

ДИСКРЕТНО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ

© 2022 г. Н. Я. Моисеев^{1,*}, В. М. Шмаков^{1,**}

¹ 456770 Снежинск, Челябинская обл., а/я 245, ул. Васильева, 13, ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ
им. академ. Е.И. Забабахина, Россия

*e-mail: nik.moiseev.43@mail.ru

**e-mail: v.m.shmakov@vniitf.ru

Поступила в редакцию 11.03.2021 г.
Переработанный вариант 31.08.2021 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Представлена дискретно-аналитическая разностная схема для решения нестационарного кинетического уравнения переноса частиц (нейтронов) в многогрупповом изотропном приближении методом расщепления. Особенность разностной схемы состоит в том, что решение уравнения переноса в многогрупповой модели сведено к решениям уравнений в одногрупповой модели. Эффективность схемы достигнута за счет вычисления интеграла столкновений из аналитических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, которые описывают эволюцию нейтронов, пришедших в группу g из всех групп g' . Решения уравнений находятся без итераций по интегралу столкновений и без обращения матриц. Метод решения естественным образом обобщается на решение задач в многомерных пространствах и позволяет осуществить счет в параллельном режиме. Библ. 18. Фиг. 2.

Ключевые слова: кинетическое уравнение переноса нейтронов, интеграл столкновений, метод расщепления, аналитические решения.

DOI: 10.31857/S0044466922070079

1. ВВЕДЕНИЕ

Кинетическое уравнение переноса частиц (в частности, нейтронов) является интегро-дифференциальным уравнением “жесткого” типа. В общем случае правая часть уравнения содержит интеграл столкновений от искомой (неизвестной) функции. Одним из подходов к решению таких уравнений является подход, в котором решения находятся с применением методов дискретных ординат S_n , D_{sn} (см. [1], [2]) по неявным разностным схемам итерациями по интегралу столкновений (см. [3]–[5]). Явные численные методы требуют неприемлемых для реальных расчетов ограничений на выбор шага интегрирования по времени. Основные трудности, которые возникают при решении уравнений итерационными методами по неявным схемам, связаны с точностью численных решений и медленной сходимостью итераций. Если систему уравнений решать методами Фотрие (см. [6]) или Райбики (см. [7]), то приходится иметь дело с решением систем линейных алгебраических уравнений с полными матрицами взаимодействия между группами (см. [8]). Как следствие, в случае решения реальных задач требуются большие объемы оперативной памяти и большие временные затраты.

В [9]–[11] описаны подходы к решению уравнения переноса частиц методом расщепления по физическим процессам. Метод расщепления позволяет вычислять интеграл столкновений в случае отсутствия взаимодействия между группами из разностных уравнений без итераций. Однако, если есть взаимодействие между группами, то решения находятся итерациями по интегралу столкновений. Например, в [11] интеграл столкновений вычисляется из решения системы линейных алгебраических уравнений итерациями. Поэтому проблема эффективного решения нестационарного кинетического уравнения переноса нейтронов остается актуальной.

Здесь представлена дискретно-аналитическая разностная схема (ДАРС) для решения интегро-дифференциального уравнения переноса нейтронов в многогрупповом изотропном при-

ближении на основе модифицированного метода расщепления (см. [11]). Особенность разностной схемы состоит в том, что решение уравнения переноса в многогрупповом приближении сводится к решениям уравнений в одnogрупповом приближении в каждой группе. Интеграл столкновений вычисляется из аналитических решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые описывают эволюцию нейтронов, пришедших в группу g из всех групп g' .

Представлены результаты расчетов модельной задачи из работы [12]. Задача имеет точные решения. Показано, что результаты расчетов по методике ДАРС удовлетворительно согласуются с точными решениями и с результатами расчетов по одномерному аналогу методики из [13]. Время решения модельной задачи по методике ДАРС по сравнению со временем решения по одномерному аналогу методики из [13] сократилось в 1.8 раза.

2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

2.1. Постановка задачи

Особенности подхода к численному решению нестационарного кинетического уравнения переноса нейтронов рассмотрим на примерах решения задач в многогрупповом изотропном приближении для плоской геометрии с одной пространственной переменной. В этом случае система уравнений переноса нейтронов записывается в виде

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial N_g}{\partial t} + \mu \frac{\partial N_g}{\partial x} + \alpha_g N_g = 0.5 \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g} S_{g'} + 0.5 f_g, \quad (1)$$

$$S_g = \int_{-1}^1 N_g(\mu) d\mu.$$

Здесь t, x – независимые переменные по времени и по пространству, μ – косинус угла между направлением полета нейтрона и осью x , $-1 \leq \mu \leq 1$, g – индекс группы, $g = 1, 2, \dots, G$, G – число энергетических групп, v_g – модуль вектора скорости нейтронов группы g , $N_g(t, x, \mu)$ – плотность потока нейтронов, $S_g(t, x)$ – полный поток нейтронов, α_g – коэффициент поглощения нейтронов группы g , $\beta_{g',g}$ – коэффициент размножения нейтронов с учетом переходов нейтронов между группами g и g' , f_g – независимый источник нейтронов. Разностная сетка по переменной μ с центрами $\mu_m = 0.5(\mu_{m+1/2} + \mu_{m-1/2})$ и шагами $\Delta\mu = \mu_{m+1/2} - \mu_{m-1/2} = 2/M$, $m = 1, \dots, M$, включает M направлений движения частиц. Решается смешанная краевая задача с начальными и граничными условиями в области $D = \{x_L \leq x \leq x_R, -1 \leq \mu \leq 1\}$. Начальные условия: $N_g(0, x, \mu) = N_g^0(x, \mu)$. Граничные условия: на левой границе – $N_g(t, x_L, \mu) = \varphi_L(t, x_L, \mu)$ для $\mu > 0$, на правой – $N_g(t, x_R, \mu) = \varphi_R(t, x_R, \mu)$ для $\mu < 0$, где $\varphi_L(t, x_L, \mu)$, $\varphi_R(t, x_R, \mu)$ – известные функции. Предполагаем, что плотность вещества $\rho = 1$. Требуется найти решение системы уравнений (1) для $t > 0$.

2.2. Полуявная разностная схема

В пространстве (t, x) построим разностную сетку с шагами интегрирования τ, h_j вдоль координатных линий t, x соответственно. Границы ячеек разностной сетки с центрами в точках x_j обозначим как $x_{j-1/2}, x_{j+1/2}$, где j – индекс ячейки. Введем обозначения: $N_{g,j}^{n+1}, N_{g,j}^n$ – плотности потока нейтронов, $S_{g,j}^{n+1}, S_{g,j}^n$ – полные потоки нейтронов, $\alpha_{g,j}^{n+1}, \alpha_{g,j}^n$ – коэффициенты поглощения, $\beta_{g',g,j}^{n+1}, \beta_{g',g,j}^n$ – коэффициенты размножения нейтронов, $f_{g,j}^{n+1}, f_{g,j}^n$ – источники. Величины с индексами $n+1, n$ – это основные величины, которые относятся к центрам ячеек в моменты времени $t^{n+1} = t^n + \tau$ и t^n соответственно. Величины с дробными индексами $N_{g,j+1/2}, N_{g,j-1/2}$, которые будем называть “большими”, как в схемах С.К. Годунова (см. [14]), относятся к граням ячеек и являются вспомогательными. В дальнейшем индекс j у величин в центрах ячеек опущен.

Заменив интеграл в (1) квадратурной формулой, проинтегрировав первое уравнение в (1) по ячейке фазового пространства (t, x) на интервале по времени $[t^n, t^{n+1}]$ и применив теорему Гаусса–Остроградского, получим систему разностных уравнений, которые запишем в виде

$$N_g^{n+1} = \left\{ N_g^n - \frac{v_g \tau \mu}{h} (N_{g,j+1/2} - N_{g,j-1/2}) \right\} + v_g \tau \left[-\alpha_g^* N_g^* + 0.5 \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g}^* S_{g'}^* + 0.5 f_g^* \right], \quad (2)$$

$$S_g^{n+1} = \sum_{m=1}^M N_{g,m}^{n+1} \Delta \mu.$$

Здесь величины α_g^* , $\beta_{g',g}^*$, f_g^* , N_g^* , S_g^* – это средние значения функций на интервале t^n, t^{n+1} , которые вычислены в момент времени $t^n + \tau^*$, где $0 \leq \tau^* \leq \tau$. Введем вспомогательные потоки нейтронов $N_g^{n+1/2}$, которые вычисляются из выражения в фигурных скобках в (2) по разностным уравнениям

$$N_g^{n+1/2} = N_g^n - \frac{v_g \tau \mu}{h_j} (N_{g,j+1/2} - N_{g,j-1/2}). \quad (3)$$

Заменив выражение в фигурных скобках на вспомогательный поток $N_g^{n+1/2}$ в первом уравнении в (2) и подставив выражение для N_g^{n+1} в квадратурную формулу для S_g^{n+1} в (2), получим для вычисления основных величин N_g^{n+1} , S_g^{n+1} эквивалентную систему разностных уравнений в виде

$$\frac{N_g^{n+1} - N_g^{n+1/2}}{v_g \tau} + \alpha_g^* N_g^* = 0.5 \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g}^* S_{g'}^* + 0.5 f_g^*, \quad (4)$$

$$\frac{S_g^{n+1} - S_g^{n+1/2}}{v_g \tau} + \alpha_g^* S_g^* = \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g}^* S_{g'}^* + f_g^*.$$

Вычтем первое уравнение в (4) из второго, умноженного на 0.5, получим для вычисления потоков нейтронов N_g^{n+1} дополнительное эквивалентное уравнение

$$\frac{(0.5 S_g^{n+1} - N_g^{n+1}) - (0.5 S_g^{n+1/2} - N_g^{n+1/2})}{v_g \tau} = -\alpha_g^* (0.5 S_g^* - N_g^*),$$

в котором полные потоки S_g^{n+1} находятся из второго уравнения в (4). Дополнительное уравнение можно использовать, например, для контроля, либо как основное уравнение для вычисления потока нейтронов N_g^{n+1} .

Особенность системы уравнений (4) в том, что полный поток нейтронов S_g^{n+1} вычисляется из разностного уравнения, а не по квадратурной формуле из (2). Уравнение (3) можно интерпретировать как разностное уравнение, описывающее перенос нейтронов по пространству в вакууме, уравнения (4) – взаимодействие нейтронов с веществом. Если “большие” величины $N_{g,j+1/2}$, $N_{g,j-1/2}$ вычислять по величинам с нижнего временного слоя t^n или с верхнего t^{n+1} , то разностная схема (3) будет явной или неявной соответственно. В обоих случаях разностное уравнение (3) аппроксимирует дифференциальное уравнение переноса нейтронов по пространству в вакууме:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial N_g}{\partial t} + \mu \frac{\partial N_g}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем предполагаем, что вспомогательные потоки $N_g^{n+1/2}$ находятся по известной разностной схеме повышенной точности, которая аппроксимирует уравнение (5), например, по схемам из [15] или [16]. Предполагая, что вопрос с выбором разностной схемы (3) решен, сосредоточим внимание на подходах к решению уравнений (4).

Если потоки N_g^* и S_g^* относятся к верхнему временному слою, т.е. $N_g^* = N_g^{n+1}$ и $S_g^* = S_g^{n+1}$, то разностная схема (4) будет неявной схемой Эйлера первого порядка по времени с погрешностью аппроксимации $O(\tau)$. В случае однопрупповой модели решение по неявной разностной схеме (4), в том числе и по дополнительному уравнению, не вызывает затруднений и находится без итераций по интегралу столкновений.

Если вспомогательные потоки нейтронов $N_g^{n+1/2}$ вычисляются по явной разностной схеме (3), а величины N_g^* , S_g^* относятся к верхнему временному слою t^{n+1} , то схему (4) будем называть *полуявной разностной схемой*.

Первые дифференциальные приближения (см. [17]) разностных уравнений в (4) выпишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{dN_g}{dt} + \alpha_g N_g &= 0.5 \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g} S_{g'} + 0.5 f_g + (\tau^* - 0.5\tau) \frac{dF_1}{dt}, \\ \frac{1}{v_g} \frac{dS_g}{dt} + \alpha_g S_g &= \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g} S_{g'} + f_g + (\tau^* - 0.5\tau) \frac{dF_2}{dt}, \\ F_1 &= 0.5 \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g} S_{g'} + 0.5 f_g - \alpha_g N_g, \quad F_2 = \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g} S_{g'} + f_g - \alpha_g S_g. \end{aligned} \quad (6)$$

Из первых дифференциальных приближений (6) следует, что система разностных уравнений (4) с постоянными коэффициентами α_g^* , $\beta_{g',g}^*$, f_g^* аппроксимирует систему ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{dN_g}{dt} + \alpha_g N_g &= 0.5 \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g} S_{g'} + 0.5 f_g, \\ \frac{1}{v_g} \frac{dS_g}{dt} + \alpha_g S_g &= \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g} S_{g'} + f_g \end{aligned} \quad (7)$$

с первым порядком по времени. Начальные данные для ОДУ (7) – это решения уравнения (5). Очевидно, что дополнительное уравнение аппроксимирует ОДУ

$$\frac{1}{v_g} \frac{d \ln(0.5 S_g - N_g)}{dt} = -\alpha_g,$$

решение которого выписывается в квадратурах явно. Поэтому оно может быть полезным, например, для контроля точности.

2.3. Подход к вычислению интеграла столкновений

Рассмотрим подход к вычислению интеграла столкновений, основанный на анализе выражения

$$\sum_{g'=1}^G \beta_{g',g} S_{g'}$$

как источника нейтронов, которые появились в группе g из всех групп g' с плотностью потока $\bar{N}_{g'}$. Интеграл столкновений в правой части ОДУ (7) представим в виде

$$\sum_{g'=1}^G \beta_{g',g} S_{g'}(t, x) = B_g \sum_{g'=1}^G \bar{\beta}_{g',g} S_{g'}(t, x) = B_g \bar{S}_g(t, x),$$

где введены следующие обозначения:

$$B_g = \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g}, \quad \bar{\beta}_{g',g} = \frac{\beta_{g',g}}{B_g}, \quad \sum_{g'=1}^G \bar{\beta}_{g',g} = 1, \quad \bar{S}_g(t, x) = \sum_{g'=1}^G \bar{\beta}_{g',g} S_{g'}(t, x).$$

Выполнив преобразования

$$\bar{S}_g = \sum_{g'=1}^G \bar{\beta}_{g',g} S_{g'} = \sum_{g'=1}^G \sum_{m=1}^M \bar{\beta}_{g',g} N_{g',m} \Delta\mu = \sum_{m=1}^M \sum_{g'=1}^G \bar{\beta}_{g',g} N_{g',m} \Delta\mu = \sum_{m=1}^M \bar{N}_{g,m} \Delta\mu,$$

получим для плотности потока нейтронов \bar{N}_g и полного потока \bar{S}_g выражения в виде

$$\bar{N}_g = \sum_{g'=1}^G \bar{\beta}_{g',g} N_{g'}, \quad \bar{S}_g = \sum_{m=1}^M \bar{N}_{g,m} \Delta\mu. \quad (8)$$

Система ОДУ (7) с введенными обозначениями записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{dN_g}{dt} + \alpha_g N_g &= 0.5 B_g \bar{S}_g + 0.5 f_g, \\ \frac{1}{v_g} \frac{dS_g}{dt} + \alpha_g S_g &= B_g \bar{S}_g + f_g \end{aligned} \quad (9)$$

с начальными данными $N_g(0, x, \mu) = N_g^{n+1/2}(t^{n+1}, x, \mu)$, $S_g(0, x) = S_g^{n+1/2}(t^{n+1}, x)$.

Если полный поток \bar{S}_g известен, то решение системы уравнений (9) не вызывает затруднений. В этом случае систему уравнений (9) можно рассматривать как одногрупповую модель для описания эволюции нейтронов N_g . Коэффициент B_g — это суммарный коэффициент размножения нейтронов группы g . Квадратурную формулу (8) для потока \bar{S}_g можно рассматривать как аппроксимацию соответствующего интеграла в системе уравнений (1) для потока нейтронов \bar{N}_g . Следовательно, поток \bar{S}_g есть полный поток нейтронов \bar{N}_g . Поскольку нейтроны \bar{N}_g принадлежат группе g , то эволюция этих нейтронов должна описываться так же, как и нейтронов N_g этой группы, а именно, уравнениями (9). Поэтому плотность потока нейтронов \bar{N}_g и полный поток \bar{S}_g должны удовлетворять уравнениям (9), которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{d\bar{N}_g}{dt} + \alpha_g \bar{N}_g &= 0.5 B_g \bar{S}_g + 0.5 f_g, \\ \frac{1}{v_g} \frac{d\bar{S}_g}{dt} &= -(\alpha_g - B_g) \bar{S}_g + f_g \end{aligned} \quad (10)$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} \bar{N}_g(0, x, \mu) &= \bar{N}_g^n = \sum_{g'=1}^G \bar{\beta}_{g',g} N_{g'}^{n+1/2}(t^{n+1}, x, \mu), \\ \bar{S}_g(0, x) &= \bar{S}_g^n = \sum_{g'=1}^G \bar{\beta}_{g',g} S_{g'}^{n+1/2}(t^{n+1}, x). \end{aligned}$$

Система уравнений (10) — это аналог одногрупповой системы уравнений для потока нейтронов \bar{N}_g . Для вычисления полного потока \bar{S}_g достаточно выписать решение второго уравнения в (10). Уравнение для полного потока \bar{S}_g в (10) линейное и интегрируется в квадратурах. Поэтому решение системы уравнений (10) не вызывает каких-либо затруднений. Если коэффициенты постоянные, то полный поток \bar{S}_g вычисляется из аналитического решения по формулам

$$\begin{aligned} \bar{S}_g^{n+1} &= \begin{cases} \gamma_3 \bar{S}_g^n + (1 - \gamma_3) \frac{1}{\alpha_g - B_g} f_g, & \alpha_g \neq B_g, \\ \bar{S}_g^n + v_g \tau f_g, & \alpha_g = B_g, \end{cases} \\ \gamma_3 &= \exp(-v_g \tau (\alpha_g - B_g)). \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно, интеграл столкновений также вычисляется аналитически. Если данный подход к вычислению интеграла столкновений применить к разностным уравнениям (4), то систему разностных уравнений (4) запишем в виде

$$\frac{N_g^{n+1} - N_g^{n+1/2}}{v_g \tau} + \alpha_g^* N_g^* = 0.5 B_g^* \bar{S}_g^* + 0.5 f_g^*,$$

$$\frac{S_g^{n+1} - S_g^{n+1/2}}{v_g \tau} + \alpha_g^* S_g^* = B_g^* \bar{S}_g^* + f_g^*.$$

Здесь

$$B_g^* = \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g}^*, \quad \bar{\beta}_{g',g}^* = \frac{\beta_{g',g}^*}{B_g^*}, \quad \bar{S}_g^* = \sum_{g'=1}^G \bar{\beta}_{g',g}^* S_{g'}^*.$$

Уравнение для вычисления полного потока \bar{S}_g^* запишем в виде

$$\frac{\bar{S}_g^{n+1} - \bar{S}_g^{n+1/2}}{v_g \tau} = -(\alpha_g^* - B_g^*) \bar{S}_g^* + f_g^*.$$

Следовательно, если величины $N_g^* = N_g^{n+1}$ и $S_g^* = S_g^{n+1}$, $\bar{S}_g^* = \bar{S}_g^{n+1}$, то решение преобразованной неявной системы уравнений (4) не вызывает каких-либо затруднений, находится без итераций по интегралу столкновений и без обращения матриц.

2.4. Дискретно-аналитическая разностная схема

Рассмотрим подход к построению разностной схемы ДАРС, в которой для вычисления основных величин N_g^{n+1} , S_g^{n+1} используются аналитические решения ОДУ (9), (11) вместо разностных уравнений (4). Подставив выражение для \bar{S}_g из уравнения (11) в уравнения (9), получим для вычисления потока нейтронов N_g и полного потока S_g линейную систему ОДУ:

$$\frac{1}{v_g} \frac{dN_g}{dt} + \alpha_g N_g = 0.5 B_g \gamma_3 \bar{S}_g^n + 0.5 \left(1 + \frac{1 - \gamma_3}{\alpha_g - B_g} B_g \right) f_g,$$

$$\frac{1}{v_g} \frac{dS_g}{dt} + \alpha_g S_g = B_g \gamma_3 \bar{S}_g^n + \left(1 + \frac{1 - \gamma_3}{\alpha_g - B_g} B_g \right) f_g. \quad (12)$$

Поскольку при построении разностных схем предполагается, что коэффициенты поглощения, размножения и функция источника постоянны на интервале интегрирования по времени $[t^n, t^{n+1}]$, а разностные уравнения (4) аппроксимируют ОДУ (7), то аналитические решения ОДУ (7) могут быть взяты как численные решения уравнений (1) вместо решений по разностной схеме (4). Аналитические решения ОДУ (7) сводятся к решениям ОДУ (12) и записываются в виде

$$N_g^{n+1} = \gamma_2 N_g^{n+1/2} + 0.5(\gamma_3 - \gamma_2) \bar{S}_g^n + 0.5 \frac{1 - \gamma_3}{\alpha_g - B_g} f_g,$$

$$S_g^{n+1} = \gamma_2 S_g^{n+1/2} + (\gamma_3 - \gamma_2) \bar{S}_g^n + \frac{1 - \gamma_3}{\alpha_g - B_g} f_g, \quad (13)$$

$$\bar{S}_g^n = \sum_{g'=1}^G \bar{\beta}_{g',g}^n S_{g'}^{n+1/2}, \quad \gamma_2 = \exp(-v_g \tau \alpha_g).$$

Разностная схема (13) — это схема с положительными коэффициентами. Поэтому решения всегда положительные и нет ограничения на выбор шага интегрирования по времени. Однако этот плюс может стать минусом в ситуациях, когда шаг интегрирования по времени большой, а искомые функции и коэффициенты имеют большой градиент. В таком случае усреднение величин

будет “грубым” на интервале интегрирования по времени $[t^n, t^{n+1}]$, а погрешность решения – большой. Поэтому ограничения на выбор шага интегрирования по времени могут быть связаны с требованиями к точности численных решений. Простейший подход к устранению таких ситуаций – это уменьшение шага интегрирования по времени, что приводит к увеличению времени счета. Второй подход – это построение схемы предиктор–корректор повышенной точности типа Рунге–Кутты. В этом случае коэффициенты и полный поток \bar{S}_g предварительно рассчитываются на этапе предиктор в момент времени $t^* = t^n + \tau^*$, $\tau^* \geq 0.5\tau$. Основные величины рассчитываются на этапе корректор в момент времени t^{n+1} . Если $\tau^* = 0.5\tau$, то погрешность аппроксимации будет порядка $O(\tau^2)$. Если на этапе предиктор применить двухточечную формулу Гаусса (см. [18]), то получим разностную схему с погрешностью аппроксимации порядка $O(\tau^3)$.

Третий кардинальный подход – это вычисление основных величин с контролем точности в каждой точке по критерию точности, либо проведение двух расчетов с шагами интегрирования τ и 0.5τ и сравнение результатов расчетов. Если результаты не удовлетворяют заданной точности, то шаг интегрирования уменьшается в два раза, и расчет в точке повторяется. Если результаты удовлетворяют заданной точности, то в качестве решения принимается последний результат. Такая технология счета является стандартной для решения ОДУ, обеспечивает гарантированную точность и эффективность расчетов (см. [18]).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Работоспособность методики ДАРС проверялась сравнением результатов расчетов с результатами расчетов по одномерному аналогу методики из [13] и с точными решениями задачи из [12]. Одномерный аналог методики [13] назовем методикой ГРАНАТ.

Задача. Дана сферически-симметричная область $|r| \leq 1$. В начальный момент времени задано распределение нейтронов, которое рассчитывается по формуле

$$N_g = N_{0,g} (1 + \mu r), \quad N_{0,g} = 1, \quad g = 1, 2, 3, 4.$$

Источники $f_g = 0$. Скорости в группах: $v_1 = 10, v_2 = 5, v_3 = 2, v_4 = 1$. Коэффициенты поглощения в группах: $\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = 0.5, \alpha_4 = 1$. На правой границе $r = 1$ задан поток нейтронов $N = (1 + \mu) \exp(-t)$. Задана матрица коэффициентов $\beta_{g',g}$:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.08 & 0.07 & 0.05 \\ 0.1 & 0.7 & 0.12 & 0.08 \\ 0.08 & 0.15 & 0.6 & 0.17 \\ 0.05 & 0.15 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Решения с матрицей M_4 соответствуют общему случаю, когда все группы взаимодействуют между собой. Точное решение для потока нейтронов N_g записывается в виде (см. [13])

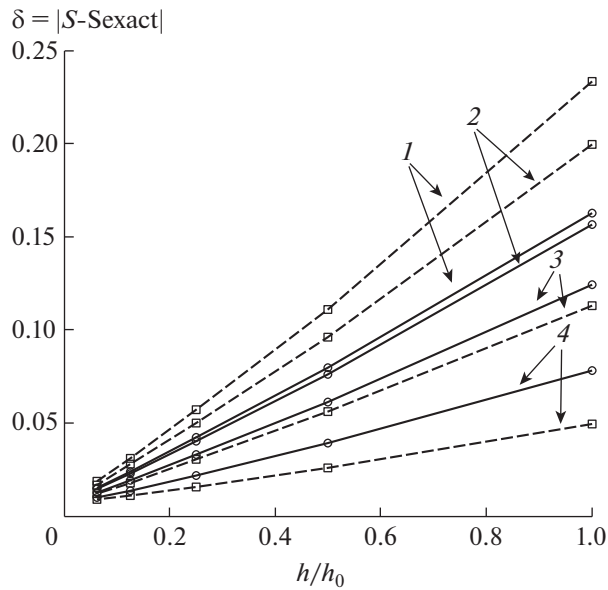
$$N_g = N_{0,g} (1 + \mu r) \exp(-\lambda t), \quad \lambda = \alpha_g v_g,$$

для полного потока нейтронов – $S = 2N_0 \exp(-\lambda t)$. Константы α_g, v_g подобраны так, что $\lambda = 1$. Поэтому решения в группах совпадают. Требуется рассчитать полные потоки в момент времени $t = 1$.

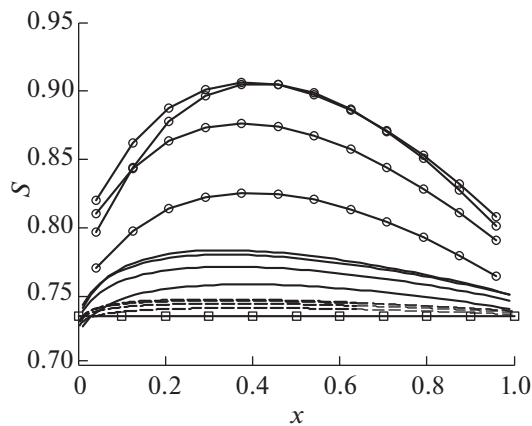
Задачи считались на последовательности сгущающихся разностных сеток с числом интервалов по пространству и по углам $12 \times 12, 25 \times 25, 50 \times 50, 100 \times 100, 200 \times 200$ с шагами интегрирования по времени 0.002, 0.001, 0.0005, 0.00025, 0.000125 соответственно.

На фиг. 1 представлены зависимости от шагов интегрирования по пространству погрешностей аппроксимации по четырем группам, которые получены в расчетах на сходимость по методикам ДАРС и ГРАНАТ в момент времени $t = 1$.

На фиг. 2 представлены распределения полных потоков в области по четырем группам в расчетах по методике ДАРС на трех различных разностных сетках по пространству и по углу в момент времени $t = 1$.



Фиг. 1. Зависимости от h/h_0 погрешностей аппроксимации по четырем группам 1, 2, 3, 4: квадраты – методика ГРАНАТ, кружочки – методика ДАРС.



Фиг. 2. Зависимости от x полных потоков S по четырем группам: кружочки – разностная сетка 12×12 , сплошные линии – 50×50 , пунктирные – 200×200 , квадраты – точное решение.

Из анализа графиков на фиг. 1 следует, что погрешности аппроксимации по методикам ДАРС и ГРАНАТ удовлетворительно согласуются между собой, стремятся к нулю при уменьшении шагов интегрирования по времени и по пространству, а численные решения сходятся к точному решению.

Из анализа графиков на фиг. 2 следует, что результаты расчетов по методике ДАРС сходятся к точному решению при уменьшении шагов интегрирования по времени и по пространству и удовлетворительно согласуются между собой на разностных сетках 50×50 и далее. На “грубых” разностных сетках полные потоки в группах далеки не только от аналитического решения, но и различаются между собой. Различие исчезает на подробных разностных сетках.

Время счета задачи на разностной сетке 200×200 по методике ДАРС в 1.8 раза меньше, чем по методике ГРАНАТ.

Удовлетворительное совпадение результатов расчетов по методике ДАРС с точными решениями задачи и с решениями по методике ГРАНАТ позволяет сделать вывод, что уравнения (10)

адекватно описывают эволюцию потока нейтронов \bar{N}_g и полного потока \bar{S}_g . Поэтому предложенный подход к вычислению интеграла столкновений можно признать оправданным и эффективным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена эффективная дискретно-аналитическая разностная схема для решения кинетического уравнения переноса нейтронов в многогрупповом изотропном приближении методом расщепления без итераций по интегралу столкновений и без обращения матриц.

Решение уравнения переноса нейтронов в многогрупповой модели сведено к решениям в одногрупповой модели.

Эффективность достигнута за счет вычисления интеграла столкновений из аналитических решений ОДУ, которые моделируют эволюцию нейтронов, появившихся в группе g из всех групп g' .

Результаты расчетов модельной задачи согласуются с точными решениями и с решениями, полученными по методике ГРАНАТ.

Метод решения обобщается на решение задач в многомерных пространствах и позволяет осуществить счет в параллельном режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карлсон Б., Белл Дж. Решение транспортного уравнения Sn-методом. Сб. “Физика ядерных реакторов”. М.: Атомиздат, 1959. С. 408–432.
2. Карлсон Б., Белл Дж. Численное решение задач кинетической теории нейтронов. Сб. “Теория ядерных реакторов”. М.: Госатомиздат, 1963. С. 243–258.
3. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
4. Шагалиев Р.М., Шумилин В.А., Алексеев А.В. и др. Математические модели и методики решения многомерных задач переноса частиц и энергии, реализованные в комплексе “САТУРН-3” // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1999. Вып. 4. С. 20–26.
5. Гаджиев Ф.Д., Кондаков И.А., Писарев В.Н., Стародумов О.И., Шестаков А.А. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2003. Вып. 4. С. 13–24.
6. Feautrier P.C.R. Sur la resolution numerique de l'equation de transfert // Acad. Sci. Paris. 1964. V. 258. P. 3198–3210.
7. Rybicki G. A modified Feautrier method // J. of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1971. V. 11. P. 589–596.
8. Михалс Д. Звездные атмосферы. М.: Мир, 1982.
9. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
10. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
11. Моисеев Н.Я., Шмаков В.М. Модифицированный метод расщепления для решения кинетического уравнения переноса частиц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 8. С. 1480–1490.
12. Кондаков И.А., Селезнев В.Н., Стародумов О.И., Шестаков А.А. Аналитические тесты для решения задач переноса частиц численными методами // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2003. Вып. 2. С. 28–43.
13. Арсентьев А.П., Писарев В.Н. Особенности применения TVD-подхода к DS_n методу решения трехмерного уравнения переноса нейтронов в криволинейной системе координат // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2011. Вып. 1. С. 13–39.
14. Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П., Иванов М.Я. Численное решение многомерных задач газовой динамики. Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976.
15. Моисеев Н.Я., Силантьева И.Ю. Разностные схемы произвольного порядка аппроксимации для решения линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами методом Годунова с антидиффузией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 7. С. 1282–1293.
16. Моисеев Н.Я. Неявные разностные схемы бегущего счета повышенной точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 5. С. 920–935.
17. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979.
18. Каханер Д., Моулер К., Неш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001.