

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 519.63

АНАЛИЗ ЗАКОНОВ СГУЩЕНИЯ СЕТОК В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ  
НА ПРИМЕРЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ  
ПЛАСТИНЫ ВЯЗКИМ ГАЗОМ<sup>1)</sup>© 2022 г. А. Н. Кудрявцев<sup>1,2,\*</sup>, В. Д. Лисейкин<sup>2,3,\*\*</sup>, А. В. Мухортов<sup>2,\*\*\*</sup><sup>1</sup> 630090 Новосибирск, ул. Институтская, 4/1, Институт теоретической  
и прикладной механики СО РАН, Россия<sup>2</sup> 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, Новосибирский государственный университет, Россия<sup>3</sup> 630090 Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 6, Федеральный исследовательский центр  
информационных и вычислительных технологий, Россия

\*e-mail: alex@itam.nsc.ru

\*\*e-mail: liseikin.v@gmail.com

\*\*\*e-mail: a.mukhortov@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 10.10.2021 г.  
Переработанный вариант 21.01.2022 г.  
Принята к публикации 11.03.2022 г.

Численно исследуется решение задачи о течении вязкого сжимаемого газа над плоской пластиной, помещенной в сверхзвуковой поток под нулевым углом атаки. Решаются двумерные уравнения Навье–Стокса для различных чисел Рейнольдса с применением адаптивных сеток, сгущающихся в зоне пограничного слоя. Рассматриваются разностные сетки, построенные с помощью координатных преобразований, устраняющих пограничные слои различных типов. В серии вычислительных экспериментов проведен анализ характеристик численных решений (значение и порядок погрешности, значение и порядок скачка решения, время расчета) и сделаны выводы о преимуществах и недостатках, а также допустимости использования каждого закона сгущения сетки в пограничном слое для нахождения численного решения данной задачи. Новизна работы состоит в анализе специальных адаптивных сеток и их использовании для решения задач, имеющих применение в различных областях сверхзвуковой аэродинамики и газодинамики. Библ. 16. Фиг. 14. Табл. 7.

**Ключевые слова:** адаптивная сетка, пограничный слой, обтекание пластины, уравнения Навье–Стокса, вязкий газ, сверхзвуковой поток.

DOI: 10.31857/S0044466922080075

## ВВЕДЕНИЕ

Конструирование специальных разностных сеток является одним из подходов в создании алгоритмов решения задач с пограничными и внутренними слоями. Такими являются задачи, характеризующиеся наличием малого параметра  $\varepsilon$  в коэффициентах при старших производных. Наиболее популярной и хорошо изученной является двухточечная задача для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$-\varepsilon + d(y)]^\alpha u'' + a(y, u)u' + f(y, u) = 0, \quad \alpha > 0, \quad d(y) \geq 0, \quad 0 < y < 1, \quad (1)$$

$$u(0) = A_0, \quad u(1) = A_1,$$

моделирующая качественное поведение решений различных многомерных задач относительно координаты  $y$ , трансверсальной к пограничному слою (см. [1]). Задача (1) для  $d(y) = 0$  аналитически исследована в [2], [3] и [4], где было показано, что ее решение может иметь экспоненциальные пограничные слои и степенные II рода внутренние слои, а в [1] продемонстрировано, что для более произвольных функций  $d(y)$ ,  $a(y, u)$  и  $f(y, u)$  решения могут иметь другие слои, в час-

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке А.Н. Кудрявцева РНФ (проект № 18-11-00246) и В.Д. Лисейкина, А.В. Мухортова РФФИ (код проекта № 20-01-00231).

ности, степенные I рода, логарифмические и смешанные пограничные и внутренние слои. Для экспоненциального пограничного слоя возле  $y = 0$  справедливы следующие оценки производных решения:

$$|u^{(p)}(y, \varepsilon)| \leq M \left[ \varepsilon^{-pk} \exp(-by/\varepsilon^k) + 1 \right], \quad b > 0, \quad 1 \leq p \leq n, \quad 0 \leq y \leq m, \quad (2)$$

для степенного первого типа –

$$|u^{(p)}(y, \varepsilon)| \leq M \left[ \varepsilon^{bk} / (\varepsilon^k + y)^{b+p} + 1 \right], \quad b > 0, \quad 1 \leq p \leq n, \quad 0 \leq y \leq m, \quad (3)$$

для степенного второго типа –

$$|u^{(p)}(y, \varepsilon)| \leq M \left[ (\varepsilon^k + y)^{b-p} + 1 \right], \quad 1 > b > 0, \quad 1 \leq p \leq n, \quad 0 \leq y \leq m, \quad (4)$$

для логарифмического пограничного слоя –

$$|u^{(p)}(y, \varepsilon)| \leq M \left[ 1 + (\varepsilon^k + y)^{-p} / \ln(1/\varepsilon) \right], \quad 1 \leq p \leq n, \quad 0 \leq y \leq m, \quad (5)$$

где  $M$ ,  $b$  и  $m$  – некоторые положительные константы, не зависящие от  $\varepsilon$ , а  $k > 0$  – масштаб пограничного слоя, т.е. первая производная в точке  $y = 0$  оценивается величиной  $m/\varepsilon^k$ . В частности, для задач газовой динамики с граничным условием прилипания масштаб пограничного слоя равен  $1/2$  в предположении  $\varepsilon = M/Re$ .

Конечно, для реальной задачи пограничный слой может быть и нового типа, который еще предстоит открыть, однако, выражения (2)–(5) показывают многообразие структур пограничных слоев.

Очевидным, но не единственным, представителем функции пограничного слоя является для: экспоненциального типа –

$$u(y, \varepsilon) = \exp(-y/\varepsilon^k), \quad y > 0, \quad (6)$$

степенного первого рода –

$$u(y, \varepsilon) = \varepsilon^k / (\varepsilon^k + y), \quad y > 0, \quad (7)$$

степенного второго рода –

$$u(y, \varepsilon) = (\varepsilon^k + y)^b, \quad 0 < b < 1, \quad y > 0, \quad (8)$$

логарифмического типа –

$$u(y, \varepsilon) = \ln(\varepsilon^k + y) / \ln(\varepsilon), \quad y > 0. \quad (9)$$

Слоем для  $n$ -й производной функции является узкий интервал, в котором значения данной производной не ограничены при  $\varepsilon$ , стремящемся к нулю, а вне слоя они равномерно ограничены (см. [1, с. 17]). Длина этого интервала будет шириной слоя. Так, для функции (6) с экспоненциальным пограничным слоем его ширина равна  $(kn/b)\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ ; для функции (7) ширина равна  $m\varepsilon^{k/(n+1)}$ ; для функции (8) ширина равна  $m$ ; для функции (9) ширина равна  $m/(\ln(1/\varepsilon))^{1/n}$ , где  $m$  – константа, не зависящая от  $\varepsilon$ .

Высокоэффективными для решения задачи (1) с экспоненциальными слоями являются сетки Бахвалова (см. [2]) и Шишкина (см. [5]). Однако для других слоев вида (3)–(5) их сетки не столь эффективны, так как эти слои несравнимо шире экспоненциальных (см. [6]). Сетки для решения задачи (1) с такими слоями описаны в [7].

Перспективными для численного решения задачи (1) являются алгоритмы, использующие координатные преобразования  $y(\xi, \varepsilon) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , устраняющие сингулярности высокого порядка решений  $u(y, \varepsilon)$ , т.е. производные относительно зависимой переменной  $u_1(\xi, \varepsilon) = u[y(\xi, \varepsilon), \varepsilon]$  по  $\xi$  должны быть равномерно ограничены по  $\varepsilon$ :

$$\left| \frac{d^j}{d\xi^j} u[y(\xi, \varepsilon), \varepsilon] \right| \leq M, \quad j \leq n, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (10)$$

где константа  $M$  не зависит от параметра  $\varepsilon$ , число  $n$  зависит от порядка аппроксимации задачи (чем больше порядок, тем больше  $n$ ). Координатные преобразования  $y(\xi, \varepsilon) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , устраняющие сингулярности, порождают сгущающиеся в слоях сетки  $y_i, i = 0, 1, \dots, N, y_0 = 0, y_N = 1$  с помощью формулы  $y_i = y(i/N, \varepsilon)$ . На таких сетках разности значений численного решения в соседних узлах (как в слое, так и вне слоя) при увеличении числа узлов уменьшаются равномерно по  $\varepsilon$  в такой же пропорции, т.е. при утроении числа узлов скачок решения уменьшается втрое. Принцип построения таких преобразований для  $n \leq 3$  был сформулирован в [1] для решения задачи (1) со специальными функциями  $d(y), a(y, u)$  и  $f(y, u)$  на простой схеме первого порядка с направленными разностями. Была доказана равномерная по малому параметру сходимость первого порядка численного решения к точному. Однако для гарантии большего порядка сходимости для схем высокого порядка эти преобразования не подходят. Причина в том, что сетки, полученные с помощью этих координатных преобразований, не обеспечивают сгущение узлов в слоях для высших производных, входящих в погрешность аппроксимации задачи схемами высокого порядка, так как эти слои шире слоев для производных меньшего порядка. Далее, схемы высокого порядка, в отличие от схемы с направленными разностями, не обладают, как правило, свойством обратной монотонности, которая позволяет установить связь между ошибкой решения и погрешностью аппроксимации и, таким образом, доказать равномерную по малому параметру сходимость. Для таких схем равномерную сходимость можно обосновать только численными расчетами (см. [8]). В этих случаях координатные преобразования для построения сеток, обеспечивающих равномерную сходимость высокого порядка, должны удовлетворять (10) для больших  $n$ . Такие преобразования могут быть использованы для формулировки метрик в методах построения адаптивных многомерных сеток как структурных (см. [9]), так и неструктурных (см. [10]).

Оценки (10) могут гарантировать равномерную сходимость для преобразованной задачи относительно зависимой переменной  $u_1(\xi, \varepsilon) = u[y(\xi, \varepsilon), \varepsilon]$  на равномерной сетке, так как погрешность аппроксимации будет равномерно ограничена для  $n \geq p + 2$ , где  $p$  – порядок схемы. Возможно, равномерная сходимость высокого порядка будет и для задачи в физической переменной  $u$ . Более того, численное решение может быть равномерно проинтерполировано на весь интервал  $[0, 1]$ .

Ранее созданные алгоритмы генерации сеток (см. [1]), ориентированные на применение только схем первого порядка точности и только для постоянного коэффициента вязкости при старшей производной, были модифицированы в [7] для обеспечения равномерности погрешности решения как в слое, так и вне слоя при использовании схем произвольного порядка точности и при зависимости от координаты параметра при второй производной. В модифицированном алгоритме обеспечивается ограниченность в новых переменных производных до порядка, равного порядку производной в главном члене погрешности разностной схемы, тем самым осуществляется автоматическая настройка механизма генерации сетки к конкретной разностной схеме, порядок точности которой является входным параметром специального координатного преобразования, генерирующего сетку (см. [8]).

На практике часто приходится решать задачи, в которых нет точной информации о структуре пограничного слоя или эта структура может существенно меняться. В частности, к таким задачам относятся многочисленные задачи об обтекании тел вязким сжимаемым газом, при численном решении которых в настоящее время обычно применяются схемы сквозного счета высоких порядков. Простейшим прототипом подобных задач является задача о сверхзвуковом обтекании плоской пластины. Уже в ней явно построить координатное преобразование, удовлетворяющее (10), затруднительно, поскольку течение вблизи передней кромки не описывается уравнениями пограничного слоя, и здесь нужно использовать полные уравнения Навье–Стокса. Кроме того, существенное влияние на течение оказывает исходящая с передней кромки искривленная ударная волна.

В настоящей статье на примере данной задачи рассматривается стратегия построения эффективных расчетных сеток в подобных случаях. Она основана на использовании для построения сеток известных координатных преобразований, устраняющих особенности (2)–(5). Можно надеяться, что такой подход позволит строить более эффективные сетки и повысить точность решения и при численном моделировании обтекания тел сложной формы, часто встречающихся в различных практических приложениях.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Рассматривается двумерная задача о сверхзвуковом обтекании плоской пластины под нулевым углом атаки потоком вязкого теплопроводного газа. Решаются уравнения Навье–Стокса, записанные в виде системы законов сохранения

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{M}{\text{Re}} \left( \frac{\partial F^v}{\partial x} + \frac{\partial G^v}{\partial y} \right). \tag{11}$$

Здесь векторы консервативных переменных  $Q$ , невязких потоков  $F, G$  и вязких потоков  $F^v, G^v$  равны соответственно

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{pmatrix},$$

$$F^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad G^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\tau_{xx} = \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Система уравнений замыкается уравнением состояния совершенного газа

$$p = \frac{\rho T}{\gamma}. \tag{13}$$

В (11)–(13)  $u, v$  – компоненты вектора скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление;  $e = p/(\gamma - 1) + \rho(u^2 + v^2)/2$  – полная энергия на единицу объема;  $\tau$  – тензор вязких напряжений;  $\kappa = \mu/[(\gamma - 1)\text{Pr}]$  – коэффициент теплопроводности;  $T$  – температура;  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости (зависимость вязкости от температуры аппроксимировалась по формуле Сазерленда  $\mu = T^{1.5}(1 + C/T_\infty^*)/(T + C/T_\infty^*)$ ,  $C$  – постоянная Сазерленда);  $\text{Re}_L = \rho_\infty^* U_\infty^* L^*/\mu_\infty^*$  – число Рейнольдса, вычисляемое по параметрам набегающего потока (индекс “ $\infty$ ”) и длине пластины  $L^*$ ;  $M, U_\infty$  – число Маха и скорость набегающего потока;  $\text{Pr}$  – число Прандтля; индекс “\*” соответствует размерным величинам.

Расчетная область для численного решения представляет собой прямоугольник размером  $1 \times 0.32$ . Для системы уравнений (11)–(13) ставятся следующие граничные и начальные условия. На поверхности пластины требуется выполнение условия прилипания:  $u|_\Gamma = 0$ . Кроме того, требуется задать граничное условие для температуры: на поверхности пластины было наложено адиабатическое температурное условие, т.е. тепловой поток через поверхность пластины предполагается равным нулю, что означает равенство нулю производной по нормали к поверхности:  $(\partial T/\partial n)|_\Gamma = 0$ . На входной границе значения всех переменных задаются равными определенным значениям, соответствующим параметрам входного потока. Выходная граница полагается свободной.

Если часть границы расчетной области лежит на оси  $y = 0$ , то продольная компонента  $u(x, y)$  вектора скорости  $u = (u, v)$  решения задачи для уравнений (11)–(13) является функцией пограничного слоя в окрестности этой части границы относительно переменной  $y$ . В общем случае структура пограничного слоя для данной задачи неизвестна. Однако некоторую информацию о возможной структуре можно получить из анализа модельной задачи с малым параметром  $\epsilon$ :

$$-\epsilon u'' + a(y)u' + f(y, u, \epsilon) = 0, \quad a(0) = 0, \quad 0 < y < 1, \tag{14}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = A_1,$$

являющейся частным случаем задачи (1). Уравнение в (14) получается из стационарного уравнения ( $u_t = 0$ ) для компоненты  $u$ , которое может быть записано в виде

$$-\frac{M}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = g\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, x, y\right), \quad (15)$$

если предположить, что  $\varepsilon = M/\text{Re}$ ,  $x$  – параметр, правая часть равномерно ограничена по  $\varepsilon$ ,  $a(y)$  соответствует  $\rho v(x, y)$ , а  $f(y, u, \varepsilon)$  соответствует правой части уравнения (15).

В [1] было показано, что если  $f_u(y, u, \varepsilon) > 0$ , то в зависимости от значения производной функции  $a(y)$  в точке  $y = 0$  решение задачи (14) может иметь экспоненциальный пограничный слой, если  $a'(0) = 0$ ; степенной слой первого типа, если  $a'(0) > 0$ ; смешанный (комбинация экспоненциального и степенного слоя второго типа), если  $a'(0) < 0$ .

Оценки производных функции  $u(x, y)$  по переменной  $y$  в пограничном слое для обтекания пластины вязким несжимаемым газом можно было бы получить из автомодельного уравнения  $f''' + ff'' = 0$ ,  $u = f' \partial \xi / \partial y$ ,  $\xi = 1/2y\sqrt{u_\infty/\mu x}$ , если было бы известно его аналитическое решение. Однако такое решение неизвестно, а из численных расчетов непонятно, как получить оценки производных.

В данной работе исследуется гиперзвуковое течение газа (число Маха  $M = 6, 10$ ). Уравнения решались для различных чисел Рейнольдса  $\text{Re}$  (10000, 100000, 1000000). Число Прандтля  $\text{Pr}$  предполагается равным 0.72.

Расчеты численного решения производились разработанным в ИТПМ СО РАН (см. [11]) расчетным кодом CFS. При вычислении невязких потоков использовалась схема MP5 (Monotonicity–Preserving, 5th–order), имеющая 5-й порядок на гладких решениях, вязкие члены вычислялись с помощью центральных разностей 4-го порядка на компактном шаблоне (см. [11]). Уравнения интегрировались по времени с помощью схемы Рунге–Кутты 2-го порядка. Расчеты производились до установления стационарного решения (бралось значение времени установления стационарного решения  $T_{\text{setsol}} = 1$ ), шаг  $\Delta t$  интегрирования по времени выбирается из условия Куранта–Фридрихса–Леви

$$\Delta t \leq \frac{CFL}{\max_{i,j} \left[ \frac{|u_{ij}| + a_{ij}}{\Delta x_i} + \frac{|v_{ij}| + a_{ij}}{\Delta y_j} + \frac{2\gamma\mu M}{\rho \text{Re Pr}} \left( \frac{1}{(\Delta x_i)^2} + \frac{1}{(\Delta y_j)^2} \right) \right]},$$

где  $a$  – скорость звука,  $CFL$  – число Куранта–Фридрихса–Леви, предполагаемое равным 0.4 в данной задаче.

Данный программный код создан для расчета на многопроцессорных ЭВМ и был распараллелен с помощью библиотеки MPI (Message Passage Interface) путем геометрической декомпозиции расчетной области на подобласти, каждая из которых присваивается определенному вычислительному ядру процессора. В расчетах использовались восемь шестиядерных процессоров Intel Xeon X5670 с тактовой частотой 2932 МГц вычислительного комплекса Информационно-вычислительного центра НГУ (см. [12]).

### 1.1. Преобразования, генерирующие адаптивные сетки

Для построения сетки вблизи границы  $y = 0$  берется бесконечно дифференцируемая функция  $\phi(\xi, \varepsilon)$ ,  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ , а для значений  $\xi_0 \leq \xi \leq 1$  эта функция доопределяется многочленом с соблюдением гладкости класса  $C^l[0, 1]$ :

$$y = \Phi(\xi, \varepsilon, l, \xi_0) = \begin{cases} c_1 \phi(\xi, \varepsilon), & 0 \leq \xi \leq \xi_0, \\ c_1 [\phi(\xi_0, \varepsilon) + \phi'(\xi_0, \varepsilon)(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \phi''(\xi_0, \varepsilon)(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{l!} \phi^{(l)}(\xi_0, \varepsilon)(\xi_0)(\xi - \xi_0)^l + c_0(\xi - \xi_0)^{l+1}], & \xi_0 \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad (16)$$

где  $l \leq n$ ,  $c_0 > 0$ , и, например,  $c_0 = 1$ ; константа  $c_1 > 0$  выбирается из условия  $\Phi(1, \varepsilon, l, \xi_0) = 1$ . Параметр  $\xi_0$  в (16) означает долю длины отрезка, отображаемую в предполагаемую зону пограничного слоя, границей которого условно считается точка, в которой производная решения по физической координате равна константе, не зависящей от  $\varepsilon$ . В частности, при равномерной сетке по  $\xi$  число  $\xi_0$  означает долю от общего числа шагов сетки, попадающих в пограничный слой.

**1.1.1. Базисные локальные преобразования.** Для построения адаптивных сеток, сгущающихся в слое возле границы  $y = 0$ , в качестве функции  $\Phi(1, \varepsilon, l, \xi_0)$  в (16) используются локальные преобразования  $y_i(\xi, \varepsilon, k, a)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , имеющие следующий вид:

$$y_1(\xi, \varepsilon, k, a) = -\frac{\varepsilon^k}{a} \ln(1 - d\xi), \quad k > 0, \quad a > 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \tag{17}$$

$$y_2(\xi, \varepsilon, k, a) = \varepsilon^k \left[ (1 - d\xi)^{-1/a} - 1 \right], \quad k > 0, \quad a > 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \tag{18}$$

$$y_3(\xi, \varepsilon, k, a) = \left( \varepsilon^{ka} + d\xi \right)^{1/a} - \varepsilon^k, \quad k > 0, \quad 1/n > a > 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \tag{19}$$

$$y_4(\xi, \varepsilon, k, a) = \varepsilon^k \left[ (1 + \varepsilon^{-k})^{a\xi} - 1 \right], \quad k > 0, \quad a > 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \tag{20}$$

$$y_5(\xi, \varepsilon, k, a) = 2\sigma\xi, \quad \sigma = \min\{0.5, (n/a)\varepsilon^k \ln N\}, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0. \tag{21}$$

В качестве малого параметра  $\varepsilon$  рассматривается  $M/Re$ .

Параметр  $k$  отвечает за масштаб и ширину пограничного слоя, а параметр  $a$  влияет на ширину пограничного слоя.

Преобразование  $y_1(\xi, \varepsilon, k, a)$  при  $k = 1$  было предложено в [2], а  $y_5(\xi, \varepsilon, k, a)$  – в [5] для генерации сеток в экспоненциальных слоях, тогда как  $y_i(\xi, \varepsilon, k, a)$ ,  $i = 2, 3, 4$ , были предложены в [13], [14], а  $y_2(\xi, \varepsilon, k, a)$  при  $a = 1$ ,  $k = 1/2$  в [15]. Преобразование  $y_2(\xi, \varepsilon, k, a)$  применяется для построения сеток в экспоненциальных и степенных слоях первого рода,  $y_3(\xi, \varepsilon, k, a)$  – в степенных слоях II рода и  $y_4(\xi, \varepsilon, k, a)$  – в логарифмических слоях.

**1.1.2. Глобальные модифицированные преобразования, устраняющие пограничные слои.** Локальные преобразования (17)–(21) используются для построения глобальных преобразований, устраняющих пограничные слои (2)–(4), с помощью их масштабирования и склейки с полиномиальной функцией.

**Преобразования для экспоненциальных пограничных слоев.** Модифицированное преобразование Г.И. Шишкина класса  $C^2[0, 1]$ , действующее из  $[0, 1]$  на  $[0, 1]$ , полученное из функции (21), имеет вид

$$y_{Sh}(\xi, \varepsilon, k, a) = \begin{cases} 2\sigma\xi, & 0 \leq \xi \leq 1/2, \\ \sigma + 2\sigma(\xi - 1/2) + \omega(\xi - 1/2)^3, & 1/2 \leq \xi \leq 1, \end{cases} \tag{22}$$

где  $\sigma = \min\{0.5, (n/a)\varepsilon^k \ln N\}$ , число  $\xi_0 = 1/2$  и  $\omega$  выбирается из соотношения  $y_{Sh}(1, \varepsilon, k, a) = 1$ , т.е.  $\omega = 8(1 - 2\sigma)$ .

Преобразование класса  $C^2[0, 1]$ , действующее из  $[0, 1]$  на  $[0, 1]$ , полученное из локального преобразования Н.С. Бахвалова (17) путем гладкого продолжения за пределом интервала пограничного слоя, устраняющее экспоненциальные особенности масштаба  $k$ , имеет вид

$$y_{Bakh}(\xi, \varepsilon, k, a) = \begin{cases} c_1 \left[ -\frac{\varepsilon^k}{a} \ln(1 - d\xi) \right], & 0 \leq \xi \leq \xi_0, \\ c_1 \left[ \frac{k\varepsilon^k}{na} \ln(\varepsilon^{-1}) + \frac{d\varepsilon^{k(1-1/n)}}{a} (\xi - \xi_0) + \frac{d^2\varepsilon^{k(1-2/n)}}{2a} (\xi - \xi_0)^2 + c_0(\xi - \xi_0)^3 \right], & \xi_0 \leq \xi \leq 1, \end{cases} \tag{23}$$

где  $d = (1 - \varepsilon^{k/n})/\xi_0$ ,  $a > 0$ ,  $c_0 > 0$  и константа  $c_1$  выбирается из соотношения  $y_{\text{Bakh}}(1, \varepsilon, k, a) = 1$ , т.е.

$$\frac{1}{c_1} = \left[ \frac{k\varepsilon^k}{na} \ln(\varepsilon^{-1}) + \frac{d\varepsilon^{k(1-1/n)}}{a} (1 - \xi_0) + \frac{d^2\varepsilon^{k(1-2/n)}}{2a} (1 - \xi_0)^2 + c_0(1 - \xi_0)^3 \right].$$

Константа  $a$  влияет на ширину пограничного слоя, а константа  $\xi_0$  задает количество точек сетки в пограничном слое. В [7] было доказано, что это преобразование устраняет экспоненциальную особенность (2) до порядка  $n$  при  $0 < a \leq b/n^2$ .

**Преобразования для экспоненциальных и степенных пограничных слоев.** Преобразование класса  $C^2[0, 1]$ , действующее из  $[0, 1]$  на  $[0, 1]$ , предложенное В.Д. Лисейкиным в [7] и устраняющее в пограничном слое экспоненциальные и степенные I рода особенности масштаба  $k$ , имеет вид

$$y_{\text{Lis1}}(\xi, \varepsilon, k, a) = \begin{cases} c_1 \varepsilon^k \left[ (1 - d\xi)^{-1/a} - 1 \right], & 0 \leq \xi \leq \xi_0, \\ c_1 \left[ \varepsilon^{k\beta n} - \varepsilon^k + d \frac{1}{a} \varepsilon^{k\beta(n-1)} (\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} d^2 \frac{1}{a} \left( \frac{1}{a} + 1 \right) \varepsilon^{k\beta(n-2)} (\xi - \xi_0)^2 + c_0 (\xi - \xi_0)^3 \right], & \xi_0 \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad (24)$$

где  $d = (1 - \varepsilon^{k\beta})/\xi_0$ , при этом  $\beta = a/(1 + na)$ ,  $a > 0$ ,  $c_0 > 0$  и константа  $c_1 > 0$  выбирается из условия  $y_{\text{Lis1}}(1, \varepsilon, k, a) = 1$ , т.е.

$$\frac{1}{c_1} = \left[ \varepsilon^{k\beta n} - \varepsilon^k + d \frac{1}{a} \varepsilon^{k\beta(n-1)} (1 - \xi_0) + \frac{1}{2} d^2 \frac{1}{a} \left( \frac{1}{a} + 1 \right) \varepsilon^{k\beta(n-2)} (1 - \xi_0)^2 + c_0 (1 - \xi_0)^3 \right].$$

В [7] было доказано, что это преобразование устраняет экспоненциальную особенность (2) до порядка  $n$  при произвольном  $a > 0$ , а степенную особенность I рода (3) при  $0 < a \leq b/n^2$ .

Для устранения степенной особенности II рода (4) используется масштабированное преобразование (19):

$$y_3(\xi, \varepsilon, k, a) = \frac{(\varepsilon^{k_1 a} + d\xi)^{1/a} - \varepsilon^{k_1}}{(\varepsilon^{k_1 a} + d)^{1/a} - \varepsilon^{k_1}}, \quad k_1 = \frac{k}{1-a}, \quad k > 0, \quad (25)$$

для которого в [7] было доказано, что это преобразование устраняет до порядка  $n$  степенную особенность II рода при  $0 < a \leq \min(b/n, 1/n)$ .

**Преобразование для логарифмических особенностей.** Преобразование класса  $C^2[0, 1]$ , действующее из  $[0, 1]$  на  $[0, 1]$ , предложенное в [7] для логарифмических особенностей масштаба  $k$  (5), имеет вид

$$y_{\text{Lis2}}(\xi, \varepsilon, k) = \begin{cases} c_1 \varepsilon^k \left[ \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon^k \ln(\varepsilon^{-k})} \right)^{\xi/\xi_0} - 1 \right], & 0 \leq \xi \leq \xi_0, \\ c_1 \left[ \ln^{-1}(\varepsilon^{-k}) + 2(\varepsilon^k + \ln^{-1}(\varepsilon^{-k})) \ln \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon^k \ln(\varepsilon^{-k})} \right) (\xi - \xi_0) + c_0 (\xi - \xi_0)^2 \right], & \xi_0 \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad (26)$$

где  $c_0 > 0$  и константа  $c_1 > 0$  выбирается из условия  $y_{\text{Lis2}}(1, \varepsilon, k) = 1$ , т.е.

$$\frac{1}{c_1} = \left[ \ln^{-1}(\varepsilon^{-k}) + 2(\varepsilon^k + \ln^{-1}(\varepsilon^{-k})) \ln \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon^k \ln(\varepsilon^{-k})} \right) (1 - \xi_0) + c_0 (1 - \xi_0)^2 \right].$$

Преобразование (20) (при не очень малом  $\varepsilon$ ) применяется также в качестве глобального для логарифмических особенностей масштаба  $k$ :

$$y_4(\xi, \varepsilon, k, a) = \frac{(1 + \varepsilon^{-k})^{a\xi} - 1}{(1 + \varepsilon^{-k})^a - 1}, \quad k > 0, \quad a > 0. \quad (27)$$

При этом преобразование (27) имеет отношение к известному преобразованию Эриксона (см. [16])  $y(\xi, d) = (e^{d\xi} - 1)/(e^d - 1)$ , которое не имеет явную зависимость от  $\varepsilon$ , но при  $d = \ln(1 + \varepsilon^{-k})$  совпадает с преобразованием (27) для  $a = 1$ .

### 1.2. Исследуемые характеристики численных решений

Расчетная область численного решения представляет собой прямоугольник размером  $1 \times 0.32$ , нижняя сторона которого совпадает с поверхностью пластины. Расчеты численных решений задачи выполнялись на прямоугольной сетке, состоящей из  $N_{xy}$  ячеек. Сетка по продольной координате  $x$  равномерная с фиксированным числом узлов  $N_x = 192$ ; при построении сетки в нормальном к пластине направлении  $y$  использовались исследуемые адаптивные сетки.

Важной особенностью расчетного кода является способ задания точек, в которых вычисляются неизвестные значения величин. Точки расположены в центрах ячеек, а не в узлах ячейки построенной сетки.

Так как точное решение не известно, то под “точным” решением подразумевается численное решение, полученное на самой подробной сетке в процессе ее детализации. Для апостериорной оценки погрешности (т.е. разности между приближенным и точным решением) на сгущающихся сетках при неизвестном точном решении использовалась разность приближенных решений на двух последовательных сетках

$$\delta_t = \max_{i=1}^{N_t} |u_{3i}^{N_{t+1}} - u_i^{N_t}|, \quad t = 1, 2, \quad (28)$$

где  $u^{N_t}$  – приближенное решение на сетке с  $N_t$  узлами.

По оценкам погрешности вычислялась оценка реально наблюдаемого порядка точности

$$p_1 = \log_3(\delta_1/\delta_2). \quad (29)$$

Важной характеристикой специальных адаптивных сеток является значение скачка численного решения в близлежащих узлах в зоне пограничного слоя. Для оценки данной характеристики использовался модуль приращения решения на шаге

$$du_t = \max_{i=1}^{\hat{N}_t} |u_{i+1}^{N_t} - u_i^{N_t}|, \quad t = 1, 2, 3, \quad (30)$$

где  $\hat{N}_t$  – количество узлов сетки ниже положения ударной волны.

По полученным значениям скачка численного решения оценивался порядок скачка решения

$$p_2' = \log_3(du_t/du_{t+1}), \quad t = 1, 2. \quad (31)$$

Заметим, что если решение задачи не имеет пограничных и внутренних слоев, то для численного решения этой задачи с использованием схемы порядка  $p$  на равномерной сетке значения  $p_1$  близки к  $p$ , а  $p_2$  близки к 1.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

### 2.1. Выбор параметров и рассмотренные случаи

Во всех рассматриваемых случаях предполагается, что параметр  $k$ , отвечающий за масштаб пограничного слоя, для данного типа задач равен 0.5 (см. [7]). Параметр  $n$ , характеризующий порядок схемы, предполагается равным 4.

Для каждого преобразования подбирались оптимальные значения неизвестных параметров. Идея алгоритма поиска заключается в следующем: значения параметров варьировались в интер-



**Таблица 1.** Значения погрешности и скачка решения с использованием преобразования (25)

$N_{y,t}$	$M = 6, Re = 10000$					$M = 6, Re = 100000$				
	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2'$	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2'$
51	1	—	—	0.297	—	1	—	—	0.568	—
153	6	0.017	—	0.099	1	4	0.052	—	0.192	0.987
459	420	0.003	1.58	0.033	1	72	0.009	1.6	0.064	1

Примечание. В табл. 1–7  $N_{y,t}$  – количество узлов в поперечном направлении  $y$ ,  $T_{clock}$  – время расчета в часах.

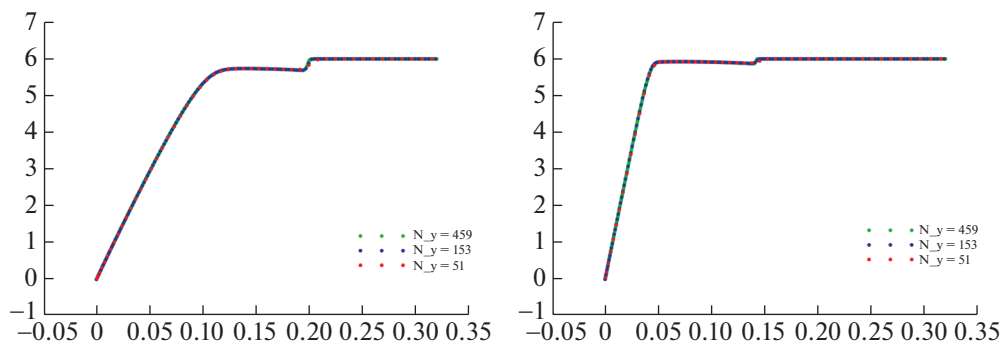
вале их допустимых значений и подбирались так, чтобы их влияние на время расчетов и значение погрешности численного решения было минимальным при изменении малого параметра  $\epsilon = M/Re$ , т.е. при изменении чисел  $M$  и  $Re$ .

Для всех предложенных преобразований были произведены расчеты численных решений при параметре Маха  $M = 6$  для двух различных чисел Рейнольдса  $Re$  (10000, 100000).

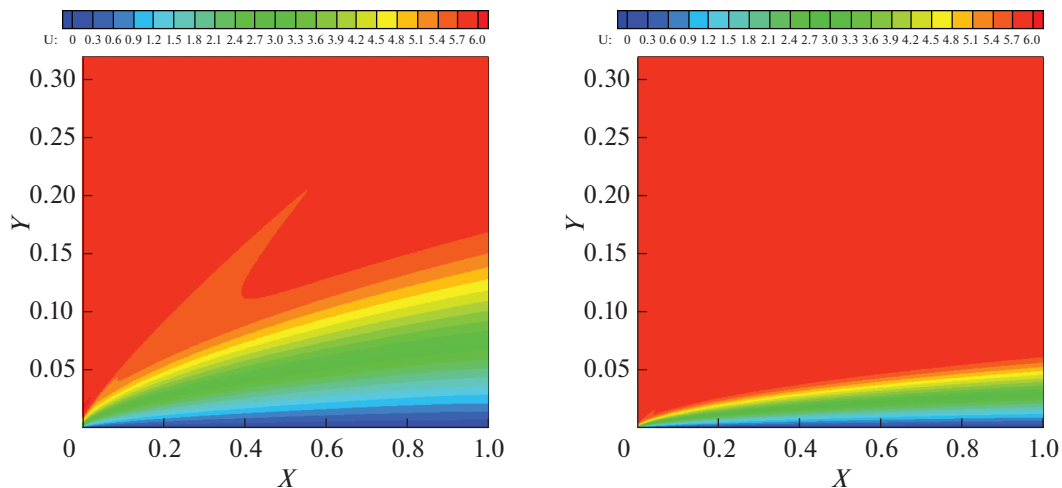
Для каждого численного эксперимента помимо характеристик (28)–(31) приводится время расчета в часах  $T_{clock}$ .

*2.2. Расчеты с использованием глобальных модифицированных преобразований*

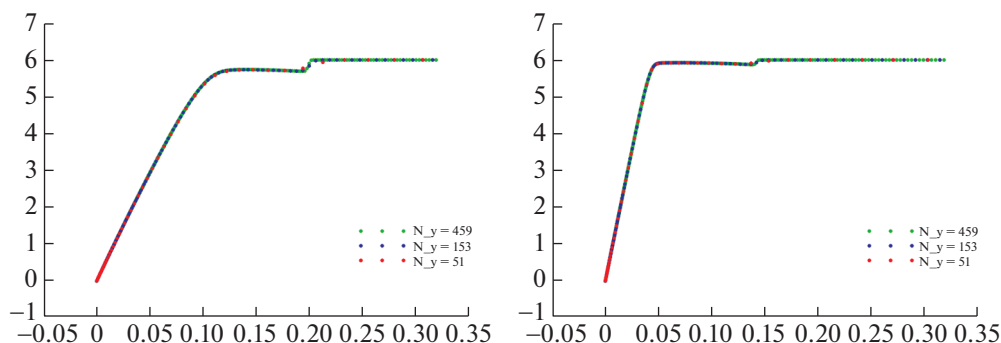
Были произведены расчеты с использованием преобразования (25)  $y_3(\xi, \epsilon, a, k)$ , где  $d = 1$  и значение параметра  $a$  равно 0.65. Полученные результаты предвставлены в табл. 1 и на фиг. 1, 2.



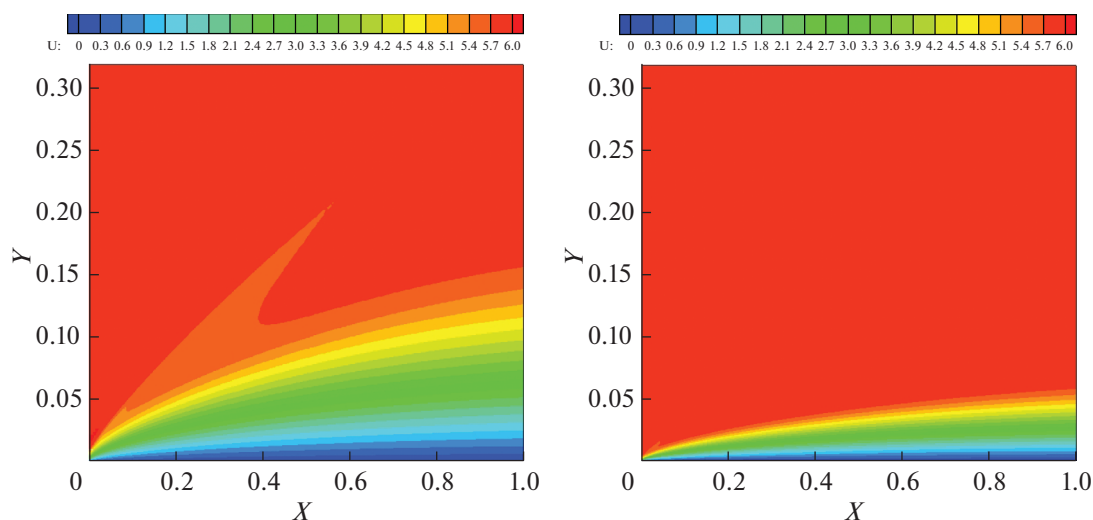
**Фиг. 1.** Профили продольной скорости и значения в узлах сетки с использованием преобразования (25): (а) – при  $Re = 10000$ , (б) – при  $Re = 100000$  ( $M = 6$ ).



**Фиг. 2.** Расчетные поля продольной скорости с использованием преобразования (25): (а) – при  $Re = 10000$ , (б) – при  $Re = 100000$  ( $M = 6$ ).



Фиг. 3. Профили продольной скорости и значения в узлах сетки с использованием преобразования (27): (а) – при  $Re = 10000$ , (б) – при  $Re = 100000$  ( $M = 6$ ).



Фиг. 4. Расчетные поля продольной скорости с использованием преобразования (27): (а) – при  $Re = 10000$ , (б) – при  $Re = 100000$  ( $M = 6$ ).

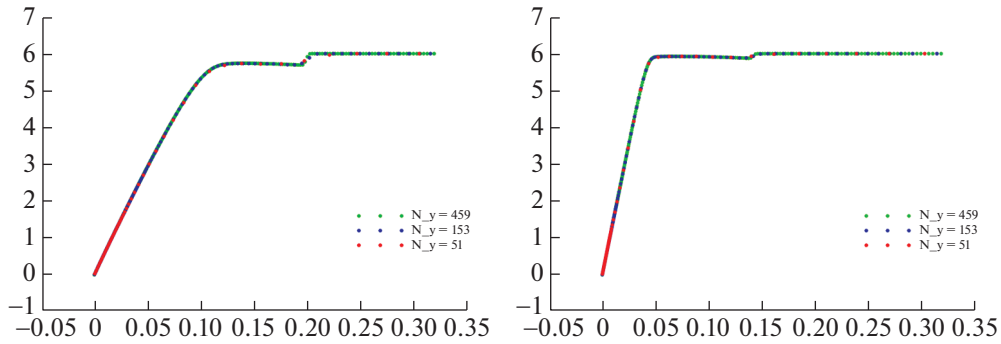
Можно сделать следующие выводы: использование данного преобразования возможно только при больших ( $>100\ 000$ ) значениях числа Рейнольдса  $Re$ , иначе время расчетов  $T_{clock}$  превышает 400 ч. Кроме того, большая часть узлов попадает в зону вне пограничного слоя.

Так же были произведены расчеты с использованием преобразования (27)  $y_4(\xi, \epsilon, a, k)$  при значении  $a = 1$ . Полученные результаты представлены в табл. 2 и на фиг. 3, 4. Можно сделать следующие выводы: использование данного преобразования невозможно из-за слишком большого времени расчетов  $T_{clock}$ , требующегося для достижения установившегося решения.

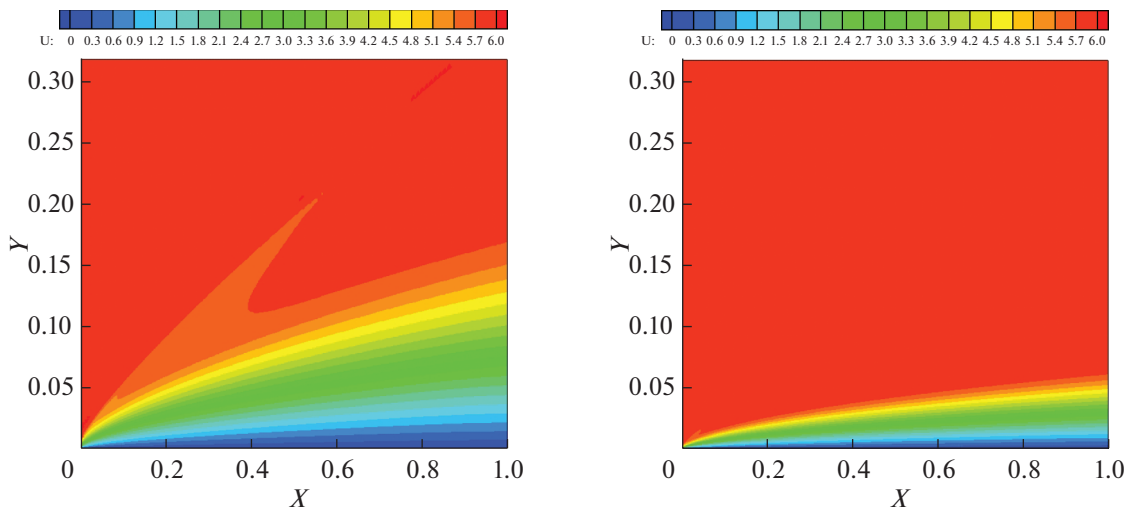
Были произведены расчеты с использованием преобразования (22)  $y_{sh}(\xi, \epsilon, a, k)$  при значении параметра  $a = 2$ . Полученные результаты представлены в табл. 3 и на фиг. 5, 6. Можно сделать

Таблица 2. Значения погрешности и скачка решения с использованием преобразования (27)

$N_{y,t}$	$M = 6, Re = 10000$					$M = 6, Re = 100000$				
	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$
51	1	–	–	0.152	–	2	–	–	0.25	–
153	15	0.003	–	0.056	0.909	18	0.001	–	0.093	0.9
459	336	0.002	0.3669	0.019	0.984	373	0.001	0	0.033	0.943



Фиг. 5. Профили продольной скорости и значения в узлах сетки с использованием преобразования (22): (а) – при  $Re = 10000$ , (б) – при  $Re = 100000$  ( $M = 6$ ).



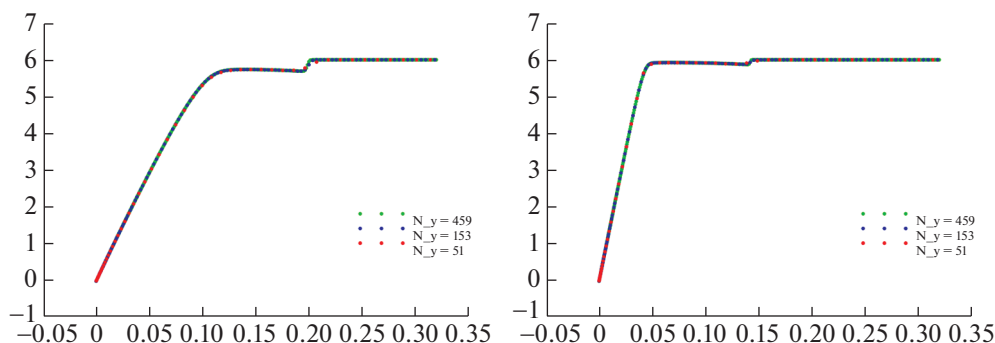
Фиг. 6. Расчетные поля продольной скорости с использованием преобразования (22): (а) – при  $Re = 10000$ , (б) – при  $Re = 100000$  ( $M = 6$ ).

следующие выводы: использование данного преобразования возможно при любых значениях числа Рейнольдса  $Re$ , время расчетов  $T_{clock}$  оказалось одним из наименьших среди всех рассмотренных законов сгущения. Недостаток данного преобразования – высокое значение погрешности, которое не уменьшается при увеличении значения числа  $N_y$ . Кроме того, сгущение узлов осуществляется только на части пограничного слоя, что свидетельствует о том, что пограничный слой не экспоненциального типа.

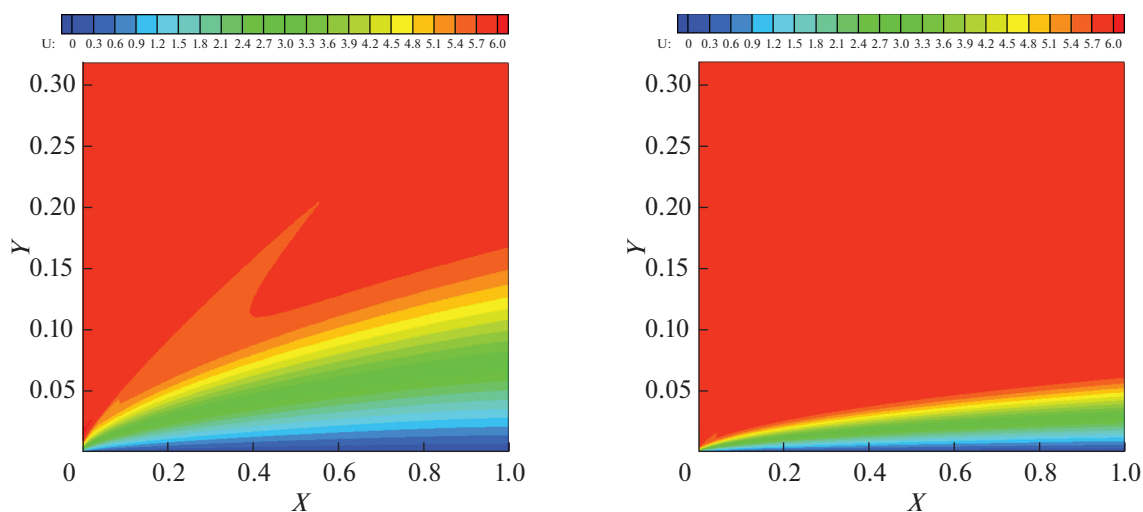
Расчеты с использованием преобразования (23)  $y_{Bakh}(\xi, \epsilon, k, a)$  оказались безуспешными, так как ни варьирование параметра  $a$ , отвечающего за ширину пограничного слоя, ни варьирование параметра  $\xi_0$ , отвечающего за долю длины отрезка, отображаемую в предполагаемую зону погра-

Таблица 3. Значения погрешности и скачка решения с использованием преобразования (22)

$N_{y,t}$	$M = 6, Re = 10000$					$M = 6, Re = 100000$				
	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2'$	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2'$
51	1	–	–	0.0628	–	1	–	–	0.0468	–
153	1	0.406	–	0.0269	0.773	1	0.305	–	0.02	0.774
459	12	0.411	–0.011	0.011	0.813	20	0.319	–0.041	0.0081	0.823



Фиг. 7. Профили продольной скорости и значения в узлах сетки с использованием преобразования (26): (а) – при  $Re = 10000$ , (б) – при  $Re = 100000$  ( $M = 6$ ).



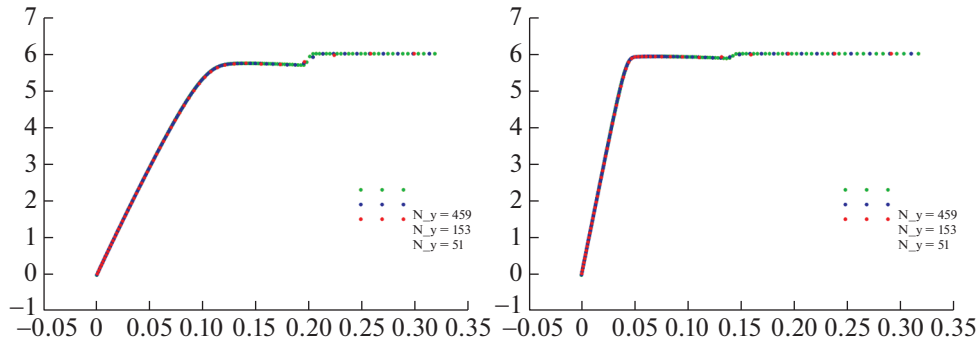
Фиг. 8. Расчетные поля продольной скорости с использованием преобразования (26): (а) – при  $Re = 10000$ , (б) – при  $Re = 100000$  ( $M = 6$ ).

ничного слоя, не дало таких значений параметров, при которых расчеты численных решений производились бы за “разумное” время – данное преобразование чрезмерно сильно сгущает расчетную сетку вблизи точки  $\xi = 0$ , вследствие чего шаг по времени слишком мал. Данное преобразование не подходит для расчета численных решений задач с таким типом слоев.

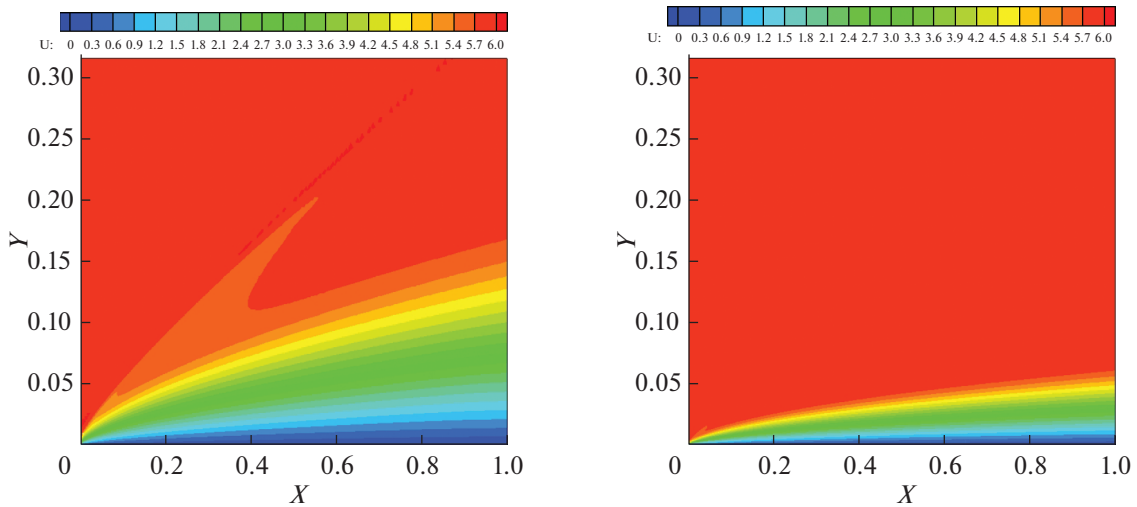
Были произведены расчеты с использованием преобразования (26)  $y_{LiS2}(\xi, \epsilon, k)$  при значении параметра  $\xi_0 = 0.5$ . Полученные результаты представлены в табл. 4 и на фиг. 7, 8. Можно сделать следующие выводы: использование данного преобразования возможно при любых значениях числа Рейнольдса  $Re$ , но время расчетов  $T_{clock}$  превышает 160 ч при значении числа  $N_y = 459$ . Кроме того, сгущение узлов происходит на части пограничного слоя.

Таблица 4. Значения погрешности и скачка решения с использованием преобразования (26)

$N_{y,t}$	$M = 6, Re = 10000$					$M = 6, Re = 100000$				
	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2'$	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2'$
51	1	–	–	0.36	–	1	–	–	0.76	–
153	8	0.009	–	0.133	0.906	9	0.056	–	0.237	1.06
459	204	0.001	2	0.046	0.966	168	0.003	2.66	0.079	1



**Фиг. 9.** Профили продольной скорости и значения в узлах сетки с использованием преобразования (24): (а) – при  $Re = 10000$ , (б) – при  $Re = 100000$  ( $M = 6$ ).



**Фиг. 10.** Расчетные поля продольной скорости с использованием преобразования (24): (а) – при  $Re = 10000$ , (б) – при  $Re = 100000$  ( $M = 6$ ).

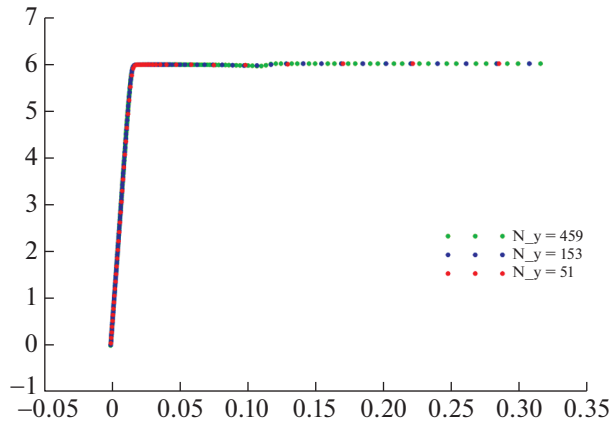
Были произведены расчеты с использованием преобразования (24)  $y_{Lis1}(\xi, \epsilon, a, k)$  при значении параметров  $\xi_0$ , равном 0.8 и  $a = 2$ . Полученные результаты представлены в табл. 5 и на фиг. 9, 10. Можно сделать следующие выводы: использование данного преобразования возможно при любых значениях числа Рейнольдса  $Re$ , время расчетов  $T_{clock}$  оказалось самым наименьшим среди всех рассмотренных законов сгущения. Так же отметим малое значение погрешности, которое стремительно уменьшается при увеличении значения числа  $N_y$ .

*2.3. Расчеты для других чисел M и Re с использованием преобразования для экспоненциальных и степенных особенностей*

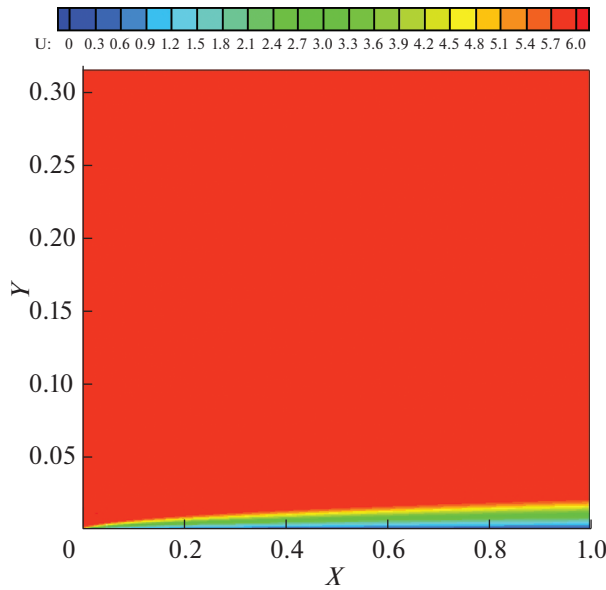
Проанализировав результаты численных экспериментов с использованием каждого из рассматриваемых законов сгущения для числа Маха  $M = 6$  и чисел Рейнольдса 10000 и 100000, было

**Таблица 5.** Значения погрешности и скачка решения с использованием преобразования (24)

$N_{y,t}$	$M = 6, Re = 10000$					$M = 6, Re = 100000$				
	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$
51	1	–	–	0.15	–	1	–	–	0.213	–
153	4	0.005	–	0.052	0.964	3	0.017	–	0.074	0.962
459	18	0.002	0.834	0.018	0.966	12	0.003	1.58	0.025	0.988



Фиг. 11. Профили продольной скорости и значения в узлах сетки с использованием преобразования (24) при  $Re = 1000000$  и  $M = 6$ .

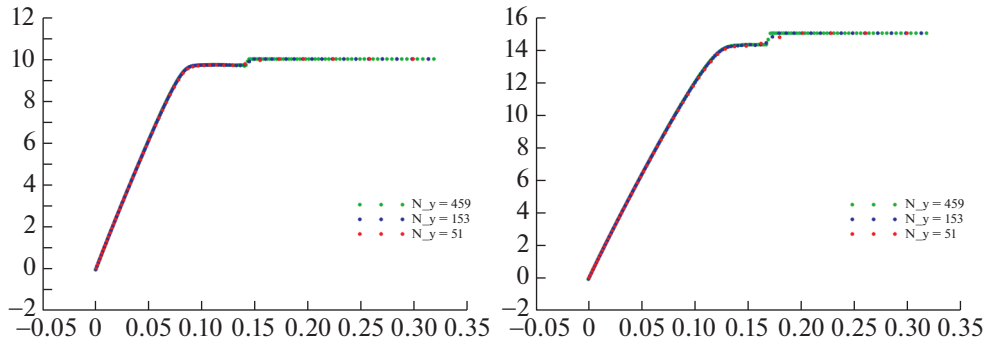


Фиг. 12. Расчетное поле продольной скорости с использованием преобразования (24) при  $Re = 1000000$  и  $M = 6$ .

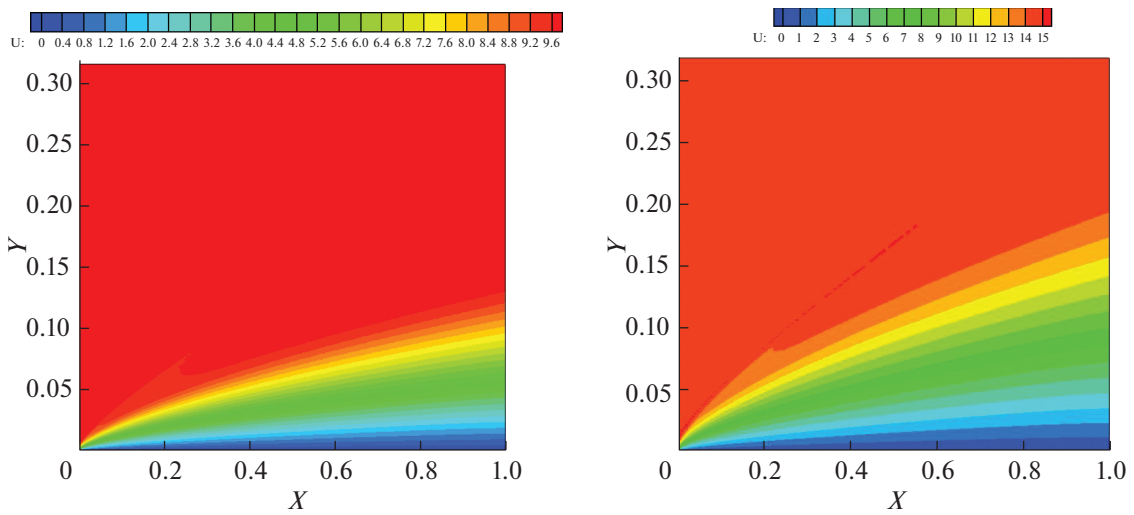
выявлено, что преобразование (24)  $y_{Lis1}(\xi, \epsilon, a, k)$  отличается от всех других глобальных преобразований не только значительно меньшим временем расчетов, но и лучшими значениями исследуемых численных характеристик, а также лучшим распределением узлов в зоне пограничного слоя (так как узлы не только наиболее распределены в зоне пограничного слоя, но и также более равномерно) по сравнению с другими сетками. Поэтому были произведены расчеты с использо-

Таблица 6. Значения погрешности и скачка решения с использованием преобразования (24)

$N_{y,t}$	$M = 6, Re = 1000000$				
	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$
51	1	—	—	0.283	—
153	2	0.064	—	0.099	0.956
459	10	0.005	2.32	0.034	0.973



Фиг. 13. Профили продольной скорости и значения в узлах сетки с использованием преобразования (24): (а) – при  $M = 10$ , (б) – при  $M = 15$  ( $Re = 100000$ ).



Фиг. 14. Расчетные поля продольной скорости с использованием преобразования (24): (а) – при  $M = 10$ , (б) – при  $M = 15$  ( $Re = 100000$ ).

ванием данного преобразования при тех же значениях параметров  $\xi_0$  и  $b$ , но при других значениях чисел Маха  $M$  и Рейнольдса  $Re$ , чтобы проанализировать поведение закона сгущения сеток при различных числах  $M$  и  $Re$ .

Произведены расчеты с использованием преобразования (24)  $y_{Lisl}(\xi, \epsilon, a, k)$  при значении числа Маха  $M = 6$  и числа Рейнольдса  $Re = 1000000$ . Полученные результаты представлены в табл. 6 и на фиг. 11, 12. Можно сделать следующие выводы: время расчетов  $T_{clock}$  не превысило 10 ч, а значение погрешности также осталось невелико.

Также были произведены расчеты с использованием преобразования (24)  $y_{Lisl}(\xi, \epsilon, b, k)$  при значении чисел Маха  $M = 10$  и  $15$  и числа  $Re = 100000$ . Полученные результаты представлены в

Таблица 7. Значения погрешности и скачка решения с использованием преобразования (24)

$N_{y,t}$	$M = 10, Re = 100000$					$M = 15, Re = 100000$				
	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$	$T_{clock}$	$\delta_t$	$p_1$	$du_t$	$p_2^t$
51	1	–	–	0.313	–	1	–	–	0.348	–
153	2	0.018	–	0.108	0.969	3	0.022	–	0.12	0.969
459	18	0.004	1.37	0.037	0.975	57	0.008	0.921	0.041	0.978

табл. 7 и на фиг. 13, 14. Можно сделать следующие выводы: время расчетов  $T_{\text{clock}}$  значительно не увеличилось после увеличения числа Маха  $M$ , и значение погрешности так же осталось невелико.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования были проанализированы базисные преобразования для генерации адаптивных сеток и преобразования Н.С. Бахвалова, В.Д. Лисейкина и Г.И. Шишкина с оптимальными значениями параметров для построения сеток в пограничных слоях. В серии численных экспериментов для задачи сверхзвукового обтекания плоской пластины вязким газом были исследованы оценки погрешности и порядка точности численных решений, оценки значений скачка решения в близлежащих узлах и порядок скачка решения, а также рассмотрено время расчетов с использованием данных сеток. Показано, что преобразование (24), сконструированное для численных расчетов задач с экспоненциальными и степенными слоями, является наиболее эффективным для исследования сверхзвукового обтекания плоской пластины вязким газом и может использоваться при численных расчетах задач такого типа для достижения качественных результатов с наименьшими затратами времени.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liseikin V.D.* Layer Resolving Grids and Transformations for Singular Perturbation Problems. VSP, Utrecht, 2001.
2. *Бахвалов Н.С.* Об оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–859.
3. *Berger A.E., Han H., Kellog R.B.* A priori estimates of a numerical method for a turning point problem // Math. Comput. 1984. V. 42. № 166. P. 465–492.
4. *Farrell P.A.* A uniformly convergent difference scheme for turning point problems. In Miller J.J.H. ed. Boundary and Interior Layers, Computational and Asymptotic Methods, Boole Press, Dublin, 1980. P. 270–274.
5. *Шишкин Г.И.* Разностная схема для сингулярно возмущенного уравнения параболического типа с разрывным начальным условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 11. С. 1649–1662.
6. *Liseikin V.D., Karasuljic S.* Numerical analysis of grid-clustering rules for problems with power of the first type boundary layers // Comput. Technolog. 2020. V. 25. № 1. P. 49–65.
7. *Liseikin V.D.* Grid generation for problems with boundary and interior layers // Novosibirsk: NGU, 2018.
8. *Liseikin V.D., Paasonen V.I.* Compact difference schemes and layer-resolving grids for numerical modeling of problems with boundary and interior layers // Numer. Anal. and Appl. 2019. V. 12. № 1. P. 1–17.
9. *Liseikin V.D.* Grid Generation Methods. Springer, third ed. Berlin, 2017.
10. *Белокрыс-Федотов А.И., Гаранжа В.А., Кудрявцева Л.Н.* Построение сеток Делоне в неявных областях с обострением ребер // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 11. С. 1931–1948.
11. *Кудрявцев А.Н., Поплавская Т.В., Хотяновский Д.В.* Применение схем высокого порядка точности при моделировании нестационарных сверхзвуковых течений // Матем. моделирование. 2007. Т. 19. № 7. С. 39–55.
12. Информационно-вычислительный центр Новосибирского государственного университета. [Электронный ресурс]. URL: <http://nusc.nsu.ru/> (дата обращения: 25.01.2021).
13. *Лисейкин В.Д.* О численном решении уравнений со степенным пограничным слоем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 12. С. 1813–1820.
14. *Лисейкин В.Д.* О численном решении сингулярно возмущенных уравнений с точками поворота // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 12. С. 1812–1818.
15. *Vulanovic R.* Mesh construction for numerical solution of a type of singular perturbation problems // Numer. Meth. Approx. Theory. 1984. P. 137–142.
16. *Eriksson L.E.* Generation of boundary-conforming grids around wing-body configurations using transfinite interpolation // AIAA J. 1982. V. 20. P. 1313–1320.