ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1059–1066

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. П. Н. Вабищевич[1,2]

[1] 115191 Москва, Б. Тульская ул., 52, ИБРАЭ РАН, Россия

[2] 655017 Ставрополь, ул. Пушкина, 1, СКФУ, Северо-Кавказкий центр математических исследований, Россия

e-mail: vabishchevich@gmail.com

Поступила в редакцию 12.10.2021 г.
Переработанный вариант 20.01.2022 г.
Принята к публикации 11.03.2022 г.

В настоящее время различные типы схем расщепления построены для эволюционных уравнений первого и второго порядка, когда имеет место аддитивное представление основного эллиптического оператора задачи. Многие прикладные задачи приводят к необходимости решения краевых задач для нестационарных уравнений соболевского типа, когда эллиптический оператор присутствует при производных по времени. При использовании схем расщепления для приближенного решении таких задач необходимо использовать аддитивное представление как основного эллиптического оператора, так и оператора при производных по времени. В работе рассматривается задача Коши для частного случая эволюционного уравнения первого порядка, когда оператор при производной представляется через основной оператор. Используется запись этого уравнения как дифференциально-алгебраической системы из двух уравнений. Строятся безусловно устойчивые схемы расщепления при многокомпонентном расщеплении. Библ. 14.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, дифференциально-алгебраическая система, двухслойная операторно-разностная схема, многокомпонентное расщепление, устойчивость схем расщепления.

DOI: 10.31857/S0044466922070109

ВВЕДЕНИЕ

Прикладные математические модели обычно [1] строятся на основе систем параболических и гиперболических уравнений. В качестве базовых моделей могут выступать более общие уравнения соболевского типа [2]. Такие модели типичны при рассмотрении динамических процессов с памятью, в которых (см. [3]) учитываются, например, вязкоупругие свойства. В частности, в задачах фильтрации [4] рассматриваются краевые задачи для псевдопараболических уравнений. Особенность таких задач [5] заключается в присутствии эллиптического оператора при производной решения по времени.

Приближенное решение краевых задач для псевдопараболических уравнений чаще всего строится на основе конечно-элементной или конечно-разностной аппроксимации по пространству [6], [7]. Построение абсолютно устойчивых разностных схем базируется на применении неявных аппроксимаций по времени [8], [9]. Приближенное решение на новом слое по времени определяется решением немного усложненной сеточной эллиптической задачи.

Вычислительная задача может упрощаться за счет использования аддитивных схем (схем расщепления) [10], [11]. Для различных классов нестационарных задач используются как стандартные схемы расщепления по отдельным направлениям (локально-одномерные схемы), схемы расщепления по физическим процессам, так и регионально-аддитивные схемы декомпозиции области при построении параллельных алгоритмов для нестационарных задач математической физики. Наибольшие возможности предоставляет двухкомпонентное расщепление оператора задачи на сумму двух операторов более простой структуры: операторные аналоги схем переменных направлений, факторизованные схемы, схемы предиктора-корректора. При общем многокомпонентном расщеплении применяются схемы покомпонентного расщепления (схемы суммарной аппроксимации), регуляризованные аддитивные схемы, векторные аддитивные схемы.

В последнее время (см., например, книгу [11] и приведенную в ней литературу) идеи расщепления используются для численного решения систем связанных уравнений.

При рассмотрении краевых задач для уравнений соболевского типа мы должны расщеплять не только основной оператор задачи, но и оператор при производной по времени. Прямое использование результатов теории аддитивных схем в таких задачах затруднено, имеются лишь единичные работы в этом направлении. В работе [12] предложены и исследованы векторные аддитивно-операторные схемы с расщеплением оператора при производной по времени на сумму положительно-определенных самосопряженных операторов. Более общие задачи с расщеплением как основного оператора задачи, так и оператора при производных по времени рассмотрены в [13]. В настоящей работе безусловно устойчивые схемы расщепления для таких задач построены на основе трансформации исходного дифференциально-операторного уравнения к системе из двух уравнений.

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Определим H как конечномерное вещественное гильбертово пространство и пусть A, B, D — линейные операторы в H. Для сеточных функций y из H для скалярного произведения и нормы используем обозначения (y,w) и $\|y\| = (y,y)^{1/2}$. Для $D = D^* > 0$ через H_D обозначим пространство H, снабженное скалярным произведением $(y,w)_D = (Dy,w)$ и нормой $\|y\|_D = (Dy,y)^{1/2}$.

Будем считать, что $y(t) \in H$ есть решение задачи Коши для эволюционного уравнения первого порядка

$$B\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

при заданных правой части $f(t) \in H$ и начальном условии

$$u(0) = u^0. \tag{2}$$

Считаем, что линейные неотрицательный оператор A и положительный оператор B, действующие из H в H, являются самосопряженными и стационарными, т.е.

$$A = A^* \ge 0, \quad \frac{d}{dt}A = A\frac{d}{dt}, \quad B = B^* > 0, \quad \frac{d}{dt}B = B\frac{d}{dt}.$$

При рассмотрении краевых задач для псевдопараболических уравнений операторы A, B связываются с аппроксимациями некоторых эллиптических операторов. Тем самым вычислительные сложности связаны не только с оператором A, но и с оператором B при производной по времени.

Мы ограничимся случаем, когда

$$B = I + \gamma A, \quad \gamma = \text{const} > 0,$$

где I — единичный оператор. Такая связь между операторами A и B типичная для многих прикладных задач при моделировании динамических процессов с памятью. Тем самым вместо (1) рассматривается уравнение

$$(I + \gamma A)\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0. \tag{3}$$

Приведем типичную априорную оценку для решения задачи (2), (3), которая выражает устойчивость решения по начальным данным и правой части в соответствующем пространстве. Аналогичные оценки будут интересны нам при рассмотрении точного и приближенного решений трансформированной задачи.

Домножим уравнение (3) скалярно в H на $(I + \gamma A)u$. С учетом неотрицательности A получим

$$\|(I + \gamma A)u(t)\|\frac{d}{dt}\|(I + \gamma A)u(t)\| \le (f, (I + \gamma A)u).$$

Для правой части используем неравенство

$$(f, (I + \gamma A)u) \le \|f(t)\|\|(I + \gamma A)u(t)\|.$$

Это позволяет получить следующую априорную оценку для решения задачи:

$$\|(I+\gamma A)u(t)\| \le \left\|(I+\gamma A)u^0\right\| + \int_0^t \|f(s)\|\,ds. \tag{4}$$

Мы хотим построить разностные схемы расщепления, когда имеет место аддитивное представление оператора A суммой операторов более простой структуры. Например, будем считать, что для оператора A имеет место

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \quad A_\alpha = A_\alpha^* \ge 0, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p. \tag{5}$$

Переход на новый слой по времени обеспечивается решением задач для отдельных операторов $A_\alpha, \alpha = 1,2,\ldots,p$, при расщеплении (5).

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Исходное уравнение (3) запишем в виде системы из двух уравнений. Введем новую искомую величину $v(t)$ с помощью равенства

$$u + \gamma A u - v = 0. \tag{6}$$

В этих условиях

$$Au = \frac{1}{\gamma}(v-u)$$

и уравнение (3) можно трансформировать к виду

$$\gamma\frac{dv}{dt} - u + v = \gamma f(t). \tag{7}$$

Будем рассматривать задачу (2), (6), (7).

Теорема 1. *Для решения задачи* (2), (6), (7) *имеет место априорная оценка*

$$\|v(t)\| \le \left\|v^0\right\| + \int_0^t \|f(s)\|\,ds, \tag{8}$$

в которой $v^0 = u^0 + \gamma A u^0$.

Доказательство. Домножим уравнение (6) скалярно в H на u, а уравнение (7) — на v. Суммирование результатов дает равенство

$$\gamma\|v\|\frac{d}{dt}\|v\| + \gamma(Au,u) + \|v-u\|^2 = \gamma(f,v).$$

С учетом неотрицательности оператора A получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\| \le \|f(t)\|,$$

из которого следует (8).

Замечание 1. Принимая во внимание (6), из (8) получим оценку (4) для u.

Нам удобно записать систему уравнений (6), (7) в виде одного эволюционного уравнения первого порядка для векторных величин. Определим $\mathbf{u} = \{u, v\}$ и $\mathbf{f} = \{0, \gamma f\}$, тогда от (2), (6), (7) придем к задаче Коши:

$$\mathbf{B}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{9}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \tag{10}$$

где $\mathbf{u}^0 = \{u^0, v^0\}$. Для операторных матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ имеем

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} I + \gamma A & -I \\ -I & I \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Задачу (9), (10) мы рассматриваем на прямой сумме пространств $\mathbf{H} = H \oplus H$, когда для $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}$, скалярное и произведение и норма есть

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2), \quad \|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}.$$

Принимая во внимание представления (11), получаем

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* \geq 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \geq 0. \tag{12}$$

Замечание 2. Запись исходного уравнения (3) в виде системы уравнений (6), (7) характеризуется тем, что оператор A входит только в основной оператор задачи (оператор $\mathbf{A}$) и исключен из оператора при производной по времени (оператор $\mathbf{B}$). Этим обстоятельством можно воспользоваться при построении схем расщепления.

Для получения априорной оценки для решения задачи (9), (10) домножим уравнение (9) скалярно в $\mathbf{H}$ на $\mathbf{u}$ и с учетом (12) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq (\mathbf{f}, \mathbf{u}). \tag{13}$$

Принимая во внимание (11), имеем

$$(\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \gamma \|v\|^2,$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{u}) = \gamma(f, v) \leq \gamma \|f\| \|v\|.$$

С учетом этого из (13) следует оценка (8).

3. АППРОКСИМАЦИЯ ПО ВРЕМЕНИ

При приближенном решении задачи Коши (9), (10) мы ориентируемся на неявные безусловно устойчивые схемы. Будем использовать равномерную сетку по времени с шагом τ и пусть $y^n = y(t^n)$, $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$. В своем исследовании мы ограничились двухслойными схемами. В этом случае переход к более общим неравномерным сеткам носит редакционный характер. Естественно начать с двухслойной схемы с весом $\sigma = \text{const} \in (0, 1]$, когда

$$\mathbf{B}\frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau} + \mathbf{A}\mathbf{y}^{n+\sigma} = \mathbf{f}^{n+\sigma}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{v}^0, \tag{15}$$

при использовании обозначений

$$\mathbf{y}^{n+\sigma} = \sigma \mathbf{y}^{n+1} + (1 - \sigma)\mathbf{y}^n, \quad \mathbf{y}^n = \{y^n, w^n\}.$$

Для правой части и начального условия имеем

$$\mathbf{f}^{n+\sigma} = \{0, \gamma f^{n+\sigma}\}, \quad \mathbf{y}^0 = \{u^0, v^0\}.$$

Разностная схема (14), (15) дает приближенное решение задачи (9), (10) с достаточно гладким решением $\mathbf{u}(t)$ с первым порядком точности по τ для $\sigma \neq 0.5$ и вторым – для $\sigma = 0.5$ (симметричная схема, схема Кранка–Николсон). Для исследования устойчивости таких двухслойных схем привлекаются результаты теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [8], [9].

Теорема 2. *Двухслойная схема* (11), (14), (15) *безусловно устойчива при* $\sigma \geq 0.5$. *При этих ограничениях имеет место априорная оценка*

$$\|w^{n+1}\| \leq \|w^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \|f^{k+\sigma}\|, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{16}$$

Доказательство. Домножая уравнение (14) на $\tau \mathbf{y}^{n+\sigma}$ и учитывая второе неравенство (12), получаем

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n), \mathbf{y}^{n+\sigma}) \le \tau(\mathbf{f}^{n+\sigma}, \mathbf{y}^{n+\sigma}). \tag{17}$$

Для правой части имеем

$$(\mathbf{f}^{n+\sigma}, \mathbf{y}^{n+\sigma}) = \gamma(f^{n+\sigma}, w^{n+\sigma}) \le \gamma \left\| f^{n+\sigma} \right\| \left\| w^{n+\sigma} \right\|. \tag{18}$$

Левая часть (17) принимает вид

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n), \mathbf{y}^{n+\sigma}) = \gamma((w^{n+1} - w^n), w^{n+\sigma}).$$

Воспользуемся следующим утверждением [14].

Лемма 1. *Пусть*

$$w = \sigma u + (1 - \sigma)v$$

для u, v *из некоторого гильбертового пространства* H_D $(D = D^* > 0)$. *Тогда*

$$(D(u - v), w) \ge (\|u\|_D - \|v\|_D)\|w\|_D,$$

если постоянная $\sigma \ge 0.5$.

Принимая во внимание доказательство леммы 1, для левой части (17) имеем

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n), \mathbf{y}^{n+\sigma}) \ge \gamma\left(\left\| w^{n+1} \right\| - \left\| w^n \right\|\right)\left\| w^{n+\sigma} \right\|. \tag{19}$$

С учетом (18), (19) из (17) получим оценку

$$\left\| w^{n+1} \right\| \le \left\| w^n \right\| + \tau \left\| f^{n+\sigma} \right\|,$$

из которой следует (16).

При рассмотрении системы уравнений (6), (7) схема (11), (14), (15) соответствует

$$y^{n+1} + \gamma A y^{n+1} - w^{n+1} = 0, \tag{20}$$

$$\gamma \frac{w^{n+1} - w^n}{\tau} - y^{n+\sigma} + w^{n+\sigma} = \gamma f^{n+\sigma}. \tag{21}$$

Схему (20), (21) можно рассматривать как некий вариант записи стандартной схемы с весом для исходного уравнения (3)

$$(I + \gamma A)\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A y^{n+\sigma} = f^{n+\sigma}, \tag{22}$$

при введении дополнительных искомых величин.

Для разностной схемы (20), (21) имеем оценку (16), которая с учетом (20) может быть записана в виде

$$\left\| (I + \gamma A) y^{n+1} \right\| \le \left\| (I + \gamma A) u^0 \right\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \left\| f^{k+\sigma} \right\|, \quad n = 0,1,\dots . \tag{23}$$

Оценка (23) имеет место для схемы (22) и выступает сеточным аналогом априорной оценки (4).

Замечание 3. При $0 \le \sigma < 0.5$ мы можем рассчитывать только на условную устойчивость рассматриваемых схем. Например, для случая $\sigma = 0$ устойчивость схем (22) и (20), (21) устанавливается при следующих ограничениях на шаг по времени:

$$\tau \le 2\gamma + \frac{2}{\|A\|}.$$

При не очень малых γ такие ограничения могут быть необременительными. Однако в вычислительном плане схема с $\sigma = 0$ не имеет каких-либо преимуществ перед схемами с $\sigma > 0$, что имеет место в обычных задачах с $\gamma = 0$.

4. СХЕМЫ ПОКОМПОНЕНТНОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

При использовании двухслойных разностных схем с весом (20), (21) и (22) решение на новом слое по времени определяется из уравнения

$$(I + (\gamma + \sigma\tau)A)y^{n+1} = \chi^n$$

при заданной правой части

$$\chi^n = (I + (\gamma - (1-\sigma)\tau)A)y^n + \tau f^{n+\sigma}.$$

Упрощение этой задачи достигается использованием аддитивного представления (5) оператора A, когда решаются отдельные подзадачи для операторов $A_\alpha, \alpha = 1,2,\dots,p$. При построении схем расщепления для задачи (1), (2), (5) естественно ориентироваться на достижения теории и практики [10], [11] аддитивных операторно-разностных схем для стандартных эволюционных задач с $\gamma = 0$.

При аддитивном представлении операторной матрицы $\mathbf{A}$ вместо (9) используется уравнение

$$\mathbf{B}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{p}\mathbf{A}_\alpha\mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{24}$$

Принимая во внимание (5) и (11), положим

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\alpha = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} I + \gamma p A_\alpha & -I \\ -I & I \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1,2,\dots,p. \tag{25}$$

Для операторов (25) имеем

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* \ge 0, \quad \mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^{p}\mathbf{A}_\alpha \ge 0, \quad \mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha^* \ge 0, \quad \alpha = 1,2,\dots,p. \tag{26}$$

Наиболее важным является свойство неотрицательности операторов $\mathbf{A}_\alpha$, $\alpha = 1,2,\dots,p$.

Для приближенного решения задачи (10), (24)–(26) можно использовать различные варианты схем расщепления. При двухкомпонентном расщеплении ($p = 2$) наибольший интерес представляют факторизованные аддитивные операторно-разностные схемы, которые являются операторными аналогами классических схем переменных направлений [8], [11]. В случае многокомпонентного расщепления ($p > 2$) можно ориентироваться на схемы покомпонентного расщепления, регуляризованные и векторные аддитивные схемы. Для того, чтобы не загромождать текст техническими деталями, рассмотрим чисто неявные схемы покомпонентного расщепления.

Схемы покомпонентного решения для задачи (10), (24)–(26) связываются с последовательным решением цепочки задач

$$\mathbf{B}\frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt} + \mathbf{A}_\alpha\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha(t), \quad t^n < t \le t^{n+1}, \quad \alpha = 1,2,\dots,p, \tag{27}$$

$$\mathbf{u}_1(t^n) = \mathbf{u}_p(t^n), \quad \mathbf{u}_\alpha(t^n) = \mathbf{u}_{\alpha-1}(t^{n+1}), \quad \alpha = 2,3,\dots,p, \tag{28}$$

при расщеплении правой части:

$$\mathbf{f} = \sum_{\alpha=1}^{p}\mathbf{f}_\alpha, \quad \mathbf{f}_\alpha = \{0, \gamma f_\alpha\}, \quad f = \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha, \quad \alpha = 2,3,\dots,p.$$

Для начального состояния имеем

$$\mathbf{u}_1(0) = \tilde{\mathbf{u}}^0, \quad \tilde{\mathbf{u}}^0 = \{u^0, \tilde{v}^0\}, \quad \tilde{v}^0 = u^0 + \gamma p A_p u^0. \tag{29}$$

Для приближенного решения каждой промежуточной задачи (27)–(29) будем использовать чисто неявную схему так, что

$$\mathbf{B}\frac{\mathbf{y}^{n+\alpha/p} - \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \mathbf{A}_\alpha\mathbf{y}^{n+\alpha/p} = \mathbf{f}_\alpha^{n+1}, \quad \alpha = 1,2,\dots,p, \quad n = 0,1,\dots, \tag{30}$$

при задании начальных условий

$$\mathbf{y}^0 = \tilde{\mathbf{u}}^0. \tag{31}$$

Применительно к системе уравнений (6), (7) схема (30) дает

$$y^{n+\alpha/p} + \gamma p A_\alpha y^{n+\alpha/p} - w^{n+\alpha/p} = 0, \tag{32}$$

$$\gamma p \frac{w^{n+\alpha/p} - w^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} - y^{n+\alpha/p} + w^{n+\alpha/p} = \gamma p f_\alpha^{n+1}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p. \tag{33}$$

Начальные условия для (32), (33) имеют вид

$$y^0 = u^0, \quad w^0 = \tilde{v}^0. \tag{34}$$

Схема (32)–(34) дает следующую покомпонентную схему расщепления для исходного уравнения (3):

$$\frac{y^{n+\alpha/p} + \gamma p A_\alpha y^{n+\alpha/p} - y^{n+(\alpha-1)/p} - \gamma p A_{\alpha-1} y^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + A_\alpha y^{n+\alpha/p} = f_\alpha^{n+1}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{35}$$

$$y^0 = u^0. \tag{36}$$

Переход на новый $n+1$ слой по времени обеспечивается решением p уравнений

$$(I + (\gamma p + \tau)A_\alpha) y^{n+\alpha/p} = \chi_\alpha^n,$$

$$\chi_\alpha^n = (I + \gamma p A_{\alpha-1}) y^{n+(\alpha-1)/p} + \tau f_\alpha^{n+1}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p.$$

Сформулируем аналог теоремы (2).

Теорема 3. *Схема покомпонентного расщепления* (29), (30), (31) *безусловно устойчива, при этом имеет место априорная оценка*

$$\|w^{n+1}\| \le \|\tilde{v}^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|f_\alpha^{k+1}\|, \quad n = 0,1,\ldots . \tag{37}$$

Доказательство. Домножим уравнение (30) на $\tau\mathbf{y}^{n+\alpha/p}$ и, учитывая неотрицательность операторов A_α, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, получаем

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}^{n+\alpha/p} - \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/p}), \mathbf{y}^{n+\alpha/p}) \le \tau(\mathbf{f}_\alpha^{n+1}, \mathbf{y}^{n+\alpha/p}), \quad \alpha = 1,2,\ldots,p. \tag{38}$$

Для оценки сверху правых частей привлекается неравенство

$$(\mathbf{f}_\alpha^{n+1}, \mathbf{y}^{n+\alpha/p}) = \gamma(f_\alpha^{n+1}, w^{n+\alpha/p}) \le \gamma \|f_\alpha^{n+1}\| \|w^{n+\alpha/p}\|.$$

Левая часть (38) оценивается снизу:

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}^{n+\alpha/p} - \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/p}), \mathbf{y}^{n+\alpha/p}) = \gamma((w^{n+\alpha/p} - w^{n+(\alpha-1)/p}), w^{n+\alpha/p}) \ge \gamma\left(\|w^{n+\alpha/p}\| - \|w^{n+(\alpha-1)/p}\|\right)\|w^{n+\alpha/p}\|.$$

С учетом этого из (33) следует

$$\|w^{n+\alpha/p}\| \le \|w^{n+(\alpha-1)/p}\| + \tau\|f_\alpha^{n+1}\|, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p.$$

На целых шагах по времени получим неравенство

$$\|w^{n+1}\| \le \|w^n\| + \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|f_\alpha^{n+1}\|, \quad n = 0,1,\ldots,$$

из которого следует оценка устойчивости (37).

Замечание 4. При рассмотрении схемы (35), (36) оценка (37) принимает вид

$$\|(I + \gamma p A_p) y^{n+1}\| \le \|(I + \gamma p A_p) u^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|f_\alpha^{k+1}\|, \quad n = 0,1,\ldots .$$

Сходимость схем покомпонентного расщепления не следует напрямую из соответствующих оценок устойчивости типа (35). Для исследования точности привлекается понятие суммарной аппроксимации [8], [11]. С учетом этого осложняющего обстоятельства при построении схем расщепления можно ориентироваться, например, на векторные аддитивные схемы, в которых проблемы аппроксимации решаются более просто.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. V. 1. Berlin: Springer, 2000.
2. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М: Физматлит, 2007.
3. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity: An Introduction. New York: Academic Press, 1982.
4. *Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M.* Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. Kluwer Academic Publ., 1989.
5. *Showalter R.E., Ting T.W.* Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1970. V. 1. № 1. P. 1–26.
6. *Knabner P., Angermann L.* Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations. New York: Springer, 2003.
7. *Quarteroni A., Valli A.* Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
8. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes. New York: Marcel Dekker, 2001.
9. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения нестационарных задач. М.: ЛЕНАНД, 2021.
10. *Marchuk G.I.* Splitting and alternating direction methods // Handbook of Numerical Analysis. V. I. North-Holland, 1990. P. 197–462.
11. *Vabishchevich P.N.* Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes. Berlin: de Gruyter, 2013.
12. *Vabishchevich P.* On a new class of additive (splitting) operator-difference schemes // Mathematics of Computation. 2012. V. 81. № 277. P. 267–276.
13. *Vabishchevich P.N., Grigor'ev A.V.* Splitting schemes for pseudoparabolic equations // Differential Equations. 2013. V. 49. № 7. P. 807–814.
14. *Vabishchevich P.N.* Flux-splitting schemes for parabolic equations with mixed derivatives // Comput. Mathematics and Mathematical Physics. 2013. V. 53. № 8. P. 1139–1152.