

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.85

УПРАВЛЕНИЕ ЧИСЛЕННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ ФУНКЦИИ
ЛОКАЛЬНОГО РАЗМЕРА ДЛЯ АДАПТАЦИИ
АНИЗОТРОПНЫХ ГИБРИДНЫХ СЕТОК© 2022 г. Л.-М. Тенкес^{1,*}, Ф. Алозе^{1,**}¹ 91190 Инрия Сакле, Палезо, Франция

*e-mail: lucille-marie.tenkes@inria.fr

**e-mail: frederic.alauzet@inria.fr

Поступила в редакцию 09.10.2021 г.

Переработанный вариант 21.01.2022 г.

Принята к публикации 11.04.2022 г.

Адаптация сетки на основе управляющей метрики применена для построения гибридной треугольно-четырёхугольной сетки. На основе метрически-ортогонального размещения вершин сетки создается предварительная квазиструктурированная сетка. Затем структурированные четырёхугольные фрагменты сетки восстанавливаются в подобластях с наибольшей анизотропией метрики. Для решения этой задачи обеспечивается численная гладкость метрического поля. Это достигается с помощью процесса контроля роста локального целевого размера по всей сетке. Наименьшие значения локального размера распространяются по области с помощью алгоритма пересечения метрик. Продемонстрирована важность контроля градации размеров в процессе построения гибридной сетки на основе метрики. Основной целью является разработка процесса коррекции градаций, который благоприятствует выравниванию (сонаправленности ячеек сетки) с метрическим полем, увеличивает относительное количество и улучшает качество анизотропных четырёхугольников. Сравниваются несколько стратегий управления градацией, чтобы определить, какая из них лучше всего подходит для генерации гибридных сеток. Библ. 14. Фиг. 15.

Ключевые слова: сетка с преобладанием четырёхугольников, гибридная сетка, сетка со смешанными элементами, адаптация сеток, метрически-ортогональная сетка, градация метрики.

DOI: 10.31857/S0044466922080130

1. ВВЕДЕНИЕ

Адаптация сеток доказала, что может значительно улучшить численное моделирование, как с точки зрения точности, так и в плане производительности процессора. В частности, генерация на основе метрики — это математически хорошо поставленная задача, которая позволяет автоматически генерировать высокоанизотропные, адаптированные, неструктурированные сетки. Однако по-прежнему существует большая потребность в структурированных сетках, поскольку во многих численных схемах предпочтение отдается четырёхугольным или шестигранным элементам, например, в пограничных слоях для моделирования вязких и турбулентных потоков. Поскольку адаптация структурированных сеток не так развита и надежна, как неструктурированных, гибридные сетки представляются подходящим альтернативным решением. Гибридная сетка — это сетка, в которой присутствуют как структурированные, так и неструктурированные области. Данное исследование сосредоточено на формировании сетки с преобладанием четырёхугольников с использованием предварительной квазиструктурированной треугольной сетки. Существует несколько стратегий восстановления некоторой структуры в треугольной сетке, и это во многих случаях является предварительным шагом косвенных методов генерации четырёхугольных сеток (см. [1]). Например, L^p -центроидальная тесселяция Вороного заключается в перемещении вершин сетки для структурирования ее двойственных ячеек (см. [2], [3]). Она также может быть соединена с некоторыми ограничениями, связанными с выравниванием вдоль полей направлений (см. [4]), или непосредственно применена к четырёхугольной (см. [5]). Другим вариантом является ориентация на правильные треугольники при оптимизации формы элемен-

тов (см. [6], [7]). Мы решили использовать *метрически-ортогональное* размещение точек (см. [8], [9]) для обеспечения специальной структуры в наших треугольных сетках. Этот процесс сильно зависит от качества метрического поля, особенно от его гладкости. Действительно, резкое изменение размеров приводит к образованию тупых углов треугольников (см. далее фиг. 2), что без необходимости нарушает выравнивание элементов в метрически-ортогональных сетках. Эти разрывы в размерах, вероятно, будут препятствовать формированию четырехугольников.

Следовательно, актуальным является контроль градации размеров. Такая коррекция заключается в обеспечении минимального уменьшения метрики в каждой вершине, чтобы рост размера был ограничен. Это уже является важным шагом в стандартной адаптации сетки, поскольку метрические поля, восстановленные из численных решений, как правило, проявляют сильные вариации, особенно, когда речь идет об очень анизотропных эффектах. Целью данного исследования является модификация существующего метода управления градацией размеров, основанного на распространении по области предписанного наименьшего размера и его коррекции с помощью алгоритма пересечения метрик (см. [10]). Сравниваются несколько алгоритмов, способствующих формированию четырехугольников и улучшению их качества.

В разд. 2 речь идет об основах генерации сеток на основе метрики, а в разд. 3 подробно описываются алгоритмы управления градацией размеров. Численные результаты и влияние метода на генерацию гибридных сеток обсуждаются в разд. 4.

2. СОЗДАНИЕ МЕТРИКИ И СЕТКИ

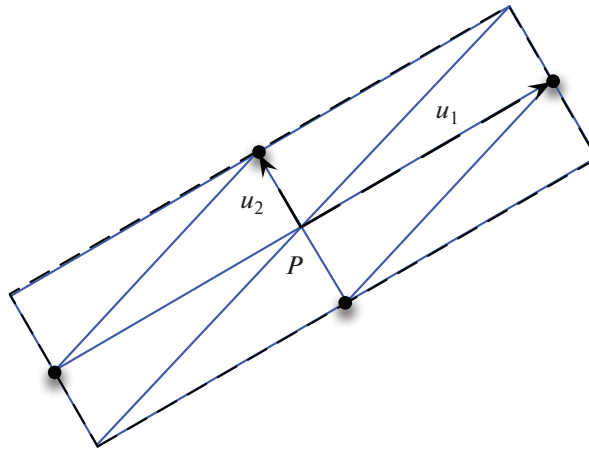
В этом разделе кратко излагаются некоторые полезные определения и свойства римановых метрических полей. Эти поля используются при построении сетки для задания функции размера в области. Более полная информация о метрических полях и понятии единичной сетки представлена в [11]–[13].

Метрический тензор в \mathbb{R}^n , $n \in \{2, 3\}$, – это симметричный, положительно-определенный тензор размера n , позволяющий определить скалярное произведение. Обозначение \mathcal{M} в данной работе чаще всего относится к метрике. Векторное пространство $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$, снабженное таким скалярным произведением, называется евклидовым метрическим пространством. Частный случай $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F})$, где \mathcal{F} – единичная матрица, в дальнейшем называется *физическим пространством*. Расстояние между двумя точками \mathbf{p} и \mathbf{q} – это расстояние, определяемое скалярным произведением и нормой \mathcal{M} , определяющее также длину отрезка \mathbf{pq} , обозначаемого $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{pq})$. Понятия углов и объемов распространяются на евклидово метрическое поле. В случае переменного метрического поля можно определить риманово метрическое пространство. Оно состоит из непрерывного многообразия Ω , снабженного непрерывным метрическим полем $\mathcal{M}(\cdot)$, обозначаемым $(\mathcal{M}(\mathbf{x}))$. В этом случае поле $(\mathcal{M}(\mathbf{x}))$ не определяет скалярное произведение, но изменяет вычисление расстояний, углов и объемов. Длина ребра \mathbf{pq} вычисляется с помощью параметризации прямой линии $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{pq}$, $t \in [0, 1]$, поэтому

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{pq}) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\mathcal{M}} dt = \int_0^1 \sqrt{\mathbf{pq}^T \mathcal{M}(\mathbf{p} + t\mathbf{pq}) \mathbf{pq}} dt.$$

Исходя из этого нового вычисления длины, мы определяем единичное ребро как ребро, длина которого находится между $1/\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ в данном метрическом поле. Таким образом, единичная сетка – это сетка, в которой все ребра единичны. Данная схема дает непрерывный эквивалент проблемы адаптации сетки. Вместо того, чтобы искать наилучшую дискретную сетку для данного решения, мы ищем ее непрерывный эквивалент в метрическом поле. Затем с помощью этого метрического поля создается единичная сетка. В римановом метрическом пространстве эта сетка единична, а в физическом пространстве она является адаптированной сеткой. Однако эта адаптированная сетка очень сильно зависит от качества метрического поля, поэтому необходима предварительная коррекция градаций размера.

Метрическое поле предоставляет свойственную ему информацию о направлении через собственные векторы. Метрически-ортогональный подход (см. [8], [9]) нацелен на использование этого поля направлений для генерации прямоугольных элементов. Точки вставляются итеративно, следуя методу подвижного фронта для размещения точек. Это размещение точек показано



Фиг. 1. Иллюстрация метрически-ортогонального размещения точек.

на фиг. 1. Из вершины \mathbf{p} в центре четыре точки \mathbf{p}_i^\pm могут быть созданы на основе метрики в этой вершине, используя собственные векторы $\mathbf{e}_i, i = 1, 2$, и размеры $h_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$, где λ_i – собственные значения

$$\mathbf{p}_i^\pm = \mathbf{p} \pm h_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2.$$

Метрические-ортогональные сетки являются квазиструктурными в областях, где коэффициент анизотропии метрики достаточно высок. Прямоугольные треугольники затем объединяются в четырехугольники для получения окончательной гибридной сетки. Чтобы предотвратить образование некачественных четырехугольников, этап объединения начинается с треугольников с наибольшим соотношением сторон и останавливается при достижении заданного порога. Этот метод дает удовлетворительные результаты в областях, где метрика сильно анизотропна, однако, когда она изотропна, ориентация собственных векторов не определена, поэтому не всегда образуются прямоугольные элементы.

Процесс иллюстрируется на примере крестообразного аналитически заданного метрического поля:

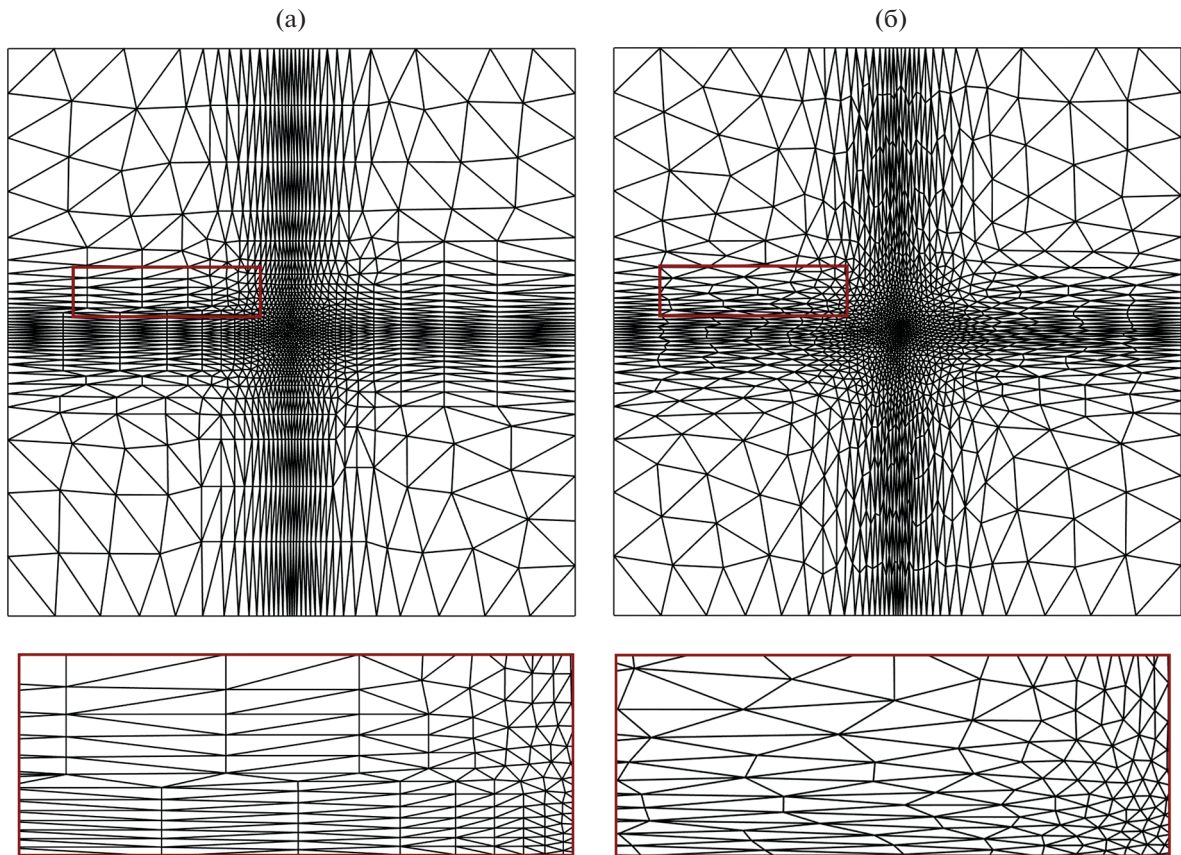
$$\mathcal{M}_{\text{cross}} = \begin{pmatrix} h_x^{-2} & 0 \\ 0 & h_y^{-2} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} h_x &= \min(2^{\alpha_x} \times h_{\min}, h_{\max}), \\ h_y &= \min(2^{\alpha_y} \times h_{\min}, h_{\max}), \\ h_{\min} &= 0.005, \quad h_{\max} = 0.1, \\ \alpha_x &= 20 \times |x - 0.5|, \quad \alpha_y = 20 \times |y - 0.5|. \end{aligned}$$

На фиг. 2 показаны построенные сетки с метрически-ортогональным размещением точек (фиг. 2а) и со стандартной адаптацией сетки (фиг. 2б). Обе сетки являются единичными сетками в одном и том же метрическом поле, разница заключается в стратегии размещения точек. Контроль градации размеров не применялся. Следовательно, на крупном плане метрически-ортогональной сетки (фиг. 2в) можно заметить нарушение выравнивания.

3. УПРАВЛЕНИЕ ГРАДАЦИЕЙ РАЗМЕРОВ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СЕТОК

В разд. 2 была представлена значимость управления градацией размеров для улучшения качества метрически-ортогональных сеток. В данном разделе подробно описывается основной принцип этого метода. Чтобы ввести определения и обозначения, метод сначала описывается для изотропных метрических полей, а затем распространяется на анизотропные метрические поля.

Пусть \mathcal{M} – *изотропное* метрическое поле, определенное во всей области Ω . Метрическое поле можно переписать в виде $\mathcal{M} = h(\mathbf{x})^{-2} I$, $\mathbf{x} \in \Omega$, где I – единичная матрица. Пусть \mathbf{p} и \mathbf{q} – две точки области с соответствующими размерами h_p и h_q . Для количественной оценки изменения разме-



Фиг. 2. Адаптивные сетки с метрически-ортогональным (а) и стандартным (б) размещениями.

ров мы определяем H -скачок (градацию размера) $c(\mathbf{pq})$, связанный с отрезком \mathbf{pq} из Ω как величину

$$c(\mathbf{pq}) = \max \left(\frac{h_p}{h_q}, \frac{h_q}{h_p} \right)^{1/\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{pq})},$$

которая представляет собой пространственную геометрическую прогрессию заданного размера в данной метрике.

Это понятие обобщает классическую геометрическую прогрессию размеров элементов: если она ограничена коэффициентом β , то следующий элемент в β раз больше предыдущего. Соответственно, если есть заданный размер h , и мы просим увеличить его со скоростью β , то на расстоянии $\ell_{\mathcal{M}}$ размер будет равен $h\beta^{\ell_{\mathcal{M}}}$. Изотропная коррекция размеров состоит в обеспечении минимального (оптимального) уменьшения $\tilde{\mathcal{M}}$ от \mathcal{M} так, чтобы для всех точек градация размеров была ограничена заданным порогом β . Эта поправка упорядочивает метрическое поле и ограничивает вариации. В дальнейшем предполагается, что $h_p < h_q$, поэтому \mathbf{p} — это вершина, которая корректирует размер в \mathbf{q} .

Метрическое поле известно только в вершинах сетки. Чтобы вычислить поправку численно, необходимо выбрать метод интерполяции. В зависимости от этого выбора коэффициент $r(\mathbf{pq}) = \beta^{\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{pq})}$ может быть вычислен непосредственно или с помощью алгоритма Ньютона. Этот аспект подробно рассмотрен в [10]. Например, используя линейную интерполяцию для h , получаем $r(\mathbf{pq}) = 1 + \ell_p(\mathbf{pq}) \ln(\beta)$. Чтобы переписать вычисления в терминах метрики вместо размеров, вводится коэффициент $\eta^2(\mathbf{pq}) = r(\mathbf{pq})^{-2}$. Используя ту же интерполяцию, $\eta^2(\mathbf{pq}) =$

$= (1 + \ell_p(\mathbf{p}\mathbf{q}) \ln(\beta))^{-2}$. Таким образом, метрика ограничений размера от \mathbf{p} до \mathbf{q} , обозначаемая $\tilde{M}_p(\mathbf{q})$, получается из M_p как

$$\tilde{M}_p(\mathbf{q}) = \eta^2(\mathbf{p}\mathbf{q}) M_p. \quad (1)$$

Данное уравнение также подходит для формализации управления градацией размеров в двумерных и трехмерных областях, если метрическое поле изотропно, т.е. $M = h(\mathbf{x})^{-2} I$. В случае сетки \mathcal{H} с дискретным метрическим полем, заданным в ее вершинах, каждая вершина предоставляет метрику для всех остальных вершин, которая накладывает свои ограничения на размер во всех направлениях. Итоговая метрика в вершине \mathbf{q} задается пересечением исправленных метрик, которая является наибольшей метрикой, учитывающей все ограничения:

$$\tilde{M}(\mathbf{q}) = \left(\bigcap_{\mathbf{p} \in \mathcal{H}} \tilde{M}_p(\mathbf{q}) \right) \cap M(\mathbf{q}).$$

Обратите внимание, что на практике пересечение метрик реализуется как последовательность попарных операций пересечения, которые реализуются посредством решения спектральной задачи для пучка матриц. В этом случае результат зависит от выбора порядка пересечения.

Чтобы избежать квадратичной сложности алгоритма, можно аппроксимировать коррекцию градации сетки алгоритмом линейной сложности, как описано в [10]. Это итерационный процесс, в котором каждая итерация представляет собой цикл коррекции краев сетки. Этот алгоритм быстрый и в большинстве случаев дает хорошие результаты, но чувствителен к топологии сетки.

Градация метрики достаточно интуитивна, когда метрическое поле изотропно. Однако анизотропия добавляет некоторые трудности, в основном, на этапе распространения метрики. Действительно, при анизотропном метрическом поле во всех направлениях действуют различные ограничения на размер, поэтому описанный ранее процесс градации не может быть продолжен простым способом. Необходимо сделать выбор, как распределить ограничения по размерам, чтобы правильно ограничить вариацию размеров. Здесь рассматриваются три стратегии (фиг. 3).

В первом подходе метрика распространяется в соответствии со скалярным коэффициентом роста, т.е.

$$\tilde{M}_p(\mathbf{q}) = \eta^2(\mathbf{p}\mathbf{q}) M_p,$$

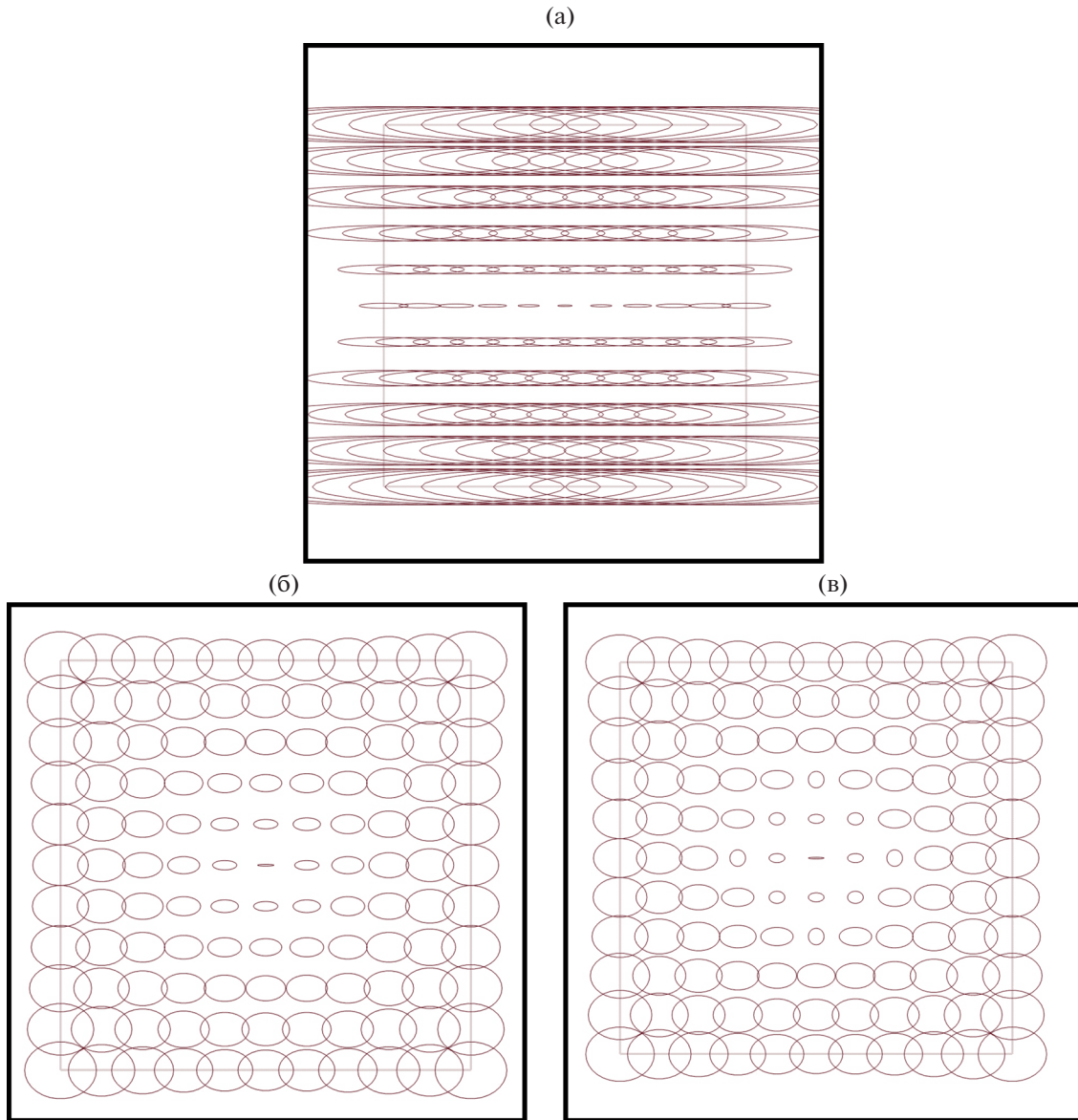
где $\eta^2(\mathbf{p}\mathbf{q}) = (1 + \ell_p(\mathbf{p}\mathbf{q}) \ln(\beta))^{-2}$ при h -линейной интерполяции. Полученный рост однороден в метрическом пространстве, так как коэффициент анизотропии постоянен. В дальнейшем этот метод будет называться *ростом в метрическом пространстве* (обозначение на фигурах – Metr).

Вторая стратегия заключается в применении роста, зависящего от направления, путем задания разного коэффициента роста для каждого собственного значения. В этом случае метрика ограничений имеет вид

$$\tilde{M}_p(\mathbf{q}) = \mathcal{R}^T \mathcal{N}(\mathbf{p}\mathbf{q}) \Lambda \mathcal{R},$$

где $\Lambda = \text{diag}((\lambda_i)_{i=1, \dots, n})$ – диагональная матрица, содержащая собственные значения M_p , \mathcal{R} – ортогональная матрица ее собственных векторов, $\mathcal{N}(\mathbf{p}\mathbf{q}) = \text{diag}((\eta_i^2)_{i=1, \dots, n})$ и $\eta_i^2(\mathbf{p}\mathbf{q}) = (1 + \sqrt{\lambda_i} \|\mathbf{p}\mathbf{q}\|_2 \ln(\beta))^{-2}$. Фактор $\sqrt{\lambda_i}$ ускоряет рост в направлениях малых размеров. Как следствие, $\tilde{M}_p(\mathbf{q})$ стремится к изотропному тензору, когда расстояние между \mathbf{p} и \mathbf{q} увеличивается. Этот процесс называется в дальнейшем *ростом в физическом пространстве* (обозначение на фигурах – Phys).

Мы разработали новую стратегию для получения еще более плавных переходов. В этом случае рост метрики также зависит от направления. Установили порог для соотношения сторон, которого должна достичь метрика, прежде чем начнет расти во всех направлениях. Этот метод называется *рост с ограничением по направлению* (обозначение на фигурах – DC). Чтобы смоделировать его, рассмотрим двумерную начальную метрику в вершине \mathbf{p} , M_p , с теми же обозначениями для спектрального разложения. Два собственных значения $\lambda_0 = 1/h_0^2$ и $\lambda_1 = 1/h_1^2$ упорядочены так, что $\lambda_0 < \lambda_1$. В соответствующем направлении наименьший размер растет в соответствии с тем же ко-



Фиг. 3. Рост в метрическом пространстве (а), в физическом пространстве (б) и с ограничением по направлению (в).

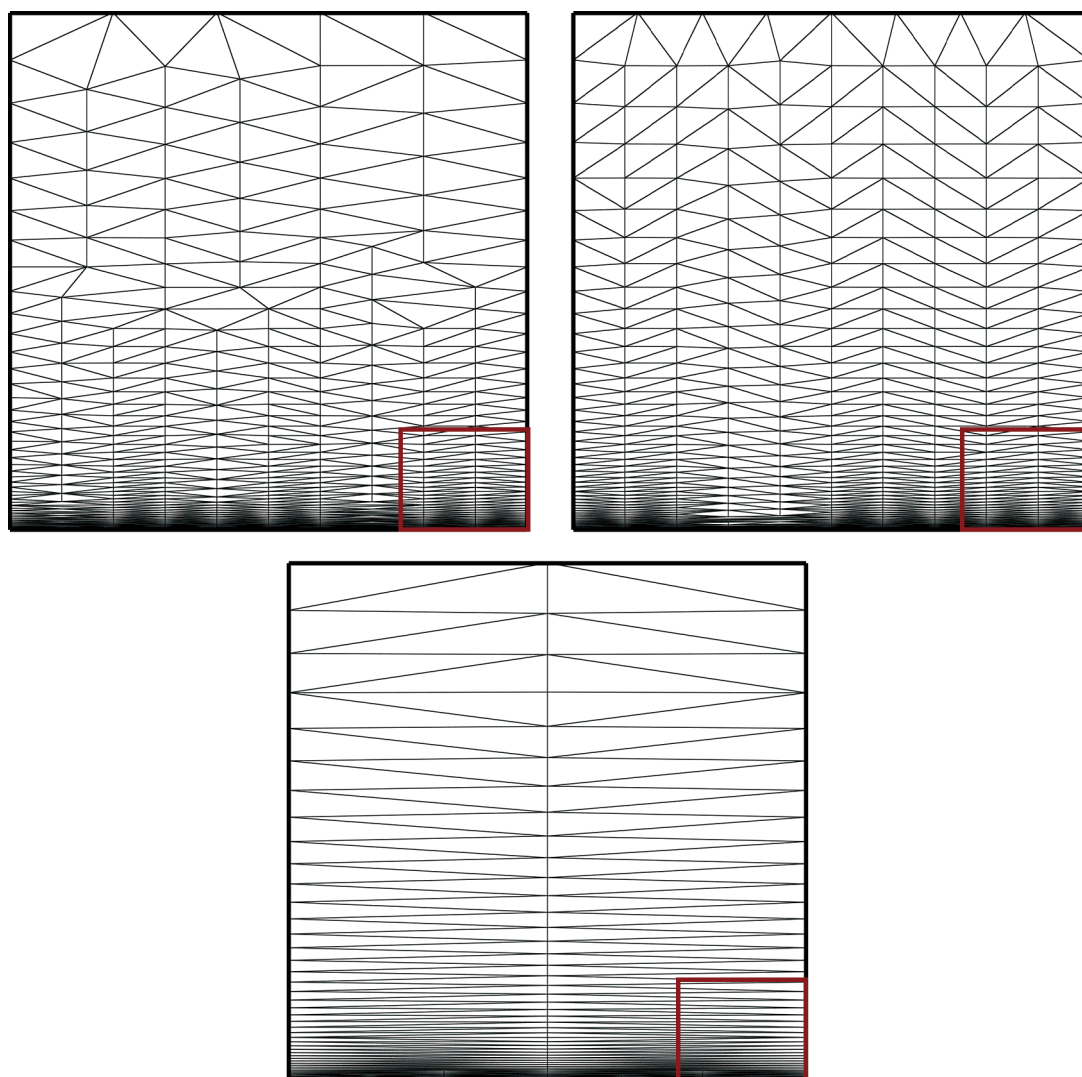
эффицентом, который определен для роста физического пространства. В другом направлении размер не растёт, пока метрика ограничений не достигнет заданного соотношения сторон $r_{\min} = h_0/\tilde{h}_1 > 1$. При достижении этого соотношения сторон поправка распространяется как поправка на рост физического пространства:

$$\tilde{M}_p(\mathbf{q}) = \mathcal{R}^T \tilde{\Lambda} \mathcal{R}, \quad \tilde{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_i)$$

с

$$\tilde{\lambda}_1 = \eta_1^2(\mathbf{p}\mathbf{q}) \lambda_1, \quad \tilde{\lambda}_0 = \begin{cases} \eta_0^2(\mathbf{p}\mathbf{q}) \lambda_0, & \text{если } r_{\min} \tilde{h}_1 > h_0, \\ \lambda_0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отношение сторон r_{\min} выбирается близким к 1 (в примерах 1.1), но немного больше единицы, чтобы обеспечить сохранение некоторой анизотропии, так чтобы собственные векторы были хорошо определены и информация о направлении сохранялась в процессе градации. Разница между этими тремя процессами роста показана на фиг. 3, где изображен рост анизотропного тензора



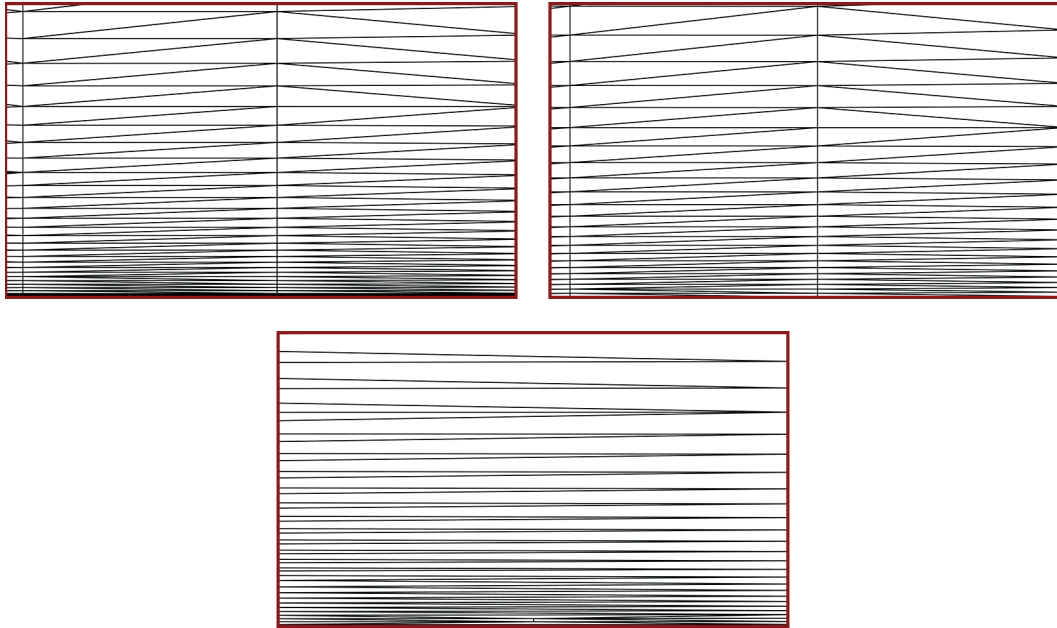
Фиг. 4. Метрически-ортогональные адаптированные сетки для метрики “линия”, общий вид. Красные прямоугольники указывают на увеличенный фрагмент.

в центре по всей области с использованием трех подходов, подчеркивая разницу между ростом в физическом пространстве и ростом с ограничениями по направлению. По мере роста направленно-ограниченная метрика становится изотропной очень быстро перед ростом, что можно наблюдать в центре области. Выбор метода оказывает сильное влияние на результирующую метрически-ортогональную сетку, как показано в следующем разделе.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе сравниваются три процесса роста метрики на двух аналитических примерах и двух примерах расчета течения около аэродинамического профиля НАСА. Адекватность получаемых метрически-ортогональных сеток оценивается количественно путем анализа скачков размера и перераспределения углов. Показатель скачка размера оценивается в каждой вершине как отношение между наибольшей и наименьшей площадью окружающих треугольников. Гистограммы углов, представленные в остатке, есть максимальные углы каждого треугольника метрически-ортогональных сеток. Для оценки эффективности гибридных сеток качество четырехугольников оценивается с помощью следующей характеристики качества из [14], основанной на углах четырехугольника:

$$\eta(q) = \max\left(1 - \frac{2}{\pi} \max_k \left(\left|\frac{\pi}{2} - \alpha_k\right|\right), 0\right).$$



Фиг. 5. Метрически-ортогональные адаптированные сетки на основе метрики “линия”, вид крупным планом.

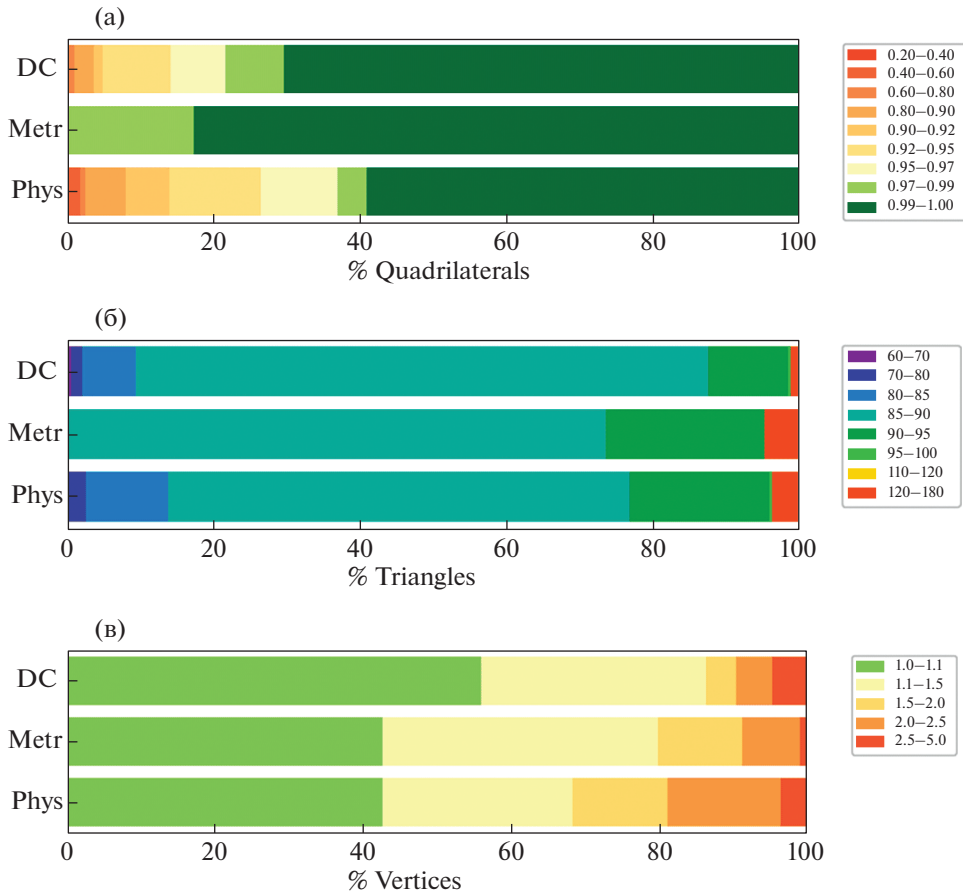
Наконец, структурированные части сетки не должны прерываться несколькими треугольниками. Этот критерий весьма важен для моделирования с ячейками разных типов. Скачки углов и размеров дают некоторую информацию об этом явлении, но в представленных примерах это наблюдение, в основном, качественное.

4.1. Аналитическая метрика “линия”

Первый тест представляет собой аналитическое прямолинейное метрическое поле на квадратной области $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Начальная метрика задана разрывной, чтобы подчеркнуть разницу между тремя процессами:

$$\mathcal{M}_{\text{line}} = \begin{pmatrix} h_1^{-2} & 0 \\ 0 & h_2^{-2} \end{pmatrix}, \quad \text{если } y = 0, \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} h_0^{-2} & 0 \\ 0 & h_0^{-2} \end{pmatrix} \text{ иначе.}$$

Предписанные размеры $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.001$ и $h_0 = 0.5$. Применяется коррекция градации с $\beta = 1.1$. Полученные метрически-ортогональные сетки показаны на фиг. 4 и 5. Гистограммы, сравнивающие качество четырехугольников гибридных сеток, а также показатель разбиения углов и скачков размеров квазиструктурированных сеток представлены на фиг. 6. Этот пример иллюстрирует, насколько по-разному ведут себя три метода роста. Рост в физическом пространстве и рост с ограничением по направлению сохраняют одинаковый размер по горизонтали по мере удаления от нижней границы, в то время как рост в метрическом пространстве сохраняет элемент с одинаковым соотношением сторон, который растет, пока не достигнет максимального размера. Это можно наблюдать в гистограмме распределения углов, поскольку процессы роста в физическом пространстве и роста с ограничением по направлению показывают меньше тупых углов. Следовательно, эти две стратегии, скорее всего, будут способствовать образованию полностью четырехугольных областей. Однако гистограмма качества четырехугольников показывает лучшие результаты при использовании роста в метрическом пространстве. В других тестовых случаях мы обычно наблюдаем обратное, но это наблюдение подчеркивает важность сохранения анизотропии в метрически-ортогональных сетках. Кроме того, хорошие результаты для этого процесса здесь не очень показательны, поскольку наибольший размер достигается очень быстро. В пограничном слое было бы гораздо больше переходов размеров, поскольку отношение между наибольшим размером вдали от аэродинамической поверхности и размером на аэродинамической поверхности значительно больше, чем отношение между h_0 и h_2 . Следовательно, на самом деле существует множество резких переходов размеров при использовании роста в метрическом



Фиг. 6. Гистограммы распределения качества четырехугольников (а), углов (б) и скачков размеров (в), пример теста “линия”.

пространстве в тестах пограничного слоя (см. п. 4.4). Более того, проблемы с качеством алгоритмов физического пространства и алгоритма роста с ограничением по направлению обусловлены своего рода появлением волнистых структур в сетке, которые должны быть исправлены путем улучшения алгоритма размещения точек. Эта работа продолжается, и когда она будет выполнена, эти два процесса роста должны в конечном итоге дать лучшие гибридные сетки. Соответствующие гибридные сетки имеют 86, 72 и 79% четырехугольников для роста с ограничением по направлению, роста в физическом пространстве и роста в метрическом пространстве соответственно.

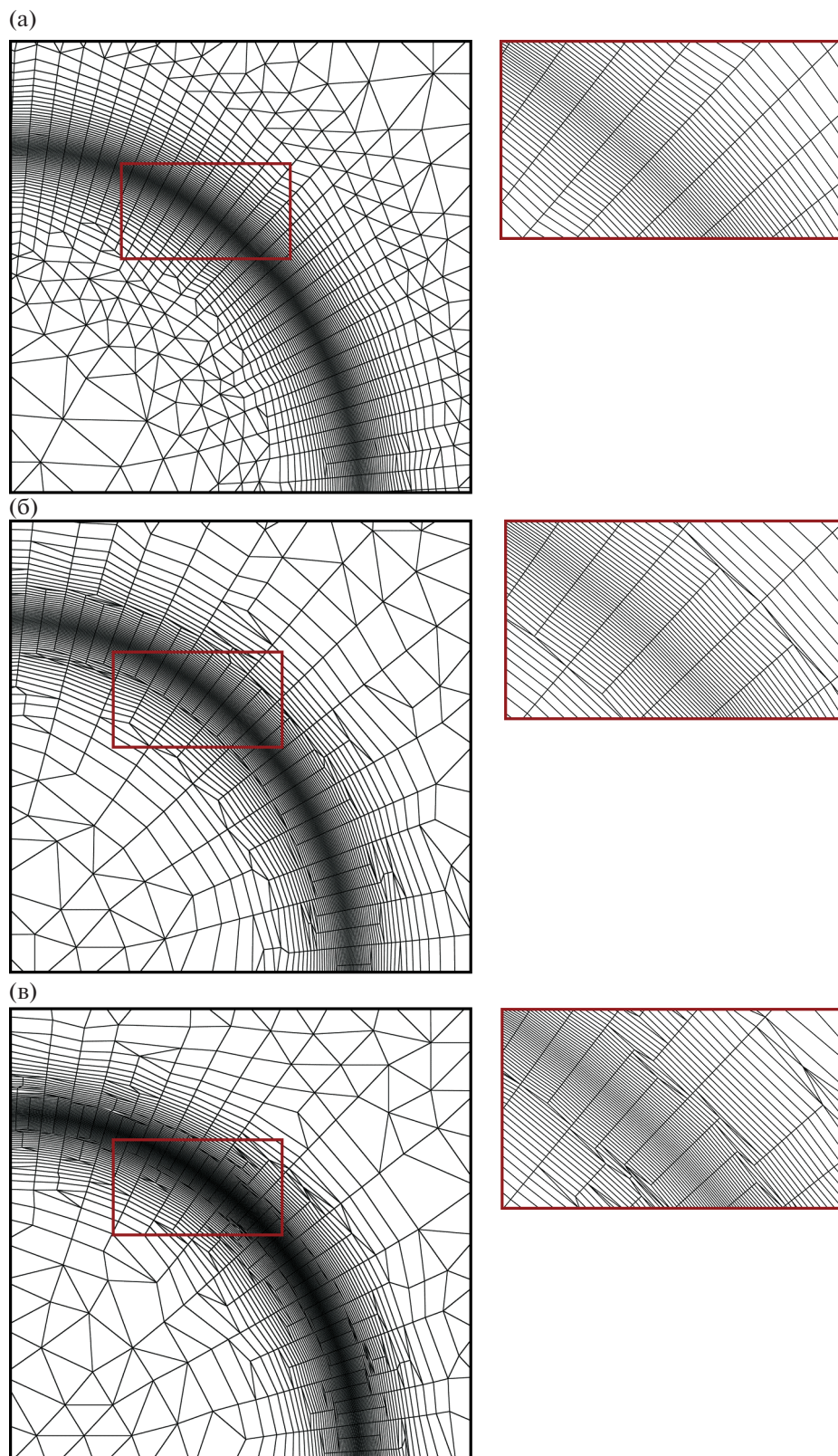
4.2. Аналитическая метрика “окружность”

Данный пример предназначен для изучения того, как метрическая кривизна обрабатывается различными стратегиями. Наш метод применяется к аналитическому метрическому полю, представляющему изогнутую анизотропную структуру, имеющую форму окружности:

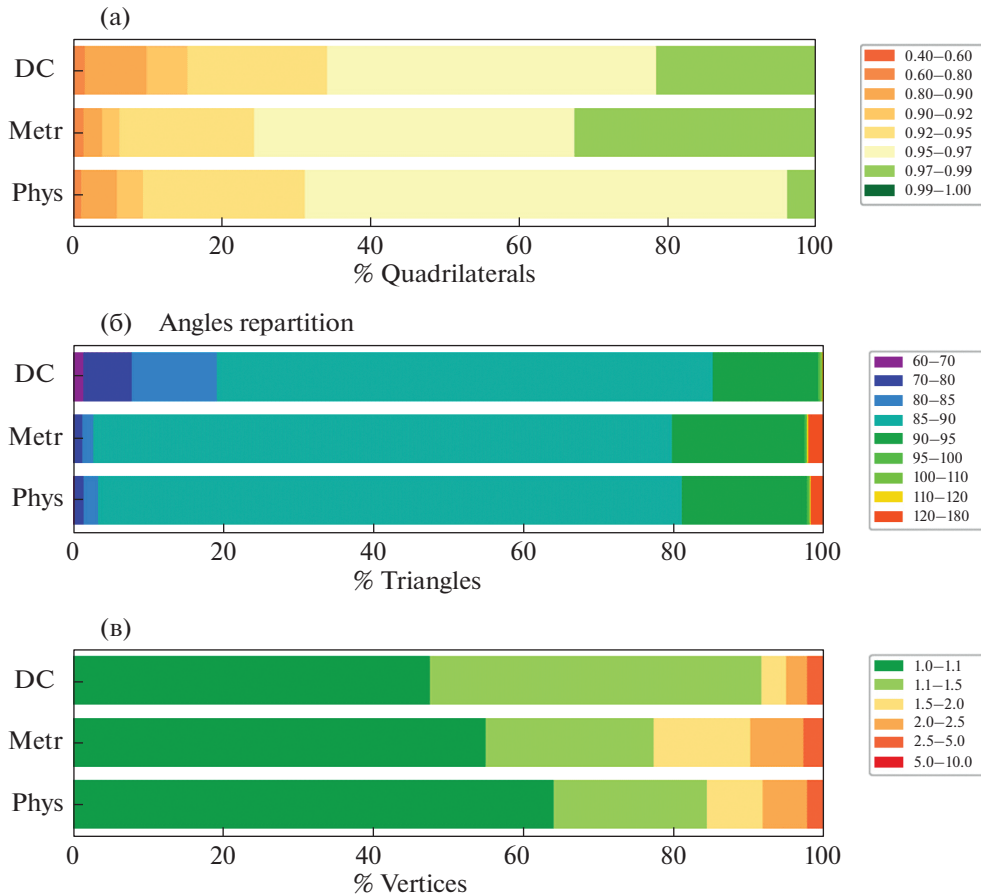
$$\mathcal{M}(x, y) = \begin{pmatrix} h_1^{-2} \cos^2 \theta + h_2^{-2} \sin^2 \theta & (h_1^{-2} - h_2^{-2}) \cos \theta \sin \theta \\ (h_1^{-2} - h_2^{-2}) \cos \theta \sin \theta & h_1^{-2} \sin^2 \theta + h_2^{-2} \cos^2 \theta \end{pmatrix},$$

где $\theta = \arctan(x, y)$, $h_1 = \min(0.002 \times 5^\alpha, h_{\max})$, $h_2 = \min(0.05 \times 2^\alpha, h_{\max})$, $h_{\max} = 0.1$ и $\alpha = 10 \times \left| 0.75 - \sqrt{x^2 + y^2} \right|$.

Здесь мы задаем $\beta = 1.2$ для процесса роста в метрическом пространстве и $\beta = 1.1$ для роста в физическом пространстве и роста с ограничением по направлению. Действительно, рост в метрическом пространстве дает более подробные сетки, чем другие методы, а мы хотим сравнить



Фиг. 7. Гибридные адаптированные сетки на основе метрического поля в форме окружности после процесса градации с использованием роста с ограничением по направлению (а), роста в физическом пространстве (б), роста в метрическом пространстве (в). Красными прямоугольниками обозначены увеличенные фрагменты.



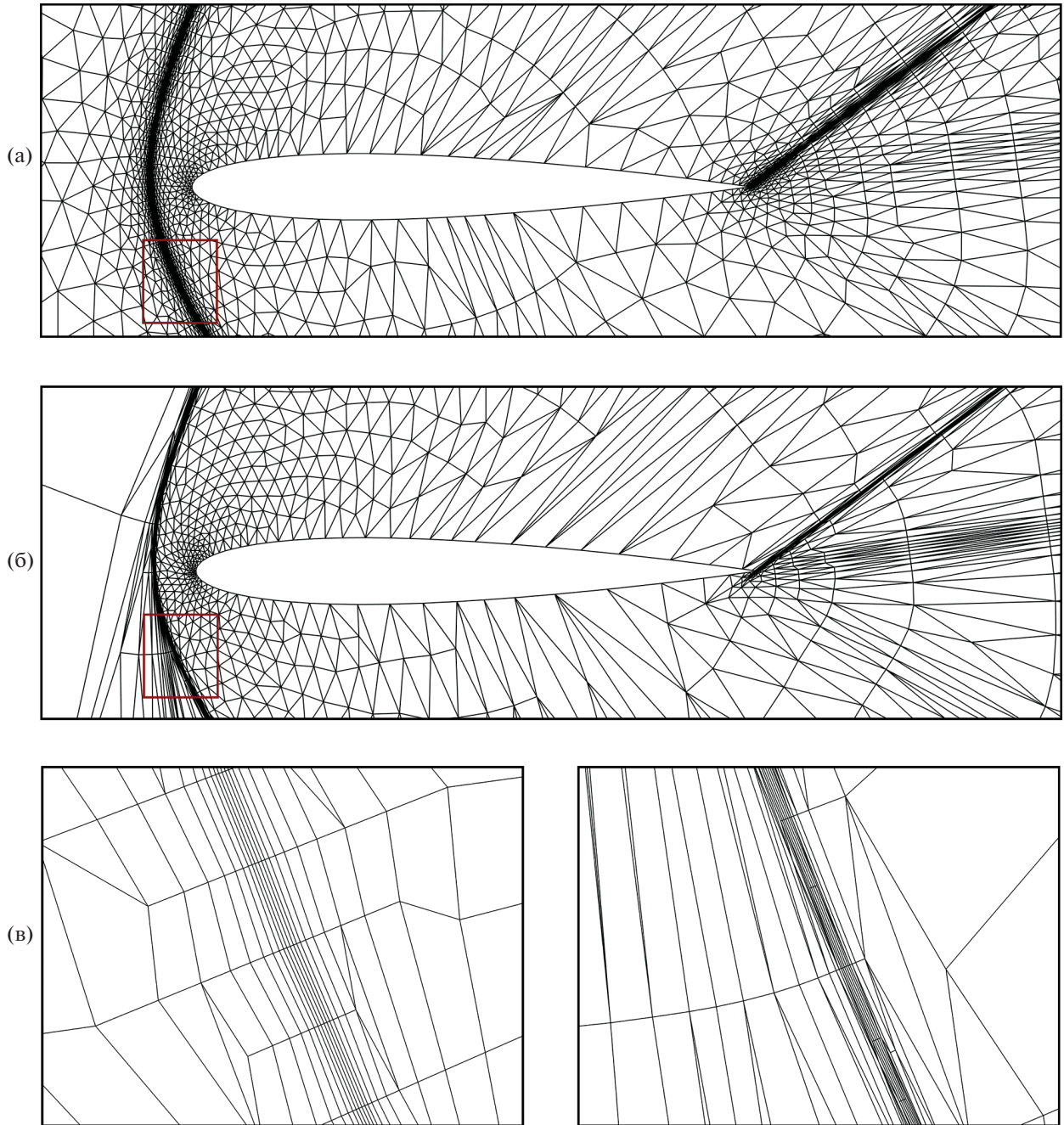
Фиг. 8. Гистограммы распределения качества четырехугольников (а), углов (б) и скачков размеров (в), пример теста “окружность”.

сетки с одинаковым количеством вершин. Чтобы проиллюстрировать результаты для этого случая, на фиг. 7 показаны окончательные гибридные сетки для трех стратегий роста. Гистограммы, показывающие распределение качества четырехугольников, углов и скачков размеров, собраны на фиг. 8. Как представлено в [10], на адаптированную сетку с использованием роста в метрическом пространстве особенно влияет зависимость нашего алгоритма от топологии сетки. Он создает некоторые “лучи”, которые являются касательными к искривленным областям, метрическое поле ошибочно модифицируется, и также изменяются результирующие сетки. В данном случае исходная метрика довольно гладкая, поэтому этот эффект малозаметен, но он заметен в верхней левой части соответствующей сетки на фиг. 7в.

Доля четырехугольников примерно одинакова в трех случаях: 86.3% при использовании роста с ограничением по направлению, 89.6% при использовании роста в физическом пространстве и 87.9% при использовании роста в метрическом пространстве. Однако кривизна обрабатывается по-разному, и рост в физическом пространстве, и рост с ограничениями по направлению показывают меньшие скачки размера в радиальном направлении. Следовательно, области, состоящие только из четырехугольников, легче формируются при использовании этих двух стратегий роста, как показано на фиг. 7, что больше подходит для численного моделирования. Гистограммы качества лучше для роста в метрическом пространстве, как видно из предыдущего примера, что связано с более высокими коэффициентами анизотропии в скорректированном метрическом поле. Здесь исходная метрика довольно гладкая и ограниченная, поэтому улучшение за счет коррекции градиентов размера ограничено.

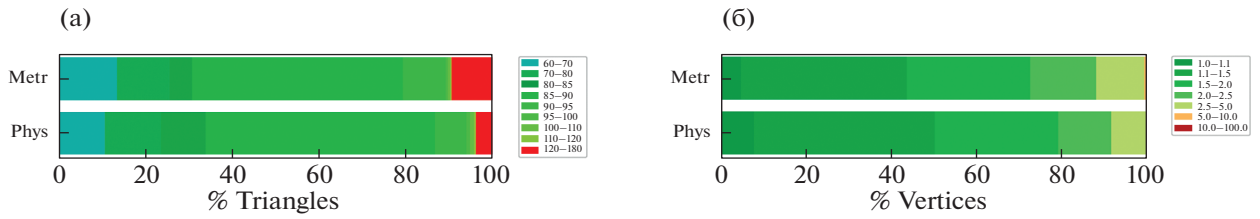
4.3. Моделирование невязкого течения

Данный пример представляет собой численное моделирование невязкого течения вокруг NASA 0012, описываемого уравнениями Эйлера. Рассматривается сверхзвуковой поток с числом

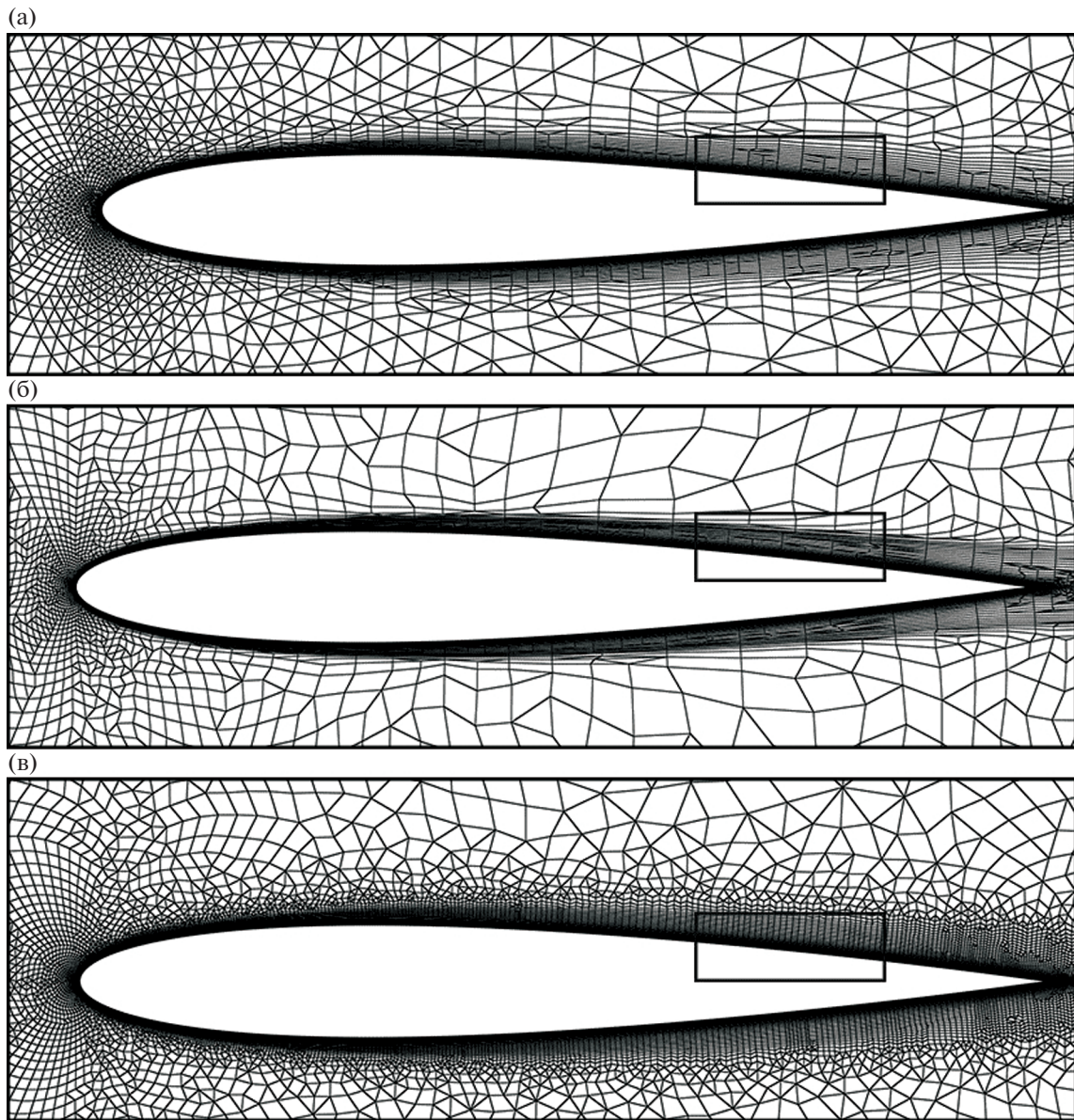


Фиг. 9. Сверхзвуковое невязкое течение около профиля NASA. Показаны крупномасштабные виды адаптированных метрически-ортогональных сеток: (а) – рост в физическом пространстве, (б) – в метрическом пространстве, а также соответствующие виды крупным планом после объединения в четырехугольники (в).

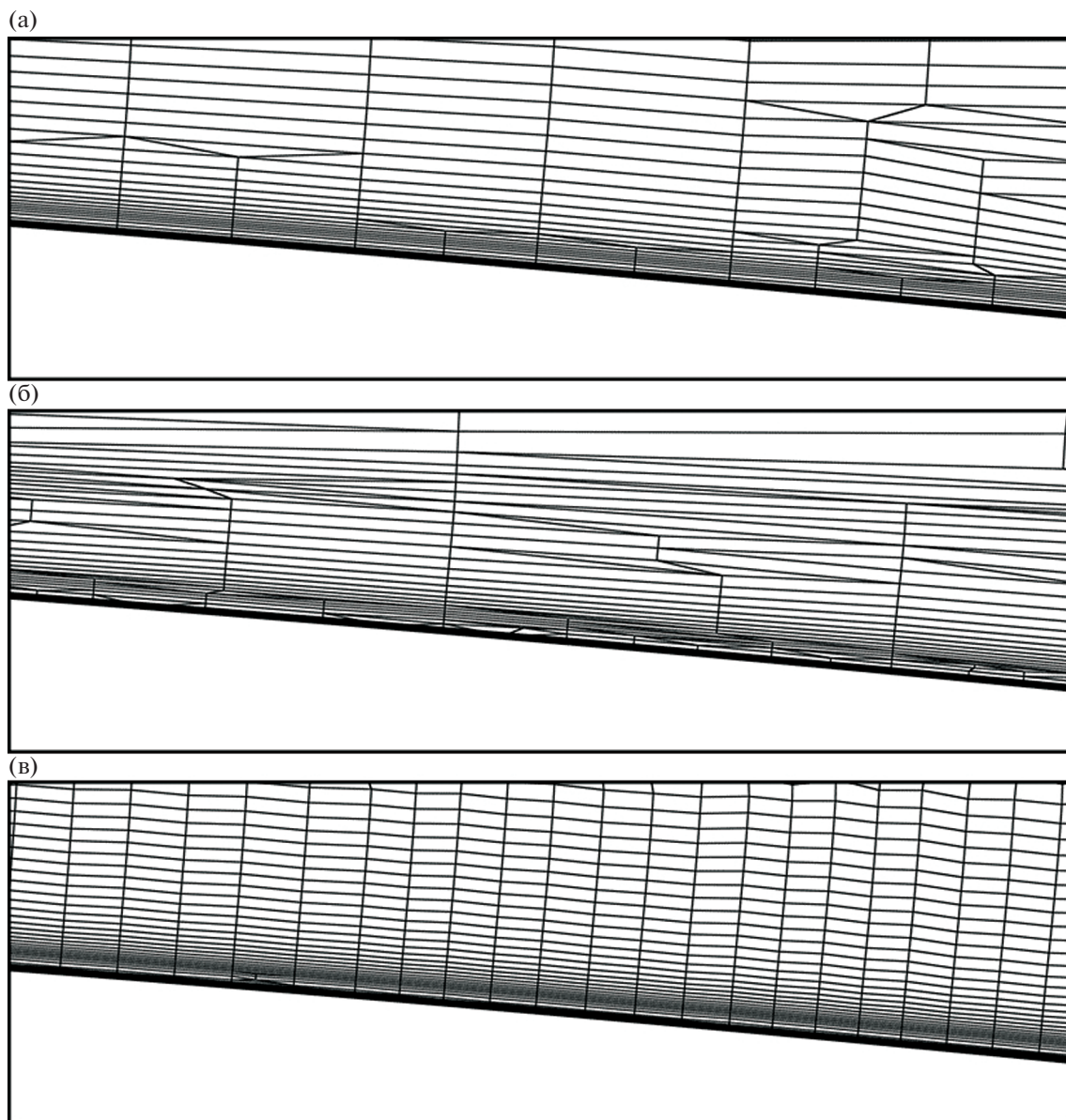
Маха $M = 1.6$ и углом атаки $\alpha = 8$. Была проведена градиционная коррекция с использованием роста в метрическом и физическом пространствах с $\beta = 1.5$. Коэффициент $\delta = 1.5$ был добавлен для роста в метрическом пространстве, чтобы смоделировать экспоненциальную метрическую градиацию и ограничить лучевые артефакты, упомянутые ранее (подробнее см. в [10]). Рост с ограничением по направлению здесь не рассматривался, поскольку интересными особенностями этого потока являются ударные волны, которые представляют собой анизотропные явления, а эта стратегия роста, как оказалось, теряет значительное количество анизотропии в процессе коррекции.



Фиг. 10. Сверхзвуковое невязкое течение около профиля NASA. Гистограммы распределения углов (а) и скачков размеров (б), сравнивающие метрически-ортогональные сетки, полученные при росте в метрическом и физическом пространствах.



Фиг. 11. Дозвуковое турбулентное течение около профиля NASA. Сравнение трех процессов роста, крупномасштабные виды: (а) – рост в физическом пространстве, (б) – в метрическом пространстве, (в) – с ограничением по направлению.

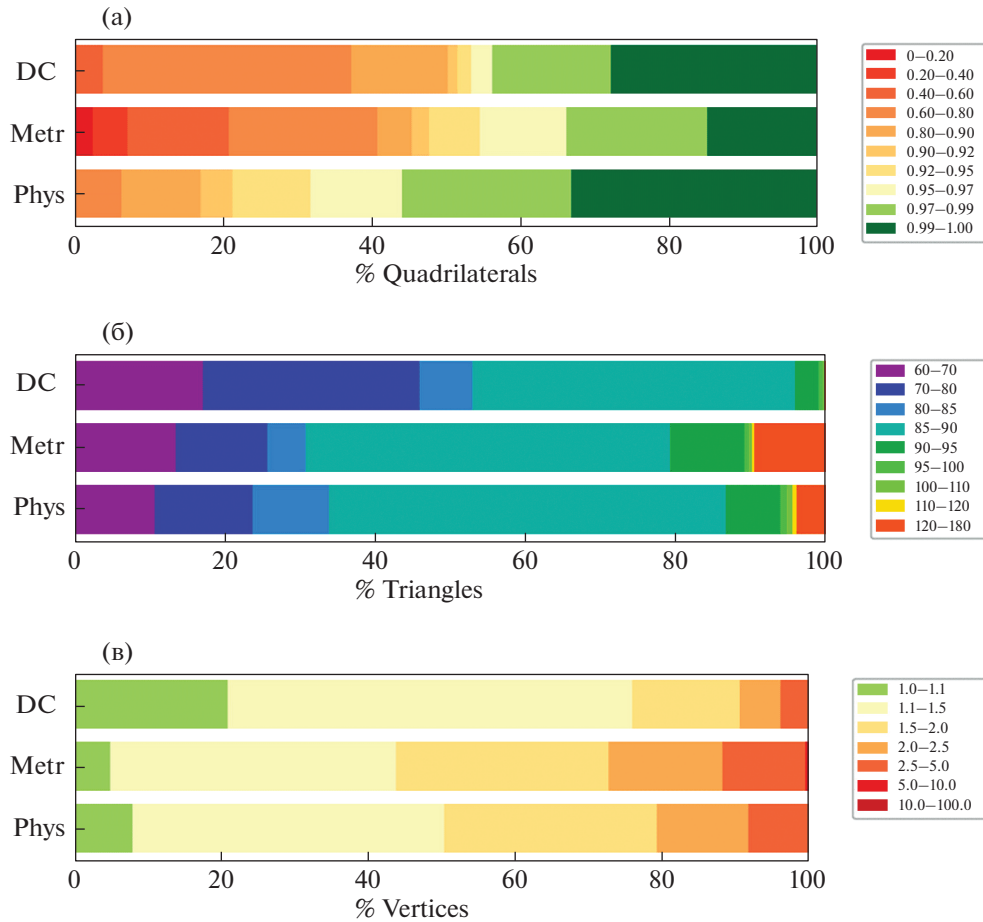


Фиг. 12. Дозвуковое турбулентное течение около профиля NACA с $Re = 10^5$. Сравнение трех процессов роста, крупный план: (а) – рост в физическом пространстве, (б) – в метрическом пространстве, (в) – с ограничением по направлению.

Адаптированные метрически-ортогональные сетки для обоих процессов роста показаны на фиг. 9, а гистограммы для сравнения – на фиг. 10. Гистограммы показывают, что рост в физическом пространстве – явно лучший вариант для данного теста: доля скачков размеров и тупых углов значительно меньше. Виды гибридных сеток крупным планом также показывают, что этот процесс роста благоприятствует формированию более крупных полностью четырехугольных областей. Хотя рост в метрическом пространстве более точно отражает скачок (см. [10]), он не является лучшим вариантом для гибридной сетки.

4.4. Моделирование турбулентного течения

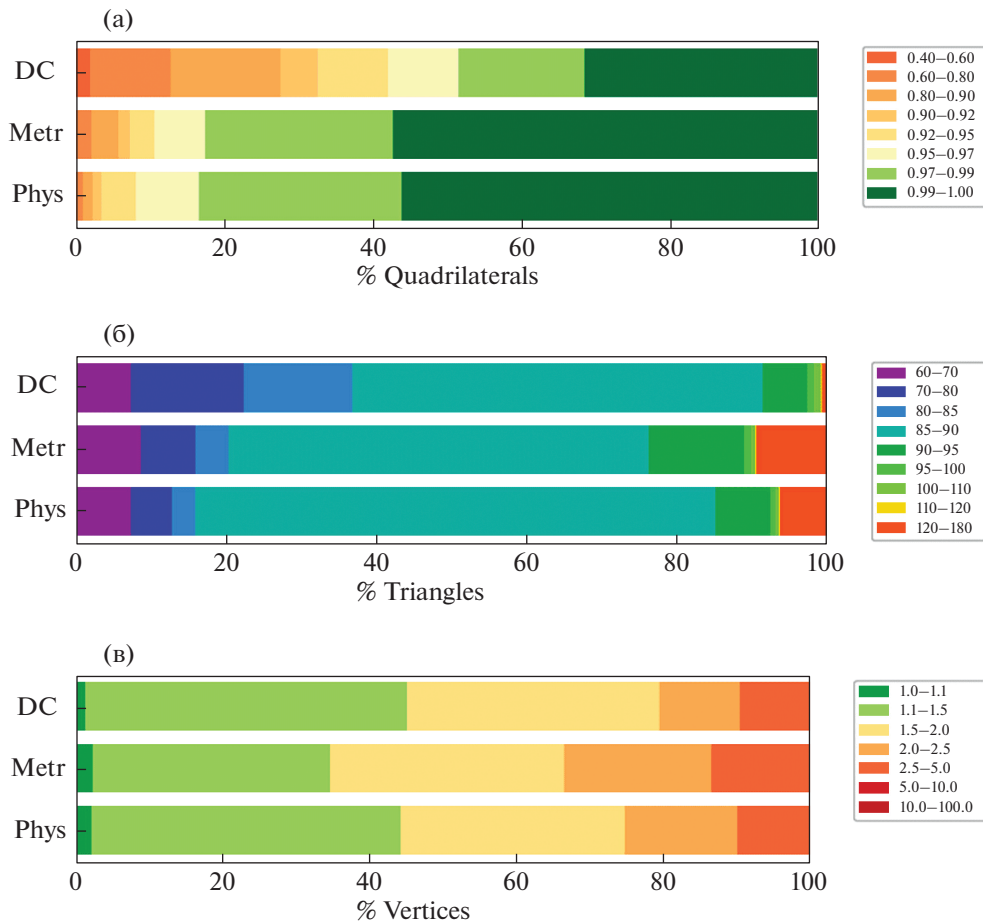
Последний пример – численное моделирование турбулентного течения вокруг NACA0012, описываемого уравнениями Навье–Стокса с усреднением по Рейнольдсу, где мы рассматриваем модель турбулентности Спаларта–Алмараса с одним уравнением. Моделируемое течение явля-



Фиг. 13. Дозвуковое турбулентное течение около профиля NACA с $Re = 10^5$. Гистограммы распределения качества четырехугольников (а), углов (б) и скачков размеров (в), сравнивающие метрически-ортогональные сетки, полученные в результате роста с ограничением по направлению, в метрическом пространстве и в физическом пространстве.

ется дозвуковым с числом Маха $M = 0.5$, числом Рейнольдса $Re = 10^5$ и углом атаки $\alpha = 0$. Адаптированные гибридные сетки показаны на фиг. 11 (крупный план) и 12 (крупный план). Гистограммы углов и скачков размеров представлены на фиг. 13. В этом случае снова лучше работает коррекция с использованием роста в физическом пространстве и роста с ограничением по направлению. Эффект особенно заметен в области пограничного слоя, где плавность переходов очень важна. Малый размер, предписанный на границе, распространяется почти по всей зоне, тогда как многочисленные переходы нарушают выравнивание при использовании градации роста в метрическом пространстве, как показано на фиг. 12. Результаты особенно убедительны для роста в физическом пространстве, так как пограничный слой почти заполнен четырехугольниками. Это многообещающая возможность для создания гибридных сеток, в которых пограничный слой полностью заполнен четырехугольниками. Однако эти четырехугольники менее анизотропны (соотношение сторон в основном от 10 до 50), что, по-видимому, способствует появлению волнистых структур в сетке вне пограничного слоя. Предстоит проделать определенную работу, чтобы устранить такие узоры и улучшить процесс объединения четырехугольников в областях, где соотношение сторон элементов наименьшее.

Аналогичное моделирование с числом Рейнольдса Re , заданным 5×10^6 , было выполнено для сравнения поведения градационных процессов при большей заданной анизотропии (на границе она примерно равна 500). Гистограммы для этого случая показаны на фиг. 14, а крупный план сетки граничного слоя — на фиг. 15. Переходы и углы остаются лучше после градации с ограни-

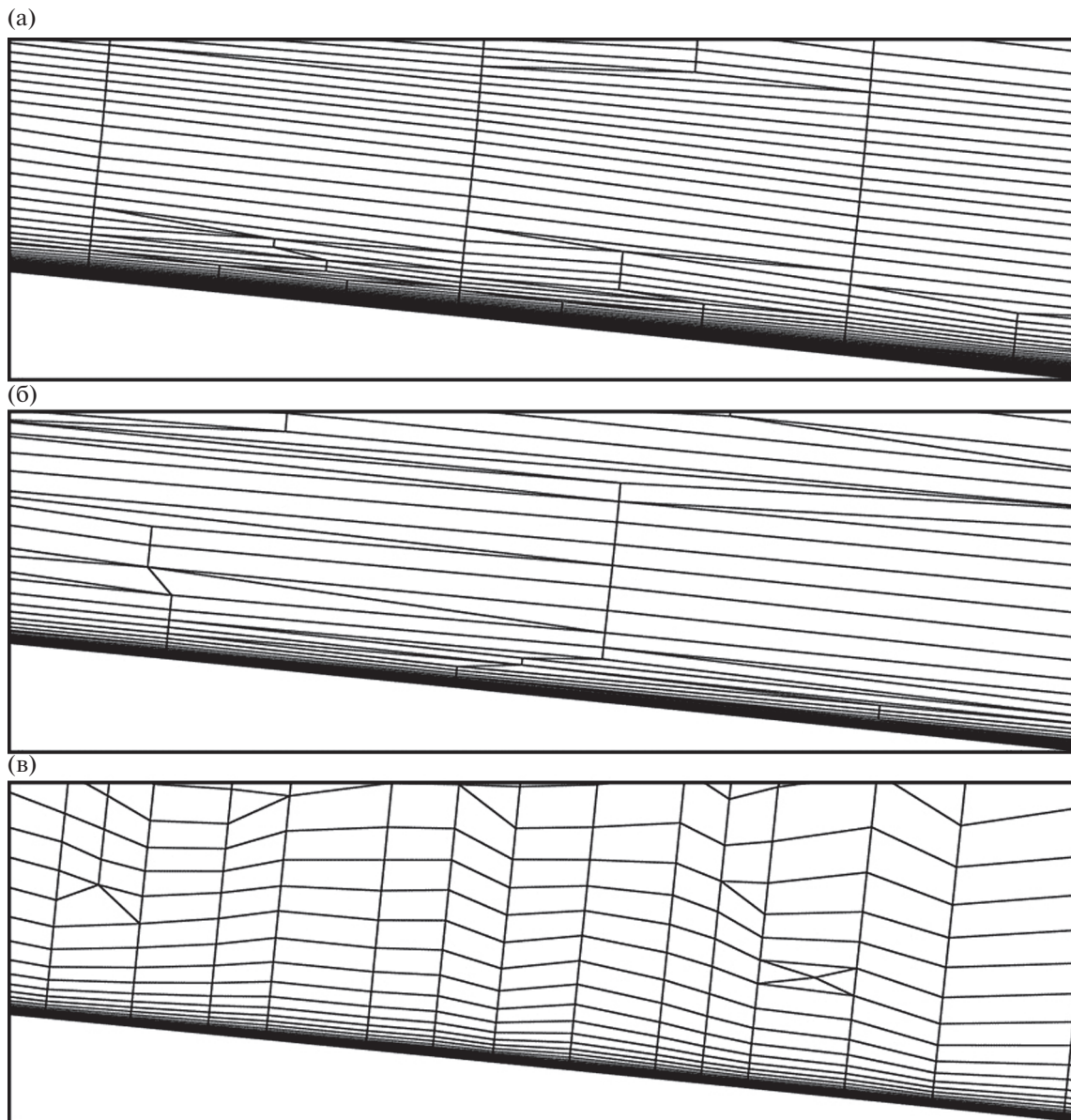


Фиг. 14. Дозвуковое турбулентное течение около профиля NACA с $Re = 5 \times 10^6$. Гистограммы распределения качества четырехугольников (а), углов (б) и скачков размеров (в), сравнивающие метрически-ортогональные сетки, полученные в результате роста с ограничением по направлению, роста в метрическом пространстве и роста в физическом пространстве.

чением по направлению, однако при использовании этой стратегии качество созданных четырехугольников хуже. Действительно, анизотропия элементов в этом случае может уменьшаться только от границы, в то время как другие процессы роста распространяют анизотропию дальше. Поэтому рост в физическом пространстве представляется здесь наилучшим вариантом. Для улучшения результатов градации с ограничениями по направлению можно использовать корректировку метрически-ортогонального смещения точек на этапе создания сетки. В настоящее время этот вопрос изучается.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Контроль градации метрики является важным шагом в процессе адаптации сетки с использованием метрики. При стандартной адаптации он улучшает качество создаваемой адаптированной сетки и точность решения, как было показано в предыдущей работе. Этот процесс еще более важен для метрически-ортогональных сеток: метрика должна быть еще более гладкой, поскольку вариации размеров могут нарушить выравнивание сетки и помешать формированию четырехугольников на этапе объединения. Для этого был проанализирован наш текущий метод градации метрики, чтобы определить, как он может способствовать формированию ортогональных сеток хорошего качества, а затем гибридных сеток, т.е. увеличить долю четырехугольников и уменьшить количество скачков размеров и тупых углов. Наиболее важным этапом является этап роста метрики, на котором метрика в определенной вершине распространяется по всей области так,



Фиг. 15. Дозвуковое турбулентное течение около профиля NACA с $Re = 5 \times 10^6$. Сравнение трех процессов роста, крупный план: (а) – рост в физическом пространстве, (б) – в метрическом пространстве, (в) – с ограничением по направлению.

что она влияет, в основном, на ближайшие вершины. Были рассмотрены три возможности. Во-первых, однородный рост в метрическом пространстве, сохраняющий анизотропное соотношение по мере распространения. Во-вторых, однородный рост в физическом пространстве, накладывающий более быстрый рост на наименьший предписанный размер и стремящийся стать изотропным по мере распространения. В-третьих, рост с ограничением по направлению, ограничивающий рост самого большого размера, а затем растущий во всех направлениях. Предполагается, что эта последняя стратегия способствует плавным переходам. В предыдущих работах на эту тему было замечено, что первый процесс роста приводит к лучшим сеткам для рассматриваемых задач вычислительной газодинамики. Однако для создания сеток с преобладанием четырехугольников второй процесс роста является более эффективным, поскольку полученные сетки демонстрируют более плавные переходы размеров и больше потенциальных полностью четырехугольных зон. Для совершенствования процедуры построения сетки с преобладанием четырехугольников необходимо усовершенствовать этапы повторного построения и объединения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bommes D., Lévy B., Pietroni N., Puppo E., Silva C., Tarini M., Zorin D.* Quad-mesh generation and processing: a survey // *Computer Graphics Forum*. 2013. V. 32. № 6. P. 51–76.
<https://doi.org/10.1111/cgf.12014>
2. *Lévy B., Liu Y.* Lp centroidal voronoi tessellation and its applications // *ACM Trans. Graph.* 2010. V. 29. № 4.
<https://doi.org/10.1145/1778765.1778856>
3. *Liu Y., Wang W., Lévy B., Sun F., Yan D.M., Lu L., Yang C.* On centroidal Voronoi tessellation—energy smoothness and fast computation // *ACM Trans. Graph.* 2009. V. 28. № 4. Article 101.
<https://doi.org/10.1145/1559755.1559758>
4. *Ekelschot D., Ceze M., Garai A., Murman S.M.* Robust metric aligned quad-dominant meshing using Lp centroidal Voronoi tessellation.
<https://doi.org/10.2514/6.2018-1501>
5. *MacLean K., Nadarajah S.* Unstructured anisotropic mesh adaptation for quads based on a local error model.
<https://doi.org/10.2514/6.2021-1840>
6. *Sharbatdar M., Gooch C.O.* Anisotropic mesh adaptation: recovering quasi-structured meshes.
<https://doi.org/10.2514/6.2013-149>
7. *Singh J., Gooch C.F.O.* Advancing layer surface mesh generation.
<https://doi.org/10.2514/6.2020-0902>
8. *Loseille A.* Metric-orthogonal anisotropic mesh generation // *Procedia Engineer.* 2014. V. 82. P. 403–415.
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.10.400> . 23rd Inter. Mesh. Roundtable (IMR23).
9. *Marcum D., Alauzet F.* 3d metric-aligned and orthogonal solution adaptive mesh generation // *Procedia Engineer.* 2017. V. 203. P. 78–90.
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.790> . 26th Inter. Mesh. Roundtable, IMR26, 18–21 September 2017, Barcelona, Spain.
10. *Alauzet F.* Size gradation control of anisotropic meshes // *Finite Elements in Analysis and Design.* 2010. V. 46. P. 181–202.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2009.06.028>
11. *Hecht F., Mohammadi B., Hecht F., Mohammadi B.* Mesh adaption by metric control for multi-scale phenomena and turbulence.
<https://doi.org/10.2514/6.1997-859>
12. *Loseille A., Alauzet F.* Continuous mesh framework part i: Well-posed continuous interpolation error // *SIAM J. Numer. Anal.* 2011. V. 49. P. 38–60.
<https://doi.org/10.1137/090754078>
13. *Loseille A., Alauzet F.* Continuous mesh framework part ii: Validations and applications // *SIAM J. Numer. Anal.* 2011. V. 49. P. 61–86.
<https://doi.org/10.2307/23074390>
14. *Remacle J.F., et al.* Blossom-quad: A non-uniform quadrilateral mesh generator using a minimum-cost perfect-matching algorithm // *Inter. J. Numer. Meth. Engineer.* 2012. V. 89. P. 1102–1119.
<https://doi.org/10.1002/nme.3279>