ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1224–1232

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА[1)]

© 2022 г. Г. И. Шишкин[1,*], Л. П. Шишкина[1]

[1] *620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, ИММ УрО РАН, Россия*

**e-mail: shishkin@imm.uran.ru*

Поступила в редакцию 17.12.2021 г.
Переработанный вариант 17.12.2021 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения переноса. Предлагается новый подход к построению разностной схемы, основанный на специальной декомпозиции решения в виде суммы регулярной и сингулярной компонент решения. Строится разностная схема метода декомпозиции решения, в котором регулярная и сингулярная компоненты решения рассматриваются на равномерных сетках, и устанавливается их ε-равномерная сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. По сеточным решениям компонент решения строится континуальное решение, аппроксимирующее решение начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса, и устанавливается его ε-равномерная сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. Предлагаемый подход позволяет в дальнейшем применять технику повышения скорости сходимости сеточных решений на вложенных сетках для построения разностных схем, сходящихся ε-равномерно со вторым порядком скорости сходимости и выше, для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса. Библ. 11.

Ключевые слова: уравнение переноса, сингулярно возмущенная начально-краевая задача, пограничный слой, стандартная разностная схема, декомпозиция решения, равномерная сетка, ε-равномерная сходимость, равномерная норма, континуальная аппроксимация решения.

DOI: 10.31857/S0044466922070080

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи для регулярных уравнений переноса часто возникают в теоретических исследованиях и в приложениях; методы их решения рассматривались в работах [1]–[6] (см. также библиографию там). Начально-краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения переноса с возмущающим (малым) параметром ε, $\varepsilon \in (0,1]$, при "конвективном члене" рассматривалась в [7], [8]; для этой задачи построена разностная схема на кусочно-равномерной сетке (такие сетки известны в литературе как "сетки Шишкина"), сгущающейся в окрестности пограничного слоя, которая *сходится ε-равномерно в равномерной норме* с первым порядком скорости сходимости. Однако использование таких сеток для построения разностных схем для сингулярно возмущенных задач с порядком скорости сходимости выше первого приводит к достаточно "громоздким" схемам (см., например, [9]).

Таким образом, появляется интерес к использованию более простых равномерных сеток для построения разностных схем для сингулярно возмущенного уравнения переноса, хотя известно, что непосредственное использование стандартных сеточных аппроксимаций сингулярно возмущенных задач (на равномерных сетках) не позволяет получить ε-равномерную сходимость решения.

В настоящей работе для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса предлагается новый перспективный подход к построению разностной схемы, основанный на *специальной декомпозиции решения* как суммы *регулярной* и *сингулярной компонент реше-*

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 20-01-00650).

ния. При этом решение дифференциальной задачи рассматривается как сумма решений подзадач для регулярной и сингулярной компонент, рассматриваемых на своих равномерных сетках, каждая из которых сходится ε-равномерно в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. По сеточным решениям разностной схемы метода декомпозиции решения строится *континуальная аппроксимация компонент решения* и само *континуальное решение* начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса. Устанавливается ε-равномерная сходимость континуального решения в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости.

Работа построена следующим образом. Постановка начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса и цель исследования приводятся в разд. 2. Стандартная разностная схема – схема на основе монотонной аппроксимации начально-краевой задачи – рассматривается в разд. 3. Априорные оценки решения и производных, используемые при построении и обосновании сходимости разностных схем, устанавливаются в разд. 4. В разд. 5 строится разностная схема метода декомпозиции решения, регулярная и сингулярная компоненты которого решаются на равномерных сетках, и устанавливается их ε-равномерная сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. В разд. 6 по сеточным решениям разностной схемы метода декомпозиции решения строится континуальная аппроксимация решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса и устанавливается ε-равномерная сходимость континуального решения с первым порядком скорости сходимости. Выводы приводятся в разд. 7.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

На множестве $\overline{G}$:

$$\overline{G} = G \cup S, \quad G = D \times (0, T], \quad S = S_0 \cup S^l, \tag{2.1а}$$

где $D = (0 < x \le d]$, S_0 и S^l – нижняя и боковая части границы S, и

$$S_0 = \{(x,t) : 0 \le x \le d,\, t = 0\}, \quad S^l = \{(x,t) : x = 0,\, 0 < t \le T\}, \tag{2.1б}$$

причем $d \sim 1$, рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения переноса (из [7], [8])

$$\begin{aligned} Lu(x,t) &= f(x,t), \quad (x,t) \in G; \\ u(x,t) &= \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь

$$L = \varepsilon b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t) + p(x,t)\frac{\partial}{\partial t}, \quad (x,t) \in G, \tag{2.3а}$$

функции $b(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$, $f(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{G}$, функция $\varphi(x,t)$, $(x,t) \in S$, – достаточно гладкая на множествах S_0 и $\overline{S}^{\,l}$ и непрерывна на S, причем,

$$\begin{gathered} b_0 \le b(x,t) \le b^0, \quad 0 \le c(x,t) \le c^0, \quad p_0 \le p(x,t) \le p^0, \\ |f(x,t)| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}; \quad |\varphi(x,t)| \le M, \quad (x,t) \in S; \quad b_0, p_0 > 0; \end{gathered} \tag{2.3б}$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. (Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.)

Считаем, что данные задачи (2.2), (2.1) на множестве $S^c = S_0 \cap \overline{S}^l$ – угловой точке, удовлетворяют условиям согласования, обеспечивающим требуемую по построениям гладкость решения на $\overline{G}$.

При малых значениях параметра ε в окрестности множества S^l появляется регулярный пограничный слой – узкая подобласть, примыкающая к множеству S^l, ширины порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$, в которой решение задачи изменяется на конечную величину.

В [7], [8] для сингулярно возмущенной начально-краевой задачи для уравнения переноса (2.2), (2.1) с использованием кусочно-равномерной сетки (“сетки Шишкина”) построена монотонная разностная схема, сходящаяся ε-равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}(N^{-1} + N_0^{-1})$, где N и N_0 – число сеточных интервалов сеток по x и t соответственно. Однако использование таких сеток для повышения скорости сходимости численных решений выше первого порядка вызывает затруднения при построении разностных схем, сходящихся ε-равномерно.

В настоящей работе разрабатывается подход к построению разностной схемы, основанный на декомпозиции решения задачи, которая используется обычно при выводе априорных оценок (см., например, [9], [10]). Решение задачи (2.2), (2.1) представляется в виде следующей декомпозиции:

$$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{2.4}$$

где $U(x,t)$ и $V(x,t)$ – регулярная и сингулярная компоненты решения соответственно. Рассматриваются сеточная аппроксимация компонент на соответствующих равномерных сетках и построение континуальной аппроксимации решения рассматриваемой задачи.

Таким образом, цель настоящего исследования – для сингулярно возмущенной начально-краевой задачи для уравнения переноса (2.2), (2.1) разработать разностную схему метода декомпозиции решения, т.е. разностную схему на основе специальной декомпозиции решения в виде суммы регулярной и сингулярной компонент решения, рассматриваемых на соответствующих равномерных сетках, и построить континуальное решение, сходящееся к решению задачи для уравнения переноса (2.2), (2.1) ε-равномерно в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости.

Такой подход позволит в дальнейшем применять технику повышения скорости сходимости сеточных решений на вложенных сетках (см., например, [9]) для построения разностных схем, сходящихся ε-равномерно со вторым порядком скорости сходимости и выше, для задач типа (2.2), (2.1).

3. СТАНДАРТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

В этом разделе мы рассмотрим стандартную разностную схему, строящуюся на основе монотонной сеточной аппроксимации начально-краевой задачи (2.2), (2.1).

3.1. Приведем стандартную разностную схему для уравнения переноса.

На множестве $\overline{G}$ введем прямоугольную сетку

$$\overline{G}_h = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0, \tag{3.1}$$

где $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ – произвольные, вообще говоря, неравномерные сетки на отрезках $[0,d]$ и $[0,T]$ соответственно. Пусть $h^i = x^{i+1} - x^i$, $x^i, x^{i+1} \in \overline{\omega}$, $h = \max_i h^i$, и $\tau^k = t^{k+1} - t^k$, $t^k, t^{k+1} \in \overline{\omega}_0$, $\tau = \max_k \tau^k$. Предполагаем выполненным условие $h \le MN^{-1}$, $\tau \le MN_0^{-1}$, где $N+1$ и N_0+1 – число узлов сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ соответственно.

Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем стандартной разностной схемой (см. [6])

$$\Lambda z(x,t) = f(x,t), \ (x,t) \in G_h; \quad z(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S_h. \tag{3.2а}$$

Здесь $G_h = G \cap \overline{G}_h$, $S_h = S \cap \overline{G}_h$,

$$\Lambda \equiv \varepsilon b(x,t)\delta_{\overline{x}} + c(x,t) + p(x,t)\delta_{\overline{t}}, \tag{3.2б}$$

$\delta_{\overline{x}} z(x,t)$ и $\delta_{\overline{t}} z(x,t)$ – первые разностные производные (производные назад) по x и t соответственно.

Схема (3.2), (3.1) монотонна ε-равномерно (определение монотонности разностных схем см., например, в [6]). Для схемы (3.2), (3.1) справедлив сеточный принцип максимума.

Теорема 3.1. *Пусть для стандартной разностной схемы* (3.2), (3.1) *выполняется условие* $\Lambda z(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in G_h$; $z(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in S_h$. *Тогда для функции* $z(x,t)$ *справедлива оценка* $z(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{G}_h$.

3.2. Для решения стандартной разностной схемы (3.2) на сетке $\overline{G}_{h(3.1)}$, с использованием априорных оценок (4.10) и соотношения для сингулярной компоненты (4.11) получаем оценку

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M\left[\left(\varepsilon + N^{-1}\right)^{-1} N^{-1} + N_0^{-1}\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_{h(3.1)}. \tag{3.3}$$

(Запись $D_{(i.j)}$ ($L_{(i.j)}$, $m_{(i.j)}$, $M_{(i.j)}$, $D_{h(i.j)}$) означает, что эти множества (операторы, постоянные, сетки) введены в формуле (i,j).) Для решения стандартной разностной схемы (3.2) на сетке $\overline{G}_h^u$, равномерной по x и t,

$$\overline{G}_h = \overline{G}_h^u \equiv \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0, \tag{3.4}$$

имеем следующую оценку, подобную (3.3):

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M\left[\left(\varepsilon + N^{-1}\right)^{-1} N^{-1} + N_0^{-1}\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_{h(3.4)}^u, \tag{3.5}$$

где $M_{h(3.3)}$, $M_{h(3.5)} = \mathbb{C}(1)$.

Таким образом, *стандартные разностные схемы* (3.2), (3.1) и (3.2), (3.4) *сходятся* при $N, N_0 \to \infty$ *при фиксированных значениях параметра* ε с первым порядком скорости сходимости.

Теорема 3.2. *Пусть для данных начально-краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняются условия* (2.3)*, а для решения задачи – оценки теоремы* 4.1 *при* $K = 2$. *Тогда для решения стандартных разностных схем* (3.2), (3.1) *и* (3.2), (3.4) *справедливы оценки* (3.3) *и* (3.5) *соответственно.*

Замечание 1. Схемы (3.2), (3.1) и (3.2), (3.4) сходятся при неулучшаемом условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon), \quad N_0^{-1} = o(1). \tag{3.6}$$

В соответствии с оценкой (3.5) для сходимости стандартных разностных схем (3.2), (3.1) и (3.2), (3.4) требуется использовать сетки по x с числом узлов, удовлетворяющим условию $N \gg \varepsilon^{-1}$, т.е. неограниченно растущим при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, стандартные схемы (3.2), (3.1) и (3.2), (3.4), сходящиеся при фиксированных значениях параметра ε, не сходятся ε-равномерно.

4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ И ПРОИЗВОДНЫХ

Приведем ряд априорных оценок решения задачи (2.2), (2.1), используемых при построении и обосновании разностных схем. Вывод оценок подобен выводу оценок производных регулярных и сингулярных компонент решения сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений из [9]–[11].

4.1. Для сингулярно возмущенной начально-краевой задачи (2.2), (2.1) справедлив *принцип максимума*, подобный принципу максимума для начально-краевых задач для сингулярно возмущенных параболических уравнений [9].

Теорема 4.1. *Пусть для данных начально-краевой задачи для уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется условие*

$$Lu(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in G; \quad u(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in S.$$

Тогда для функции $u(x,t)$ *справедлива оценка* $u(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{G}$.

4.2. Приведем “стандартные” априорные оценки для решения сингулярно возмущенного уравнения переноса (2.2), (2.1). При не слишком малых значениях параметра ε исследуемая задача подобна задаче для регулярного уравнения переноса, рассматриваемой в [1], [2].

1. Применяя технику мажорантных функций (подобную приведенной в [9], [10] для параболического уравнения конвекции-диффузии), находим оценку решения начально-краевой задачи (2.2), (2.1):

$$|u(x,t)| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}. \tag{4.1}$$

2. При исследовании производных решения начально-краевой задачи считаем, что коэффициенты и правая часть уравнения являются достаточно гладкими на $\overline{G}$, начальная и граничная функции – достаточно гладкие на боковой и нижней частях границы S, производные $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi(x,0)$, $\dfrac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\varphi(0,t)$ ограничены при $k, k_0 \le 2$, причем в угловой точке $(x,t) = (0,0)$ выполняются условия

согласования, обеспечивающие требуемую непрерывность решения начально-краевой задачи на $\overline{G}$ и его производных по x и t до второго порядка. Пусть выполняется условие

$$u \in C^{k,k_0}(\overline{G}), \quad k + k_0 \le 2. \tag{4.2}$$

3. При оценке производных решения задачи (2.2), (2.1) перейдем к переменным ξ, t, где $\xi = \varepsilon^{-1}x$. В новых переменных имеем следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{gathered} \tilde{L}\tilde{u}(\xi,t) \equiv \left\{\tilde{b}(\xi,t)\frac{\partial}{\partial\xi} + \tilde{c}(\xi,t) + \tilde{p}(\xi,t)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\tilde{u}(\xi,t) = \tilde{f}(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \tilde{G}; \\ \tilde{u}(\xi,t) = \tilde{\varphi}(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \tilde{S}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Теперь уже для регулярной задачи (4.3) в переменных ξ,t в случае условий согласования второго порядка в переменных x, t на множестве $\tilde{S}^c$, где

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}u(0,0) = \frac{d}{dt}\varphi^l(0), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(0,0) = \frac{d^2}{dt^2}\varphi^l(0); \\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi^l(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi(0,t), \quad k = 1,2, \end{gathered} \tag{4.4}$$

обеспечивающих включение (4.2), находим оценку производных

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial\xi^k\partial t^{k_0}}\tilde{u}(\xi,t)\right| \le M, \quad (\xi,t) \in \overline{\tilde{G}}, \quad k + k_0 \le 2. \tag{4.5}$$

В переменных x,t получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k\partial t^{k_0}}u(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k}, \quad (x,t) \in \overline{G}, \quad k + k_0 \le 2. \tag{4.6}$$

Справедлива следующая

Теорема 4.2. *Пусть для данных начально-краевой задачи для уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется условие* $b,c,p,f \in C^{k,k_0}(\overline{G})$, $k + k_0 \le 2$, *и пусть на множестве* $\tilde{S}^c$ *выполняется условие согласования второго порядка* (4.4). *Тогда для решения начально-краевой задачи* $u(x,t)$ *и его производных справедливы оценки* (4.1), (4.6).

4.3. Приведем априорные оценки решений и производных для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2.2), (2.1), используемые в разд. 5 при построении разностных схем метода декомпозиции решения и обосновании их сходимости.

1. Рассмотрим оценки регулярной и сингулярной компонент решения задачи (2.2), (2.1) из декомпозиции (2.4).

Регулярная компонента решения – функция $U(x,t)$ – определяется соотношением

$$U(x,t) = U^e(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{4.7}$$

где $U(x,t)$ есть сужение на $\overline{G}$ функции $U^e(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^e$, являющейся решением следующей "расширенной" задачи:

$$\begin{gathered} L^eU^e(x,t) = f^e(x,t), \quad (x,t) \in G^e; \\ U^e(x,t) = \varphi^e(x,t), \quad (x,t) \in S^e. \end{gathered} \tag{4.8а}$$

Здесь множество

$$\overline{G}^e = [-d^*,d] \times [0,T], \quad d^* > 0, \tag{4.8б}$$

есть продолжение $\overline{G}$ за боковую границу S^l, оператор L^e и функции $f^e(x,t)$ и $\varphi^e(x,t)$ – расширения оператора L на множество $\overline{G}^e$ и функций $f(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ на множества $\overline{G}^e$ и S^e соответственно с сохранением свойств данных задачи (2.2), (2.1). Предполагаем выполненным условие

$$d^* \ge T\max_{\overline{G}^e}\{b^e(x,t)[p^e]^{-1}(x,t)\}.$$

Сингулярная компонента – функция $V(x,t)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{gathered} LV(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G; \\ V(x,t) = \varphi(x,t) - U^e(x,t), \quad (x,t) \in S^l; \\ V(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_0. \end{gathered} \tag{4.9}$$

2. Для компонент $U^e(x,t)$ и $V(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} U^e(x,t)\right| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}^e; \tag{4.10а}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} V(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k}, \quad (x,t) \in \overline{G}, \quad k + k_0 \le 2, \tag{4.10б}$$

причем,

$$V(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{G} \quad \text{при} \quad x \ge M_1\varepsilon t, \tag{4.11а}$$

где M_1 – произвольная постоянная, удовлетворяющая условию

$$M_1 \ge \max_{\overline{G}}[b(x,t)p^{-1}(x,t)]. \tag{4.11б}$$

Справедлива следующая

Теорема 4.3. *Пусть для данных начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется условие* $b, c, p, f \in C^{k,k_0}(\overline{G})$, $k + k_0 \le 2$, *и пусть на множестве* $\tilde{S}^c$ *выполняется условие согласования второго порядка* (4.4). *Тогда для решения начально-краевой задачи и его компонент из представления* (2.4) *справедливы оценки* (4.10), *а также соотношение* (4.11) *для сингулярной компоненты* $V(x,t)$.

5. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ РЕШЕНИЯ

Построим *разностную схему метода декомпозиции решения*, рассматривая сеточные аппроксимации регулярной и сингулярной компонент решения из декомпозиции (2.4) на своих равномерных сетках.

Заметим, что в силу оценки (4.10) регулярная компонента $U(x,t)$ и ее производные по x и t ограничены ε-равномерно; производные по t сингулярной компоненты $V(x,t)$ ограничены ε-равномерно, производные k-го порядка по x растут как $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{-k}\right)$.

5.1. Построим сеточную аппроксимацию регулярной компоненты $U^e(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^e$. Заметим, что функция $U(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, связана с функцией $U^e(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^e$, соотношением (4.7).

На множестве $\overline{G}^e_{(4.8)}$ строим равномерную сетку

$$\overline{G}^e_h = \overline{\omega}^e \times \overline{\omega}_0, \tag{5.1а}$$

где $\overline{\omega}^e$ и $\overline{\omega}_0$ – равномерные сетки по x и t. Шаги этих сеток определяются соотношениями

$$h^e = (d + d^*)N^{-1}, \quad \tau = TN_0^{-1}, \tag{5.1б}$$

где N и N_0 – число интервалов разбиения множеств $[-d^*, d]$ и $[0, T]$ соответственно; $d^* = d^*_{(4.8)}$.

Задачу (4.8) аппроксимируем разностной схемой

$$\Lambda^e z^e_U(x,t) = f^e(x,t), \quad (x,t) \in G^e_h; \quad z^e_U(x,t) = \varphi^e(x,t), \quad (x,t) \in S^e_h, \tag{5.2}$$

где оператор Λ^e есть оператор $\Lambda_{(3.2)}$, но на множестве $\overline{G}^e$.

Разностная схема (5.2), (5.1) является монотонной. С использованием априорных оценок регулярной компоненты решения “расширенной задачи” (4.8) устанавливается оценка

$$\left|U^e(x,t) - z^e_U(x,t)\right| \le M[N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}^e_h. \tag{5.3}$$

Сеточное решение $z^e_U(x,t)$ сходится ε-равномерно с первым порядком скорости сходимости по x и t.

Справедлива следующая

Теорема 5.1. *Пусть для регулярной компоненты* $U^e(x,t)$, $(x,t)\in \overline{G}^e$, *из декомпозиции* (2.4) *решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется априорная оценка* (4.10а). *Тогда решение разностной схемы* (5.2), (5.1) *сходится* ε*-равномерно в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости по* x *и* t *с оценкой* (5.3).

5.2. Построим сеточную аппроксимацию сингулярной компоненты $V(x,t)$, $(x,t)\in \overline{G}$.

На множестве

$$\overline{G}_V = [0,\min(M_1\varepsilon T,d)]\times[0,T] \tag{5.4}$$

построим равномерную сетку

$$\overline{G}_{Vh} = \{\overline{\omega}_V\times\overline{\omega}_0\}\cap\overline{G}_V, \tag{5.5}$$

где $\overline{\omega}_V$ и $\overline{\omega}_0$ – равномерные сетки на множествах $[0,\min(M_1\varepsilon T,d)]$ и $[0,T]$ соответственно с шагами $h_V = \min(M_1\varepsilon T,d)N^{-1}$ и $\tau = TN_0^{-1}$ по x и t соответственно; $\tau = \tau_{(5.1)}$, $\overline{\omega}_{0(5.5)} = \overline{\omega}_{0(5.1)}$.

Задачу (4.9) аппроксимируем разностной схемой

$$\begin{gathered}\Lambda z_V(x,t) = 0, \quad (x,t)\in G_{Vh};\\ z_V(x,t) = \varphi^e(x,t) - z_U^e(x,t), \quad (x,t)\in S_{Vh},\end{gathered} \tag{5.6}$$

где $z_U^e(x,t) = z_{U(5.2)}^e(x,t)$, $\overline{G}_{Vh} = G_{Vh}\cup S_{Vh}$.

Разностная схема (5.6), (5.5) является монотонной.

С использованием априорных оценок сингулярной компоненты решения задачи (4.9) устанавливается оценка

$$\left|V(x,t) - z_V(x,t)\right| \le M[N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x,t)\in\overline{G}_{Vh}. \tag{5.7}$$

Сеточное решение $z_V(x,t)$ сходится ε-равномерно с первым порядком скорости сходимости по x и t.

Справедлива следующая

Теорема 5.2. *Пусть для сингулярной компоненты* $V(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_V$, *из декомпозиции* (2.4) *решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется априорная оценка* (4.10б). *Тогда решение разностной схемы* (5.6), (5.5) *сходится* ε*-равномерно; для решения разностной схемы справедлива оценка* (5.7).

6. КОНТИНУАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

По сеточным решениям компонент разностной схемы метода декомпозиции решения строим континуальную аппроксимацию компонент решения и самого решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2.2), (2.1) и устанавливаем ε-равномерную сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости как компонент, так и самого решения.

6.1. Рассмотрим аппроксимацию регулярной компоненты $U(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, из декомпозиции.

Пусть $z_U^e(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_h^e$, – решение разностной схемы метода декомпозиции решения (5.2), (5.1). По значениям функции $z_U^e(x,t)$ в узлах сетки

$$\overline{G}_h^U = \overline{G}_h^e\cap\overline{G} \tag{6.1}$$

строим интерполянт

$$\tilde{U}(x,t), \quad (x,t)\in\overline{G}. \tag{6.2}$$

В узлах элементарной ячейки, определяемой узлами

$$(x_i,t_j),\ (x_{i+1},t_j),\ (x_i,t_{j+1}),\ (x_{i+1},t_{j+1}), \tag{6.3}$$

полагаем

$$\tilde{U}(x,t) = z_U^e(x,t). \tag{6.4}$$

На элементарных прямоугольниках, определяемых узлами (6.3), интерполянт (6.2) строится линейным по x и t.

Приведенную технику построения интерполянта $\tilde{U}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, назовем *континуальной аппроксимацией* регулярной компоненты $U(x,t)$ решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса.

С использованием априорных оценок регулярной компоненты решения устанавливается следующая оценка для интерполянта $\tilde{U}(x,t)$, подобная оценке (5.3):

$$|U(x,t)-\tilde{U}(x,t)|\le M[N^{-1}+N_0^{-1}],\quad (x,t)\in\overline{G}. \tag{6.5}$$

Таким образом, интерполянт $\tilde{U}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, регулярной компоненты решения сходится ε-равномерно с первым порядком скорости сходимости по x и t.

Справедлива следующая

Теорема 6.1. *Пусть для регулярной компоненты* $U^e(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}^e$, *решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется априорная оценка* (4.10а). *Тогда континуальная аппроксимация регулярной компоненты решения — интерполянт* $\tilde{U}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, *— сходится* ε*-равномерно в равномерной норме; для функции* $\tilde{U}(x,t)$ *справедлива оценка* (6.5).

6.2. Рассмотрим аппроксимацию сингулярной компоненты $V(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$.

Пусть $z_V(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_{Vh}$, есть решение разностной схемы метода декомпозиции решения (5.6), (5.5).

По значениям функции $z_V(x,t)$ в узлах сетки $\overline{G}_{Vh}$ строим интерполянт

$$\tilde{V}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{G}_V. \tag{6.6}$$

В узлах элементарной ячейки, определяемой узлами

$$(x_i,t_j),\ (x_{i+1},t_j),\ (x_i,t_{j+1}),\ (x_{i+1},t_{j+1}), \tag{6.7}$$

полагаем

$$\tilde{V}(x,t)=z_V^e(x,t). \tag{6.8}$$

На *элементарных прямоугольниках*, определяемых узлами (6.7), интерполянт (6.6) строится линейным по x и t.

Приведенную технику построения интерполянта $\tilde{V}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_V$, назовем *континуальной аппроксимацией* сингулярной компоненты $V(x,t)$ решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса.

С использованием априорных оценок сингулярной компоненты решения устанавливается следующая оценка для интерполянта $\tilde{V}(x,t)$, подобная оценке (5.7):

$$|V(x,t)-\tilde{V}(x,t)|\le M[N^{-1}+N_0^{-1}],\quad (x,t)\in\overline{G}_V. \tag{6.9}$$

Таким образом, интерполянт $\tilde{V}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_V$, сингулярной компоненты решения сходится ε-равномерно с первым порядком скорости сходимости по x и t.

Справедлива следующая

Теорема 6.2. *Пусть для сингулярной компоненты* $V(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_V$, *решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется априорная оценка* (4.10б). *Тогда континуальная аппроксимация сингулярной компоненты решения — интерполянт* $\tilde{V}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_V$, *— сходится* ε*-равномерно в равномерной норме; для функции* $\tilde{V}(x,t)$ *справедлива оценка* (6.9).

Далее будет удобно определить интерполянт $\tilde{V}(x,t)$ на всем множестве $\overline{G}$, полагая $\tilde{V}(x,t)=0$ при $(x,t)\in\overline{G}\setminus\overline{G}_V$.

6.3. Построим континуальное решение начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2.2), (2.1) — функцию $\tilde{u}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, — как сумму интерполянтов:

$$\tilde{u}(x,t)=\tilde{U}(x,t)+\tilde{V}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{G}. \tag{6.10}$$

С учетом оценок (6.5) и (6.9) имеем

$$|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)|\le M[N^{-1}+N_0^{-1}],\quad (x,t)\in\overline{G}. \tag{6.11}$$

Континуальное решение $\tilde{u}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, сходится к решению $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2.2), (2.1) ε-равномерно с первым порядком скорости сходимости.

Теорема 6.3. *Пусть для регулярной и сингулярной компонент из декомпозиции* (2.4) *решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняются априорные оценки* (4.10). *Тогда континуальное решение* $\tilde{u}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, *сходится к решению* $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, *начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) ε*-равномерно в равномерной норме с оценкой* (6.11).

7. ВЫВОДЫ

1. Рассмотрена начально-краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения переноса с возмущающим параметром ε при пространственной производной, где параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. В этой задаче при малых значениях параметра ε в окрестности боковой границы S^l (через которую характеристики входят в область) появляется пограничный слой.

2. Показано, что разностная схема на основе монотонных сеточных аппроксимаций задачи на сетке с произвольным распределеним узлов, а также на равномерной сетке, в случае ее сходимости в равномерной норме, не сходится ε-равномерно.

3. Разработана монотонная разностная схема метода декомпозиции решения, в которой регулярная и сингулярная компоненты решения вычисляются на своих равномерных сетках (см. построения в разд. 5 и утверждения теорем 5.1 и 5.2 об ε-равномерной сходимости сеточных решений регулярной и сингулярной компонент решения).

4. По сеточным аппроксимациям регулярной и сингулярной компонент решения в разд. 6 построена континуальная аппроксимация компонент решения и само континуальное решение начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса, и установлена ε-равномерная сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости как компонент, так и самого континуального решения.

5. Разработанный в настоящей работе подход к построению разностной схемы метода декомпозиции решения позволит применить технику повышения скорости сходимости сеточных решений на вложенных сетках (см., например, [9]) для построения робастных разностных схем, сходящихся со вторым порядком скорости сходимости и выше, для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
2. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы. Методы математической физики. М.: Изд-кий центр “Академия”, 2013. 304 с.
3. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
4. *Марчук Г.И., Шайдуров В.В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 272 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
7. *Шишкин Г.И.* Разностная схема для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 11. С. 1824–1830.
8. *Shishkina L.P., Shishkin G.I.* Development and Numerical Study of Robust Difference Schemes for a Singularly Perturbed Transport Equation // Finite Difference Methods: Theory and Applications, FDM 2018, I. Dimov, I. Farago, and L. Vulkov (eds.), Lecture Notes in Computer Science (Springer, Cham, 2019). P. 476–483.
9. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Difference Methods for Singular Perturbation Problems. V. 140 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2009. 408 p.
10. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. 233 с.
11. *Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Revised Ed. Singapore: World Sci., 2012. 176 p.