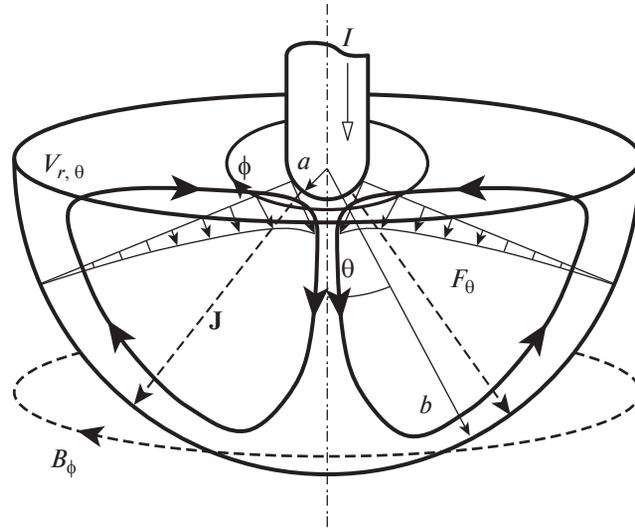
DOI: 10.31857/S0044466922070067

1. ВВЕДЕНИЕ

При прохождении через жидкую проводящую среду неоднородного электрического тока, в результате взаимодействия этого тока с собственным магнитным полем, в жидкости возникает электромагнитная сила, которая может приводить к образованию т.н. электровихревого течения (ЭВТ) [1]. Описанное явление возникает в многочисленных вязких проводящих средах: газах, плазме (разряды в атмосфере и электродуговых лабораторных приборах, некоторые процессы на Солнце), жидких металлах, электролитах. В промышленности ЭВТ сопровождает процессы электрошлакового и электродугового переплава металлов, электросварки, также ЭВТ возникают в электролите и электродах жидкометаллических батарей [2]–[5].

В настоящей работе изучена линейная краевая задача, описывающая течение жидкого металла под действием электрического тока в полушаровом слое. Данная задача рассмотрена и решена в работе [6] в переменных “векторный потенциал–завихренность”. Имеет место проблема: в работе [6] решение представлено в виде двойного ряда, слагаемые которого выражены весьма громоздкими формулами, причем для получения удовлетворительного результата необходимо суммировать значительное число слагаемых. Для теоретического анализа задачи важно получить простое представление решения. В настоящей статье получено и обосновано новое представление решения задачи из [6].

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадание № 075-01056-22-00).



Фиг. 1. Схема образования ЭВТ в полусферическом сосуде.

Реализованный подход использует одномерную систему базисных функций, что позволяет получать формальные решения краевых и начально-краевых линейных задач с произвольными граничными условиями по радиальной переменной на сферических частях границы расчетной области и условием отсутствия касательных напряжений на плоской ее части.

2. ПОСТАНОВКА ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается аксиально-симметричное течение жидкого металла в сосуде полусферической формы, см. фиг. 1. Внешняя и внутренняя граничные полусферы являются электродами. Электрический ток плотности \mathbf{J} растекается изотропно от внутреннего электрода к внешнему, порождая магнитное поле индукции \mathbf{B} . При этом на ток действует сила Ампера с объемной плотностью $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Течение является достаточно медленным и установившимся (стоксовым), что имеет место при относительно малых величинах тока. Токи, порождаемые движением жидкости и создаваемые ими магнитные поля пренебрежимо малы (используется электродинамическое приближение [1]). Также мы пренебрегаем сторонними магнитными полями (например, магнитным полем Земли [7]).

Формулы для плотности тока, магнитного поля и плотности силы Ампера имеют вид (см. подробный вывод в работе [1]):

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{F} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r^3} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (1)$$

Здесь μ_0 – магнитная постоянная, I – сила тока, r , θ , ϕ – сферические координаты.

Введем следующие масштабы: для расстояний – радиус внешнего электрода b ; для плотности тока: $j_0 = Ib^{-2}$, для магнитного поля: $B_0 = \mu_0 Ib^{-1}$; для силы: $f_0 = \mu_0 I^2 b^{-3}$; для скорости: $v_0 = (f_0 b / \rho)^{1/2}$; (где ρ – плотность жидкости); для времени: $t_0 = b / v_0 = b^2 / I(\rho / \mu)$; для давления: $p_0 = \rho v_0^2$. Аналогом числа Рейнольдса для ЭВТ является параметр электровихревого течения S [1]:

$$S = \frac{f_0 b^3}{\rho v^2} = \frac{\mu_0 I^2}{\rho v^2},$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости.

Уравнение Навье–Стокса в безразмерных переменных примет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\sqrt{S}} \Delta \mathbf{v} + \frac{\cos \theta - 1}{4\pi^2 r^3 \sin \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

В рамках указанных модельных предположений можно пренебречь в уравнении Навье–Стокса конвективными слагаемыми, и рассматривать линейную начально–краевую задачу о движении несжимаемой вязкой жидкости. Установившийся процесс будет описываться уравнением Стокса с условием несжимаемости:

$$\frac{1}{\sqrt{S}} \Delta \mathbf{v} = \nabla p - \frac{\cos \theta - 1}{4\pi^2 r^3 \sin \theta} \mathbf{e}_\theta,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями. Следуя классическим работам о точечном [8] и плоском [9] центральных электродах, мы пренебрегаем деформацией поверхности жидкого металла и предполагаем выполненными на ней условия непротекания и отсутствия касательных напряжений. На сферических частях границы, отвечающих электродам, должны выполняться условия полного прилипания.

Теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для уравнения Стокса хорошо известны [10]. Математические исследования задач для уравнения Стокса активно ведутся и в настоящее время [15]. Для построения решения линейной задачи и связанной с ней нестационарной нелинейной задачи разработан ряд приближенных и точных методов [10]–[14]. Примеров, когда решение удастся найти в явном виде, известно сравнительно немного. Необходимость в получении решений линейных краевых задач, а также соответствующих нестационарных линейных начально–краевых задач возникает при асимптотическом интегрировании начально–краевой задачи для нестационарного нелинейного уравнения Навье–Стокса (см. [11], [12] и указанную там литературу).

В настоящей статье исследуется постановка краевой задачи об электровихревом течении, сформулированная в [6]. Граничные условия, использованные в работе [6], эквивалентны условиям непротекания и отсутствия касательных напряжений на свободной поверхности, однако на сферической части границы выполняется лишь непротекание. При этом тангенциальная проекция скорости жидкого металла на электродах отлична от нуля. Обобщение нижеследующих выкладок позволяет преодолеть эту трудность, см. замечание 2.

Результаты исследований линейных постановок задач будут использоваться нами в дальнейшем для уточнения границ применимости линейного приближения в рассматриваемой задаче, путем сопоставления с численными расчетами нелинейной задачи.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И ЗАВИХРЕННОСТЬ

Векторный потенциал $\boldsymbol{\psi}$ и завихренность $\boldsymbol{\omega}$ вводятся по формулам:

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Азимутальные составляющие завихренности и векторного потенциала обозначим через ω и Ψ . Все другие проекции равны нулю в силу аксиальной симметрии системы.

Задача рассматривается в области

$$\Omega := \left\{ (r, \theta) : a < r < b, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\},$$

т.е. вертикальном сечении полушарового слоя $\Omega \times (0, 2\pi]$.

Математическая формулировка задачи в переменных $\omega - \Psi$ имеет вид (см. [6]):

$$\Delta \omega - \frac{\omega}{(r \sin \theta)^2} = f, \quad (r, \theta) \in \Omega; \tag{2}$$

$$\Delta \Psi - \frac{\Psi}{(r \sin \theta)^2} = -\omega, \quad (r, \theta) \in \Omega; \tag{3}$$

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Psi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Выражение для источника:

$$f(r, \theta) = \frac{\sqrt{S}}{2\pi^2 r^4} \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta}. \tag{5}$$

Без ограничения общности положим $\frac{\sqrt{S}}{2\pi^2} = 1$. Неоднородность f соответствует электромагнитной силе \mathbf{F} (1) так, что $f = (\text{rot } \mathbf{F})_\phi$. Дальнейшие выкладки обобщаются на непрерывные источники вида $U(r)V(\theta)$ и на случай произвольной непрерывной (или более широкого класса) функции r, θ . Введем обозначение для дифференциального оператора:

$$L := \Delta - \frac{1}{(r \sin \theta)^2},$$

где L – азимутальная компонента векторного оператора Лапласа [16], действующая в дальнейшем только на аксиально-симметричные функции. Имеет место тождество [6] (u – не зависит от ϕ – азимутального угла):

$$\cos \phi Lu = \Delta(u \cos \phi). \tag{6}$$

Поэтому теорема единственности классического решения поставленной задачи следует из соответствующего результата для задачи Дирихле с обычным скалярным трехмерным оператором Лапласа Δ в области с кусочно-гладкой границей [17].

В работе [6] дано разложение искомых функций в ряды Фурье по системе собственных функций задачи Дирихле для трехмерного оператора Лапласа в полушаровом слое, в следующем виде:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_l \frac{f_{lk}}{\lambda_{lk}} Z_{lk}(r\sqrt{\lambda_{lk}}) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta), \tag{7}$$

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_l \frac{f_{lk}}{(\lambda_{lk})^2} Z_{lk}(r\sqrt{\lambda_{lk}}) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta), \tag{8}$$

где

$$Z_{lk}(r\sqrt{\lambda_{lk}}) = \frac{J_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}r) N_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}a) - J_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}a) N_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}r)}{\left(N_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}b)^2 - N_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}a)^2 \right) \left(N_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}a) N_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}b)^2 \right)^{-1}}, \tag{9}$$

$$M_l = \pi^2 \frac{(-1)^{l+1} (4l+1)(2l)!}{2^{2l+2} (l!)^2 l(2l+1)}, \tag{10}$$

$$f_{lk} = \frac{{}_1F_2\left(l - \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}, 2l + \frac{3}{2}; -\frac{1}{4}x^2\lambda_{lk}\right) (x\sqrt{\lambda_{lk}})^{2l+\frac{1}{2}}}{2^{2l+\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \left(\Gamma\left(l - \frac{1}{2}\right)\right)^{-1}} \Bigg|_{x=a}^{x=b} - \frac{J_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}a)}{N_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}a)} (\lambda_{lk})^{\frac{5}{4}} x \times$$

$$\times \left[(2l-2) N_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}x) \mathcal{S}_{\frac{7}{2}, 2l-\frac{1}{2}}(x\sqrt{\lambda_{lk}}) - N_{2l-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}x) \mathcal{S}_{\frac{5}{2}, 2l+\frac{1}{2}}(x\sqrt{\lambda_{lk}}) \right] \Bigg|_{x=a}^{x=b}, \tag{11}$$

${}_1F_2(\alpha; \beta, \gamma; z)$ – обобщенный гипергеометрический ряд [18], [19, с. 183], $J_\nu(z), N_\nu(z)$ – функции Бесселя и Неймана [16], [18], $\mathcal{S}_{\mu, \nu}(z)$ – вторая функция Ломмеля, понимаемая в смысле п. 10.73 монографии [20]. Число λ_{lk} есть k -й корень уравнения

$$J_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}a) N_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}b) = N_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}a) J_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}}b). \tag{12}$$

Формальные ряды (7) и (8) сходятся абсолютно и равномерно по теореме Гильберта–Шмидта [21], [22].

Замечание 1. Формула (11) отличается от соответствующего выражения в работе [6] в связи с исправлением замеченных в [6] опечаток.

Будет доказано, что для представления классического решения задачи (2)–(4) с указанным источником f (5) достаточно степенных функций радиальной переменной и присоединенных

функций Лежандра $P_{2l}^{(1)}(\cos \theta)$. Решение получается в виде однократных сумм, что существенно облегчает его исследование и практическое применение.

4. НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Заметим, что дифференциальный оператор рассматриваемых уравнений имеет вид:

$$L = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} L_\theta,$$

где

$$L_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

есть угловая часть оператора. Будем применять неполный метод Галеркина [23], [24], взяв в качестве координатных функций собственные векторы спектральной задачи для L_θ :

$$L_\theta y = \lambda y, \quad y(0) < \infty, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{13}$$

Собственные векторы и собственные значения данной задачи имеют вид:

$$y_l(\theta) = P_{2l}^{(1)}(\cos \theta), \quad \lambda_l = -2l(2l + 1), \quad l \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где

$$P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) = \sin \theta \frac{dP_{2l}(\cos \theta)}{d(\cos \theta)}$$

суть присоединенные функции Лежандра, $P_{2l}(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра [25]. Данная система функций ортогональна и полна в пространстве $\mathcal{L}_2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin \theta d\theta\right)$:

$$(y_m, y_n)_{\mathcal{L}_2} := \int_0^{\pi/2} P_{2m}^{(1)}(\cos \theta) P_{2n}^{(1)}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \delta_{m,n} \frac{2n(2n + 1)}{4n + 1}.$$

Полнота указанного набора собственных функций в $\mathcal{L}_2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin \theta d\theta\right)$ следует из полноты [16, с. 135] в пространстве $\mathcal{L}_2([0, \pi], \sin \theta d\theta)$ системы присоединенных функций Лежандра $\{P_m^{(1)}(\cos \theta)\}_{m=1}^\infty$, заданных на отрезке $[0, \pi]$.

Введем для коэффициента Фурье угловой части источника f по системе $\{y_l\}_{l=1}^\infty$ обозначение

$$m_l := \frac{\left(\frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta}, y_l\right)_{\mathcal{L}_2}}{(y_l, y_l)_{\mathcal{L}_2}} = \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{4l + 1}{2l(2l + 1)}. \tag{15}$$

Решение задачи (2)–(4) строится в виде рядов по собственным функциям задачи (13), с коэффициентами, зависящими от радиуса:

$$\omega = \sum_{n=1}^\infty R_n(r) P_{2n}^{(1)}(\cos \theta), \tag{16}$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{Y}_n(r) P_{2n}^{(1)}(\cos \theta). \tag{17}$$

Умножим уравнения (2) и (3) на $P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \sin \theta$, проинтегрируем по угловой переменной θ по отрезку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Применим интегрирование по частям, учитывая граничные условия. Коэффициенты разложения удовлетворяют следующим краевым задачам для уравнений Эйлера [26]:

$$r^2 R_l'' + 2r R_l' - 2l(2l + 1)R_l = r^{-2} m_l, \quad a < r < b; \quad R_l(a) = R_l(b) = 0, \quad (18)$$

$$r^2 \mathcal{Y}_l'' + 2r \mathcal{Y}_l' - 2l(2l + 1)\mathcal{Y}_l = -r^2 R_l, \quad a < r < b; \quad \mathcal{Y}_l(a) = \mathcal{Y}_l(b) = 0. \quad (19)$$

Функция Грина задачи Дирихле [26] для оператора Эйлера имеет вид:

$$G^l(r, s) = \frac{r^{-2l-1} s^{-2l-1}}{(4l + 1)(a^{4l+1} - b^{4l+1})} \begin{cases} (s^{4l+1} - a^{4l+1})(b^{4l+1} - r^{4l+1}), & a \leq s \leq r, \\ (b^{4l+1} - s^{4l+1})(r^{4l+1} - a^{4l+1}), & r \leq s \leq b. \end{cases}$$

С помощью функции Грина получаем выражения для коэффициентов разложения завихренности (R_l) и потенциала (\mathcal{Y}_l):

$$R_l(r) = \frac{m_l}{w_l} (X_l r^{2l} + Y_l r^{-(2l+1)} - r^{-2}); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_l(r) = & -\frac{m_l}{w_l} \left\{ \frac{X_l}{8l + 6} \left[\frac{b^{4l+3} - a^{4l+3}}{a^{4l+1} - b^{4l+1}} r^{2l} + \frac{a^{4l+3} b^{4l+1} - a^{4l+1} b^{4l+3}}{a^{4l+1} - b^{4l+1}} r^{-(2l+1)} + r^{2l+2} \right] + \right. \\ & + \frac{Y_l}{8l - 2} \left[\frac{a^2 - b^2}{a^{4l+1} - b^{4l+1}} r^{2l} + \frac{a^{4l+1} b^2 - a^2 b^{4l+1}}{a^{4l+1} - b^{4l+1}} r^{-(2l+1)} - r^{-2l+1} \right] - \\ & \left. - \frac{1}{4l^2 + 2l} \left[\frac{a^{2l+1} - b^{2l+1}}{a^{4l+1} - b^{4l+1}} r^{2l} + \frac{a^{4l+1} b^{2l+1} - a^{2l+1} b^{4l+1}}{a^{4l+1} - b^{4l+1}} r^{-(2l+1)} - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Величины, зависящие от номера гармоники и радиусов граничных сфер, обозначены как:

$$w_l := 2(l + 1)(2l - 1),$$

$$X_l := \frac{a^{2l-1} - b^{2l-1}}{a^{4l+1} - b^{4l+1}}, \quad Y_l := \frac{a^{4l+1} b^{2l-1} - a^{2l-1} b^{4l+1}}{a^{4l+1} - b^{4l+1}}.$$

Получены выражения для завихренности и векторного потенциала в виде однократных рядов по системе собственных функций (14). Коэффициенты разложения векторного потенциала сведены к 5 степенным функциям радиуса, а завихренности – 3-м степенным функциям. Результат не содержит собственных значений оператора Лапласа в полушаровом слое, цилиндрических и и других специальных функций.

Приведем явное выражение первой гармоники векторного потенциала для случая $a = \frac{1}{10}, b = 1$:

$$\mathcal{Y}_1(r) P_2^{(1)}(\cos \theta) = \frac{5}{2016} \left[\frac{11000r^{-3} - 1111111000r^2}{123454321} + \frac{30000r^4 - 7777r^{-1}}{11111} + 7 \right] \frac{3 \sin 2\theta}{2}.$$

Замечание 2. Коэффициент разложения векторного потенциала имеет вид:

$$\mathcal{Y}_l(r) = A_l r^{2l} + B_l r^{-(2l+1)} + C_l r^{2l+2} + D_l r^{-2l+1} + E_l. \quad (22)$$

Здесь степенные функции $r^{2l}, r^{-(2l+1)}, r^{2l+2}, r^{-2l+1}$ – элементы ядра квадрата радиального оператора Эйлера, E_l – частное решение неоднородного уравнения Эйлера четвертого порядка, получаемого из (18) и (19) исключением $R_l(r)$. Коэффициенты A_l, B_l, C_l, D_l в (22) можно определять из граничных условий на сферических частях границы. Это наблюдение дает возможность получать формальные решения краевых задач для системы уравнений (2), (3) с краевыми условиями произвольного рода на сферических частях границы полушарового слоя, если на плоской части границы имеется условие отсутствия касательных напря-

жений $\omega|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ (ср. [1], [8], [9]) в сочетании с условием непротекания $\Psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$. В частности, нетрудно обеспечить выполнение условий полного прилипания в виде $\Psi|_{r=a} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}|_{r=a} = \Psi|_{r=b} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}|_{r=b} = 0$.

5. СВЯЗЬ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ В ВИДЕ ДВОЙНОГО РЯДА

Для понимания соотношения между двумя представлениями решения полезно поставить на-чально-краевую задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} &= L\tilde{\omega} - f, \quad (r, \theta) \in \Omega, \quad t > 0; \\ \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} &= L\tilde{\Psi} + \tilde{\omega}, \quad (r, \theta) \in \Omega, \quad t > 0; \\ \tilde{\omega}|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \tilde{\Psi}|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0; \\ \tilde{\omega}|_{r=0} &= 0, \quad \tilde{\Psi}|_{t=0} = 0, \quad (r, \theta) \in \Omega. \end{aligned}$$

Ее решение с течением времени выходит на стационарный режим, удовлетворяющий задаче (2)–(4), см. [25]. Коэффициенты разложения стационарного режима по двумерным собственным функциям (выражения (7)–(12)) позволяют выписать решение:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(r, \theta, t) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_l f_{lk}}{\lambda_{lk}} (1 - \exp(-\lambda_{lk} t)) Z_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}} r) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta), \\ \tilde{\Psi}(r, \theta, t) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_l f_{lk} \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_{lk} t)}{\lambda_{lk}^2} - \frac{t \exp(-\lambda_{lk} t)}{\lambda_{lk}} \right) Z_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}} r) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta). \end{aligned}$$

В стационарном режиме внутренние суммы по k выражаются в конечном виде для каждого $l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_l f_{lk}}{\lambda_{lk}} Z_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}} r) &= \frac{m_l}{w_l} (X_l r^{2l} + Y_l r^{-(2l+1)} - r^{-2}), \\ \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_l f_{lk}}{\lambda_{lk}^2} Z_{2l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{lk}} r) &= A_l r^{2l} + B_l r^{-(2l+1)} + C_l r^{2l+2} + D_l r^{-2l+1} + E_l. \end{aligned}$$

Ряды сходятся абсолютно и равномерно, по теореме В.А. Стеклова [27, с. 343] для оператора сферических функций Бесселя с граничными условиями Дирихле.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И ОБОСНОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Обсудим две особенности постановки задачи (2)–(4). Во-первых, данная задача поставлена в области с кусочно-гладкой границей, имеющей угловые точки. Во-вторых, оператор L содержит коэффициент $\frac{1}{(r \sin \theta)^2}$, обращающийся в бесконечность на границе расчетной области, при $\theta = 0$. Поскольку задачу (2)–(4) можно свести к двум краевым задачам Дирихле для трехмерного скалярного уравнения Пуассона (тождество (6)), эти факты не влияют на справедливость дальнейших построений.

Докажем, что построенные ряды представляют классическое решение [16, с. 168], [25] поставленной задачи. Для этого достаточно доказать, что найденные функции непрерывны вплоть до границы области Ω и являются дважды дифференцируемыми в открытой области Ω . Эта цель будет достигнута, если доказать, что ряды (16) и (17) представляют слабые решения соответствующих уравнений, а затем воспользоваться леммой Вейля [17, с. 130, теорема 50], [28, с. 68, теорема IX.25].

Проведем подробные рассуждения для ряда (16), который является формальным решением уравнения (2) и удовлетворяет граничному условию в (4). Аналогичные рассуждения будут верны и для ряда (17).

Лемма 1. *Ряд (16) сходится абсолютно и равномерно на множестве $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.*

Доказательство. Трудность обоснования этого факта связана с отсутствием равномерной ограниченности использованных координатных функций. Имеет место оценка [29, Теорема 1]:

$$\|P_{2l}^{(1)}(\cos \theta)\|_{C[0, \frac{\pi}{2}]} \leq \|P_{2l}^{(1)}(\cos \theta)\|_{C[0, \pi]} \sim 2\bar{J}_1 l, \quad l \rightarrow \infty.$$

Здесь $\bar{J}_1 = \|J_1\|_{C(\mathbb{R})} \approx 0.5819$ – равномерная норма функции Бесселя $J_1(x)$, [29, Таблица 1]. Из соображений симметрии следует соотношение:

$$\|P_{2l}^{(1)}(\cos \theta)\|_{C[0, \frac{\pi}{2}]} \sim 2\bar{J}_1 l, \quad l \rightarrow \infty. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь радиальные сомножители $R_l(r)$. Преобразуем выражение (20), и применим формулу Стирлинга:

$$\begin{aligned} R_l(r) &= \frac{(-1)^l (2l)!(4l+1)}{2^{2l} (l!)^2 (16l^4 + 16l^3 - 4l^2 - 4l)} \left(\frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l-1}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{4l+1}} b^{-2} \left(\frac{r}{b}\right)^{2l} + \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+2}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{4l+1}} a^{-2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} - r^{-2} \right) = \\ &= O\left(l^{-\frac{7}{2}}\right), \quad a \leq r \leq b, \quad l \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{24}$$

Из (23) и (24) получаем

$$\forall (r, \theta) \in \bar{\Omega}: |R_l(r)P_{2l}^{(1)}(\cos \theta)| = O\left(l^{-\frac{5}{2}}\right), \quad l \rightarrow \infty. \tag{25}$$

Из оценки (25) следуют абсолютная и равномерная сходимость ряда (16) и непрерывность функции $\omega(r, \theta)$ на множестве $\bar{\Omega}$.

Лемма 2. *Функция $W := \omega \cos \phi$ удовлетворяет трехмерному уравнению Пуассона в смысле обобщенных функций из $D'(\Omega \times (0, 2\pi])$:*

$$\Delta W = f \cos \phi.$$

Доказательство. Поскольку $W \in C(\bar{\Omega} \times (0, 2\pi])$, то $W \in \mathcal{L}_{1,loc}(\Omega \times (0, 2\pi])$. Следовательно, W может рассматриваться как регулярная обобщенная функция из пространства $D'(\Omega \times (0, 2\pi])$. По определению [17, с. 40] нужно проверить выполнение интегрального тождества:

$$\forall \eta \in C_0^\infty(\Omega \times (0, 2\pi]): \int_{\Omega \times (0, 2\pi]} W \Delta \eta dV = \int_{\Omega \times (0, 2\pi]} \cos \phi f \eta dV,$$

где мера трехмерного объема имеет вид:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Имеет место цепочка равенств:

$$\int_{\Omega \times (0, 2\pi]} \left(\cos \phi \sum_{l=1}^\infty R_l(r) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \right) \Delta \eta dV = \tag{a}$$

$$= \sum_{l=1}^\infty \int_{\Omega \times (0, 2\pi]} \cos \phi R_l(r) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \Delta \eta dV = \tag{b}$$

$$= \sum_{l=1}^\infty \int_{\Omega \times (0, 2\pi]} \eta \Delta \left[\cos \phi R_l(r) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \right] dV = \tag{c}$$

$$= \sum_{l=1}^\infty \int_{\Omega \times (0, 2\pi]} \eta \cos \phi r^{-4} m_l P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) dV = \tag{d}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega \times (0, 2\pi]} \eta \cos \phi r^{-4} \sum_{l=1}^{\infty} m_l P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) dV = \\
 &= \int_{\Omega \times (0, 2\pi]} \eta \cos \phi f dV.
 \end{aligned}
 \tag{e}$$

Законность перестановки порядка суммирования и интегрирования в равенстве (a) обосновывается доказанной выше равномерной сходимостью ряда (16) (лемма 1). В равенстве (d) – сходимостью в смысле $\mathcal{L}_2 \left(\left[0, \frac{\pi}{2} \right], \sin \theta d\theta \right)$ ряда Фурье для угловой части неоднородности f по системе собственных функций спектральной задачи (13). Равенство (b) получается из формулы Грина. В равенстве (c) учтены тождество (6) и уравнение в (18). Равенство (e) имеет место, поскольку одномерный ряд Фурье для угловой части неоднородности f сходится сильно в $\mathcal{L}_2 \left(\left[0, \frac{\pi}{2} \right], \sin \theta d\theta \right)$, откуда легко получить слабую сходимость [30] подинтегрального выражения в пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega \times (0, 2\pi], dV)$.

Лемма 3. *Функция ω принадлежит классу гладкости $C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.*

Доказательство. Непрерывность на $\bar{\Omega}$ следует из леммы 1. Бесконечная дифференцируемость имеет место в силу гипоеллиптичности оператора Лапласа [17, с. 126], [28], бесконечной дифференцируемости функции $f \cos \phi$ в полушаровом слое $\Omega \times (0, 2\pi]$ и результата леммы 2. Действительно, гипоеллиптичность означает, что для слабого решения уравнения Пуассона верно (лемма Вейля [28, с. 68, теорема IX.25]):

$$W = \omega \cos \phi \in C^\infty(\Omega \times (0, 2\pi]),$$

где гладкость имеет место по совокупности переменных. Поскольку ω не зависит от ϕ , получаем искомый результат.

Теорема. *Ряды (16), (17) представляют классическое решение задачи (2)–(4).*

Доказательство. Доказанная в леммах 1–3 гладкость функции ω , заданной в виде ряда (16), позволяет провести соответствующие рассуждения для ряда (17). Оценка скорости убывания слагаемых ряда для векторного потенциала изменяется:

$$\forall (r, \theta) \in \bar{\Omega}: \left| \mathcal{Y}_l(r) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta) \right| = O\left(l^{-\frac{11}{2}} l \right) = O\left(l^{-\frac{9}{2}} \right), \quad l \rightarrow \infty. \tag{26}$$

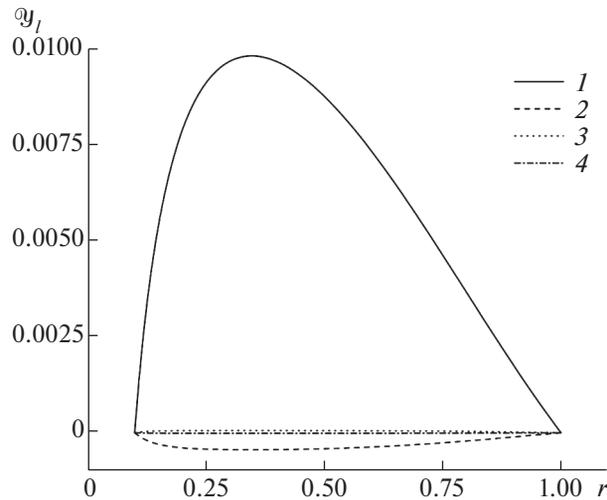
Оценка (26) может быть получена выкладкой, подобной (24). Также нетрудно видеть (формула (21)), что одно из слагаемых функции $\mathcal{Y}_l(r)$ убывает медленнее остальных, а именно, величина

$$E_l = \frac{m_l}{w_l} \frac{1}{4l^2 + 2l} = O\left(l^{-\frac{11}{2}} \right).$$

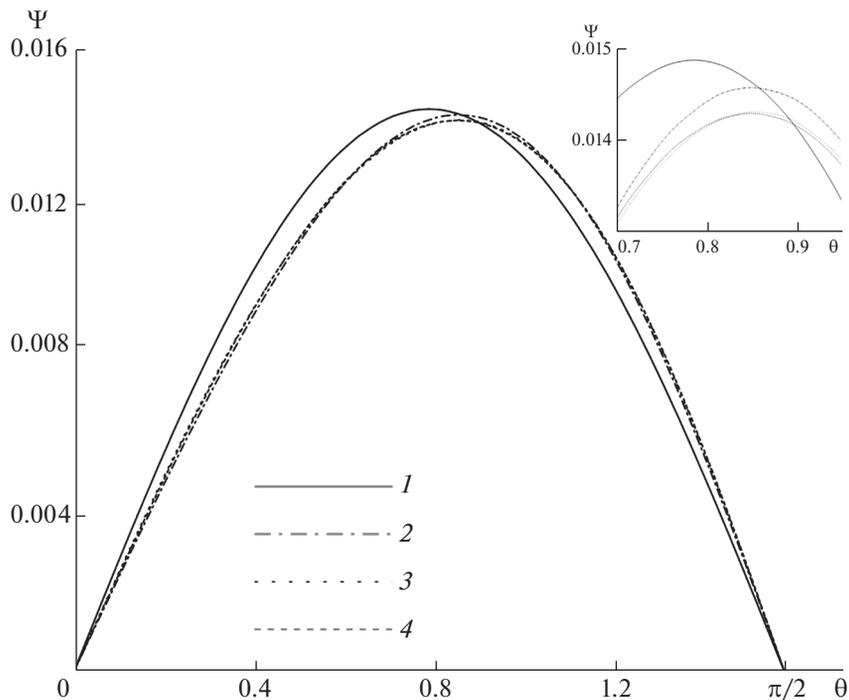
Учитывая (23), получаем (26). Тем самым ряды (16) и (17) удовлетворяют определению классического решения для задачи (2)–(4).

Ряд для векторного потенциала сходится быстрее, чем ряд для завихренности, что связано с двукратным применением функции Грина (“интегрирование ускоряет сходимость”). Ряды, слагаемые которых убывают быстрее, чем $O(l^{-4})$, в [23, с. 97] называют быстросходящимися. Высокая скорость сходимости ряда для векторного потенциала связана, помимо удачного выбора системы координатных функций, с тем, что фактически мы решали для векторного потенциала уравнение четвертого порядка. Подобная сходимость типична для задач данного класса – ср. [23, с. 27].

В заключение этого раздела приведем графики первых нескольких амплитуд $\mathcal{Y}_l(r)$ векторного потенциала, для наглядной демонстрации убывания слагаемых ряда (17). На фиг. 2 представлены графики для случая $a = 1/10, b = 1$. Несмотря на линейное возрастание равномерной нормы присоединенных функций Лежандра $P_{2l}^{(1)}(\cos \theta)$, см. [29], для практических целей можно ограничиться первыми несколькими слагаемыми ряда (17). Графики частичных сумм ряда (17) представлены на фиг. 3 и 4. Видно, что третья и четвертая частичные суммы совпадают с графической



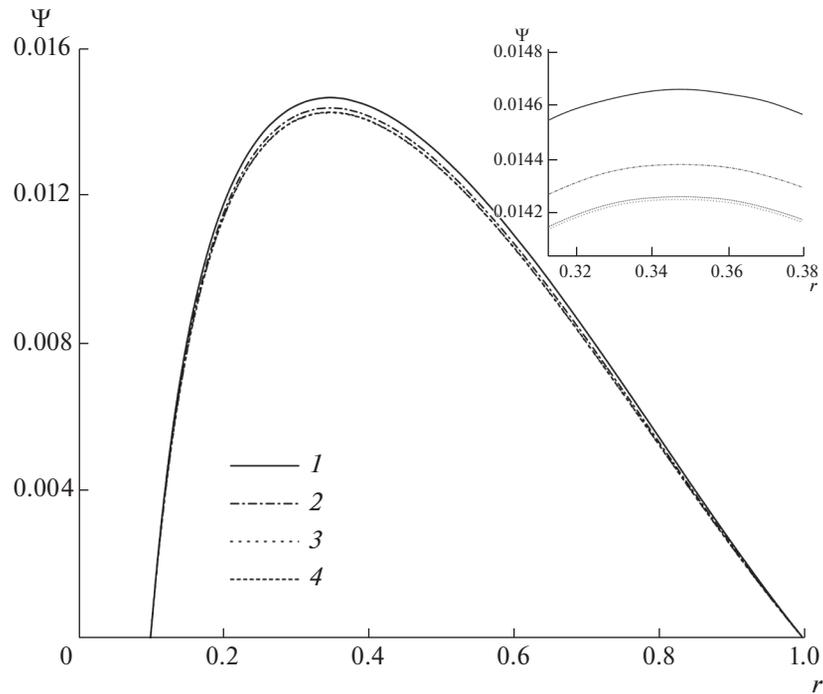
Фиг. 2. Амплитуды $Q_l(r)$ векторного потенциала для первых нескольких значений l . $l - l = 1; 2 - 2; 3 - 3; 4 - 4$.



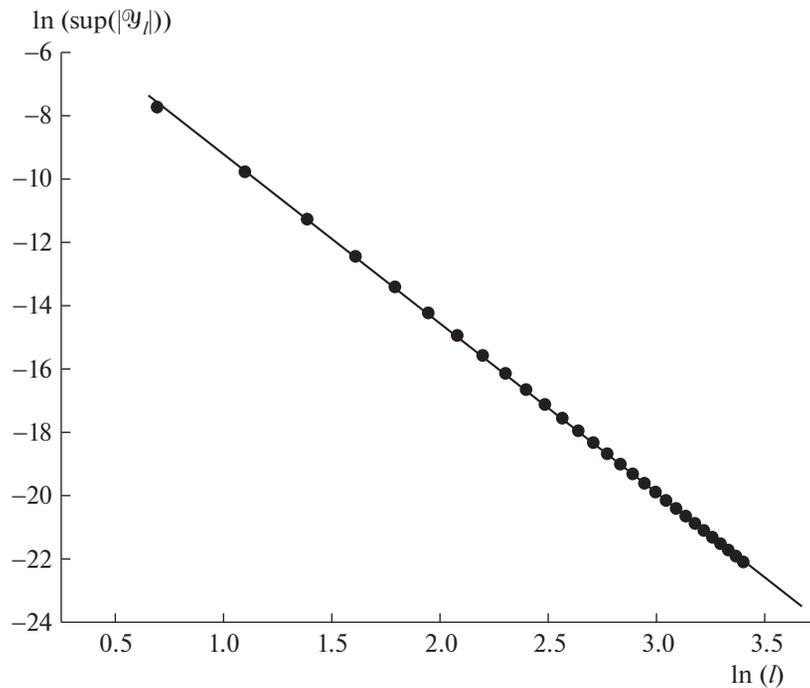
Фиг. 3. Зависимость частичных сумм векторного потенциала от угла для различного количества гармоник N при фиксированном значении радиуса, $r = 4/10$. $l - N = 1; 2 - 2; 3 - 3; 4 - 4$. Врезка – увеличенная область максимума.

точностью. Для теоретических оценок, не требующих точного рассмотрения, можно ограничиваться одним или двумя слагаемыми, в то же время при необходимости легко вычислить частичную сумму любого порядка, используя современные компьютерные средства.

Оценка убывания коэффициентов разложения векторного потенциала была проверена с помощью построения графиков функций $Q_l(r)$ и визуального определения положения максимума. Зависимость логарифма максимума модуля функции $Q_l(r)$ от логарифма номера l для $l = 2; 40$ представлена на фиг. 5. Зависимость может быть аппроксимирована функцией вида $Y = A + BX$, где $A \approx -3.87$; $B \approx -5.35$. Результат обработки графиков $Q_l(r)$ позволяет сделать вывод,



Фиг. 4. Зависимость частичных сумм векторного потенциала от радиуса для различного количества гармоник N при фиксированном значении угла, $\theta = \pi/4$. 1 – $N = 1$; 2 – 2; 3 – 3; 4 – 4. Врезка – увеличенная область максимума.



Фиг. 5. Убывание равномерной нормы амплитуд векторного потенциала в логарифмическом масштабе, $l = \overline{2, 40}$.

что оценка (26) вполне годится для практических целей, а ее возможное уточнение нецелесообразно. Отличие показателя степенного убывания равномерной нормы $\mathcal{Y}_l(r)$ от найденного $O(l^{-5.5})$ объясняется тем, что данная оценка асимптотическая и может не выполняться для конкретных, не слишком больших значений l .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для задачи об электровихревом течении в полусферическом сосуде дано представление решения в виде быстросходящихся однократных рядов. Двойные ряды по цилиндрическим функциям, содержащие собственные значения полусферического слоя и гипергеометрические функции, сведены к одномерным, состоящим из элементарных слагаемых. Для одномерных рядов получены оценки сходимости в равномерной норме. Вывод этих оценок потребовал применения результатов об асимптотике равномерной нормы присоединенных функций Лежандра, полученных сравнительно недавно в работе [29]. На основании леммы Вейля обоснована гладкость функций, представляемых найденными рядами.

Обобщая проделанные выкладки, можно получать формальные решения краевых задач о течениях в полусферическом слое с произвольными граничными условиями на сферических частях границы, если только на свободной поверхности соблюдается условие отсутствия касательных напряжений. Источник f также может быть любым.

Предполагается применение полученных результатов в целях уточнения границ применимости линейного приближения в задачах об электровихревом течении в полусферическом сосуде путем сравнения с численными расчетами соответствующих нелинейных краевых задач.

Авторы благодарят А.Н. Боголюбова, А.А. Быкова и А.В. Бадьина за ценные обсуждения настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И. и др. Электровихревые течения / Под ред. Щербинина Э.В. Рига: Зинатне, 1985.
2. Компан Я.Ю., Щербинин Э.В. Электрошлаковые сварка и плавка с управляемыми МГД-процессами. М.: Машиностр., 1989, 272 с.
3. Ячиков И.М., Карандаева О.И., Ларина Т.П. Моделирование электровихревых течений в ванне дуговой печи постоянного тока. Магнитогорск, 2008.
4. Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Игумнов В.С., Оксман А.А. Экспериментальное исследование электровихревых течений в полусферическом объеме // ТВТ. 1995. Т. 33. № 1. С. 3–6.
5. Herreman W., Bénard S., Nore C., Personnetaz P., Cappanera L., Guermont J.-L. Solutal buoyancy and electrovortex flow in liquid metal batteries // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5. 074501.
6. Михайлов Е.А., Тепляков И.О. Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоковом приближении // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 2. С. 39–44.
7. Виноградов Д.А., Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О. Влияние магнитного поля Земли на структуру электровихревого течения // Докл. АН. 2018. Т. 483. № 1. С. 24–27.
8. Sozou C., Pickering W.M. Magnetohydrodynamic flow due to the discharge of an electric current in a hemispherical container // J. Fluid Mech. 1976. V. 73. Part 4. P. 641–650.
9. Sozou C., Pickering W.M. Magnetohydrodynamic flow in a container due to the discharge of an electric current from a finite size electrode // Proc. R. Soc. Lond. A. 1978. V. 362. P. 509–523.
10. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
11. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049–1070.
12. Chernous'ko F.L. Motion of a body with a cavity filled with a viscous fluid at large Reynolds numbers // J. Appl. Math. Mech. 1966. V. 30. № 3. P. 568–589.
13. Сакс Р.С. Задача Коши для уравнений Навье–Стокса, метод Фурье // Уфимск. матем. ж. 2011. Т. 3. № 1. С. 53–79.
14. Сакс Р.С. Глобальные решения уравнений Навье–Стокса в равномерно вращающемся пространстве // ТМФ. 2010. Т. 162. № 2. С. 196–215.
15. Пухначев В. В. Задача Дирихле для уравнения Стокса // Матем. заметки. 2017. Т. 101. Вып. 1. С. 110–115.
16. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Наука, 2004.
17. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Бином, 2007.
18. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.
19. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
20. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
21. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. Гостехтеориздат, 1933.

22. Ильин В.А. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа // Успехи. матем. наук. 1958. 13:1(79). С. 87–180.
23. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматлит, 1962. 708 с.
24. Свешников А.Г. Неполный метод Галеркина // Докл. АН СССР. 1977. 236:5. С. 1076–1079.
25. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1999.
26. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.
27. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
28. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Само-сопряженность. М.: Изд-во Мир, 1978.
29. Холишевников К.В., Шайдулин В.Ш. Асимптотика равномерной нормы присоединенных функций Ле-жандра P_n^k (случай $k \ll n$) // Вестн. Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2009. № 2. С. 86–93.
30. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.