

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ДАВЛЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА МЕТОДОМ
КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ С СОВМЕЩЕННЫМ
РАСПОЛОЖЕНИЕМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ¹⁾

© 2022 г. К. М. Терехов^{1,2}

¹ 119333 Москва, ул. Губкина, 8, Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Россия

² 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9,
Московский физико-технический институт, Россия

e-mail: terekhov@inm.ras.ru

Поступила в редакцию 10.10.2021 г.
Переработанный вариант 21.01.2022 г.
Принята к публикации 11.04.2022 г.

Предложены граничные условия на давление для решения стационарных несжимаемых уравнений Навье–Стокса методом конечных объемов с совмещенным расположением степеней свободы. Работа основана на inf-sup устойчивом методе аппроксимации совмещенного потока импульса и массы. На основе предположения о линейности неизвестных скорости и давления выводятся односторонние выражения совмещенного потока. Обеспечивая непрерывность этих выражений на внутренних гранях, получаем скорость и давление на грани и единственное выражение для совмещенного потока. В результате сохранение импульса и массы является дискретно точным. Однако для восстановления давления и расчета совмещенного потока на границе области требуется дополнительное граничное условие на давление. Библ. 28. Фиг. 2. Табл. 3.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, несжимаемая жидкость, метод конечных объемов, граничные условия.

DOI: 10.31857/S0044466922080142

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был представлен полностью неявный конечно-объемный метод с совмещенным расположением степеней свободы и кусочно-линейной аппроксимацией скорости и давления. В указанной работе применялось простое искусственное граничное условие для давления, предложенное Грешо (см. [2]): отсутствие изменения градиента давления в нормальном направлении между текущим и следующим временными шагами. Из-за этого условия предложенный метод ограничен нестационарными задачами. В [3] был представлен полностью неявный конечно-объемный метод с совмещенным расположением степеней свободы и кусочно-постоянной аппроксимацией поля давления. Он не требовал никаких граничных условий на давление и позволял моделировать стационарную постановку задачи, но требовал настраиваемого параметра для компенсации ошибки давления в течениях с преобладанием адвекции. Основной мотивацией для полностью неявного подхода является совмещение жесткого каскада реакций в единую систему с уравнениями течения жидкости в модели свертываемости крови (см. [4], [5]). В данной работе мы исследуем улучшение метода конечных объемов (см. [1], [3]) и рассматриваем граничные условия давления, которые позволяют линейно реконструировать поле давления в стационарной постановке.

Типичной проблемой методов с совмещенным расположением степеней свободы является проблема неустойчивости inf-sup (см. [6]). Обычным подходом к решению этой проблемы является использование разнесенного расположения скоростей (см. [7]–[9]). Однако при использовании разнесенной схемы трудно удовлетворить свойствам консервативности (см. [10]).

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 19-71-10094).

Другим решением является использование метода интерполяции Ри–Чоу (см. [11]) с совмещенным расположением неизвестных. Он является стандартным в промышленных приложениях (см. [12]–[16]).

В настоящей работе используется гипотеза о том, что inf-sup устойчивость удовлетворяется, если все матричные коэффициенты в выражении векторного потока имеют положительные собственные значения. Ранее мы применяли эту гипотезу к смешанной постановке задачи Дарси с седловой точкой (см. [17]), задаче Навье–Стокса (см. [3]) и к задаче гидроразрыва пласта, заданной уравнениями Дарси и пороупругости в разных областях (см. [18]).

Схема, предложенная в [1], [3], получена с использованием метода осреднения в гармонической точке. Первоначально концепция гармонической точки была предложена для задачи анизотропной диффузии (см. [19], [20]). Позже она была расширена для задач анизотропной упругости и поромеханики (см. [21], [22]). Выражение осреднения в гармонической точке вытекает из непрерывности совмещенного потока импульса и массы на границе раздела. Оно позволяет получить единственное выражение для совмещенного потока.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 определяется задача и описывается метод конечных объемов. В разд. 3 подробно описаны отдельные нюансы дискретизации одностороннего совмещенного потока. Единственное выражение аппроксимации потока выводится из непрерывности односторонних приближений в разд. 4. Граничные условия и аппроксимация потока на границе объясняются в разд. 5. В разд. 6 подробно описывается метод восстановления градиента, а в разд. 7 – шаги по сборке и решению нелинейной системы. Численные тесты проводятся в разд. 8.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ

Мы ищем решение системы стационарных уравнений Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) + p \mathbb{I}) &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0, \\ \text{граничные условия} &\text{ на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Система (1) замкнута с соответствующими граничными условиями, которые вводятся в разд. 5. В (1) $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ – вектор скорости, p – давление, $u, v, w, p \in H^1(\Omega)$ с соответствующей поправкой на пространство на границе, $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости, постоянная из-за несжимаемости, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$ – тензор напряжений:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} [\mathbf{u} \nabla^T + \nabla \mathbf{u}^T], \tag{2}$$

где $\mu = \text{const}$ – динамическая вязкость жидкости, $\nabla^T = [\partial_x \ \partial_y \ \partial_z]$ и \mathbb{I} – единичная матрица соответствующего размера. Условие бездивергентности поля скорости читается как

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \nabla = [u \ v \ w] \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Учитывая член напряжения, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) &= \mu (\mathbf{u} \nabla^T + \nabla \mathbf{u}^T) \nabla = \mu \mathbf{u} \nabla^T \nabla + \mu \nabla \mathbf{u}^T \nabla = \mu \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} [\partial_x \ \partial_y \ \partial_z] \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} [u \ v \ w] \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = \\ &= \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \partial_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \partial_y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \partial_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4}$$

таким образом, второй член исчезает для бездивергентного поля скорости. Однако это приводит к другому приближению, которое влияет на устойчивость метода. В данной работе мы предполагаем, что компоненты вектора скорости и давления являются кусочно-линейными.

В методе конечных объемов мы используем формулу Остроградского–Гаусса для оператора дивергенции на каждой ячейке $V \in \mathcal{V}(\Omega)$, что приводит к

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) + p \mathbb{I}) dV \approx \sum_{\sigma \in \mathcal{F}(V)} |\sigma| \left[\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) + p \right]_{\mathbf{x}_\sigma} \cdot \mathbf{n},$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV \approx \sum_{\sigma \in \mathcal{F}(V)} |\sigma| [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_{\mathbf{x}_\sigma}.$$
(5)

Здесь \mathbf{n} – средняя единичная нормаль грани σ , направленная наружу клетки V .

3. АППРОКСИМАЦИЯ ПОТОКА НА ГРАНИ

Уравнения в (5) вводят потоки импульса \mathbf{t} и непрерывности q :

$$\mathbf{t} = \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \mathbf{n} + p \mathbf{n}, \quad q = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n},$$
(6)

где \mathbf{t} состоит из адвективной части $\mathbf{t}_A = \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, вязкостной части $\mathbf{t}_T = -\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \mathbf{n}$ и вклада давления $\mathbf{t}_p = p \mathbf{n}$. Потоки \mathbf{t} и q непрерывны на любой поверхности, т.е. на любом сеточном интерфейсе σ . Заметим, что в силу уравнения непрерывности скорость \mathbf{u} непрерывна во всей области.

Адвективная часть \mathbf{t}_A потока импульса \mathbf{t} линеаризуется для получения эффективного тензора скорости. Пусть $\mathbf{u}_1 = [u_1, v_1, w_1]^T$ – вектор скорости, расположенный в барицентре \mathbf{x}_1 ячейки V_1 . Используя простую формулу разложения Тейлора, аппроксимация второго порядка адвективной части \mathbf{t}_A потока импульса в барицентре \mathbf{x}_σ грани σ имеет следующий вид:

$$\mathbf{t}_A|_{\mathbf{x}_\sigma} \approx \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\mathbf{x}_1} + \frac{\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{x}_1} (\mathbf{u} \nabla^T) \Big|_{\mathbf{x}_1} (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1),$$
(7)

который при предположении линейности скорости и использовании неизвестной скорости интерфейса \mathbf{u}_σ может быть упрощен до

$$\mathbf{t}_A|_{\mathbf{x}_\sigma} \approx \frac{\rho}{2} (\mathbf{u}_1 \mathbf{n}^T + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} \mathbb{I}) (2\mathbf{u}_\sigma - \mathbf{u}_1).$$
(8)

Аппроксимация вязкостной части \mathbf{t}_T формулируется следующим образом:

$$\mathbf{t}_T|_{\mathbf{x}_\sigma} \approx -\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})|_{\mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{n} \approx -\mu (\mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T + \mathbf{n}^T \otimes \mathbb{I}) (\mathbf{u} \otimes \nabla) \Big|_{\mathbf{x}_1}.$$
(9)

Здесь \otimes обозначает произведение Кронекера, вектор градиента $\mathbf{u} \otimes \nabla$ размера 9×1 и матрица $\mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T + \mathbf{n}^T \otimes \mathbb{I}$ размера 3×9 выражаются следующим образом:

$$\mathbf{u} \otimes \nabla = \begin{bmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T + \mathbf{n}^T \otimes \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 2n_x & n_y & n_z & n_y & n_x & n_z \\ n_x & n_x & 2n_y & n_z & n_x & n_z \\ n_x & n_y & n_x & n_y & 2n_x & 2n_z \end{bmatrix}.$$
(10)

При предположении линейности разложение для градиента является точным:

$$\mathbf{u}_1 \otimes \nabla = r_1^{-1} (\mathbb{I} \otimes \mathbf{n}) (\mathbf{u}_\sigma - \mathbf{u}_1) + (\mathbb{I} - r_1^{-1} (\mathbb{I} \otimes \mathbf{n})) \mathbb{I} \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)^T \mathbf{u}_1 \otimes \nabla.$$
(11)

Применим (11) к (9) и получим

$$\mathbf{t}_T|_{\mathbf{x}_\sigma} \approx \mu r_1^{-1} (\mathbb{I} + \mathbf{n} \mathbf{n}^T) (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_\sigma) - \mu (\mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T + \mathbf{n}^T \otimes \mathbb{I} - r_1^{-1} (\mathbb{I} + \mathbf{n} \mathbf{n}^T) \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)^T) \mathbf{u}_1 \otimes \nabla,$$
(12)

где $r_1 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)$ и $(\mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T + \mathbf{n}^T \otimes \mathbb{I}) (\mathbb{I} \otimes \mathbf{n}) = \mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T \mathbf{n} + \mathbf{n}^T \otimes \mathbf{n} = \mathbb{I} + \mathbf{n} \mathbf{n}^T$.

Вклад давления в поток импульса \mathbf{t}_p и поток непрерывности q образуют систему с седловой точкой:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_p \\ q \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_\sigma} = \begin{bmatrix} p_\sigma \mathbf{n} \\ \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\sigma \\ p_\sigma \end{bmatrix} = S(\mathbf{n}) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\sigma \\ p_\sigma \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где неопределенная матрица $S(\mathbf{n})$ размера 4×4 имеет два собственных значения: ± 1 . Аппроксимация второго порядка для совмещенного потока (13) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_p \\ q \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_\sigma} \approx A \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} - (A - S(\mathbf{n})) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\sigma \\ p_\sigma \end{bmatrix} + A \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla, \quad (14)$$

где 4×4 матрица $A > 0$ используется для стабилизации метода. Введем матрицу A вместе с другими матричными коэффициентами:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) &= \begin{bmatrix} a(\mathbb{1} + \mathbf{nn}^T) & c\mathbf{n} \\ c\mathbf{n}^T & b \end{bmatrix}, & Q(\mathbf{u}, \mathbf{n}) &= \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{un}^T + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\mathbb{1}) \\ 2 \end{bmatrix}, \\ W(\mathbf{n}) &= \begin{bmatrix} \mu(\mathbb{1} \otimes \mathbf{n}^T + \mathbf{n}^T \otimes \mathbb{1}) \end{bmatrix}, & (15) \\ T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) &= A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) + \begin{bmatrix} \mu r^{-1}(\mathbb{1} + \mathbf{nn}^T) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $r = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ и параметры a, b и c зависят от $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$. Определяя $T_1 = T(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1, \mathbf{n})$, $Q_1 = Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{n})$, $S_1 = S(\mathbf{n})$ и $W_1 = W(\mathbf{n})$, мы получаем полное выражение для совмещенного потока:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ q \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_\sigma} \approx (T_1 - Q_1) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} - (T_1 - S_1 - 2Q_1) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\sigma \\ p_\sigma \end{bmatrix} + (T_1 \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)^T - W_1) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla. \quad (16)$$

Мы требуем положительности собственных значений в $T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) - Q(\mathbf{u}, \mathbf{n})$ и $T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) - S(\mathbf{u}, \mathbf{n}) - 2Q(\mathbf{u}, \mathbf{n})$ путем выбора параметров a, b, c с минимальными абсолютными значениями. Для краткости опускаем анализ и ссылаемся на [1], но для полноты представляем выбор параметров. Пусть $\mathbf{v} = \rho \mathbf{n}^T \mathbf{u} / 2$, тогда

$$a = \max(2\mathbf{v} - \mu r^{-1}, 0) + \rho \sqrt{\mathbf{u}^T (\mathbb{1} - \mathbf{nn}^T) \mathbf{u} + \varepsilon^2} > 0. \quad (17)$$

Пусть $\zeta = a + \mu r^{-1} - 2\mathbf{v} > 0$ и $\zeta + \mathbf{v} \geq 0$, тогда b и c даются в виде

$$c = \begin{cases} 1+t-\sqrt{t+t^2}, & \mathbf{v} > 0, \\ 1/2, & \mathbf{v} = 0, \\ 1+t+\sqrt{t+t^2}, & \mathbf{v} < 0, \end{cases} \quad b = \begin{cases} (1/2+t-\sqrt{t+t^2})/\mathbf{v}, & \mathbf{v} > 0, \\ 1/(8\zeta), & \mathbf{v} = 0, \\ (1/2+t+\sqrt{t+t^2})/\mathbf{v}, & \mathbf{v} < 0, \end{cases} \quad (18)$$

где $t = \zeta/\mathbf{v}$ и $b\zeta \in [0, 1/2]$.

4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОТОКА НА ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИ

Определим $p_i, \nabla p_i, \mathbf{u}_i, \nabla \mathbf{u}_i$, давление, скорость и градиент скорости в ячейке V_i с барицентром \mathbf{x}_i . Пусть внутренняя грань $\sigma \in \mathcal{F}(\Omega \setminus \partial\Omega)$ является общей для двух ячеек V_1 и V_2 , т.е. $\sigma = V_1 \cap V_2$, $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(\Omega)$. Мы предполагаем, что нормаль \mathbf{n} ориентирована из V_1 в V_2 .

Пусть $T_2 = T(\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_2, -\mathbf{n})$, $Q_2 = Q(\mathbf{u}_2, -\mathbf{n})$, $S_2 = S(-\mathbf{n})$ и $W_2 = W(-\mathbf{n})$, тогда аппроксимация потока со стороны ячейки V_2 имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ q \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_\sigma} \approx (T_2 - S_2 - 2Q_2) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\sigma \\ p_\sigma \end{bmatrix} - (T_2 - Q_2) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} - (T_2 \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_2)^\top - W_2) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \otimes \nabla. \quad (19)$$

Подход к выбору параметров сохраняется для матричных коэффициентов в (19) с учетом обратного направления нормали. Приравнявая приближения потоков (16) и (19), получим вектор неизвестных на грани:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_\sigma \\ p_\sigma \end{bmatrix} = (T_1 + T_2 - S_1 - S_2 - 2Q_1 - 2Q_2)^{-1} \begin{pmatrix} (T_1 - Q_1) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} + (T_1 \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)^\top - W_1) \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla \right) + \\ + (T_2 - Q_2) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} + (T_2 \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_2)^\top - W_2) \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \otimes \nabla \right) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Единственное выражение для аппроксимации потока получается путем подстановки (20) в (16) или (19):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ q \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_\sigma} &\approx (T_2 - S_2 - 2Q_2)(T_1 + T_2 - S_1 - S_2 - 2Q_1 - 2Q_2)^{-1} \times \\ &\times \left((T_1 - Q_1) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} + (T_1 \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)^\top - W_1) \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla \right) \right) - \\ &- (T_1 - S_1 - 2Q_2)(T_1 + T_2 - S_1 - S_2 - 2Q_1 - 2Q_2)^{-1} \times \\ &\times \left((T_2 - Q_2) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} + (T_2 \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_2)^\top - W_2) \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \otimes \nabla \right) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Граничные условия на грани $\sigma \in \mathcal{F}(\partial\Omega)$ заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^\top (\alpha_\perp \mathbf{u} + \beta_\perp (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - p\mathbb{I})) \Big|_{\mathbf{x}_\sigma} &= r_\perp, \\ (\mathbb{I} - \mathbf{nn}^\top) (\alpha_\parallel \mathbf{u} + \beta_\parallel (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - p\mathbb{I})) \Big|_{\mathbf{x}_\sigma} &= \mathbf{r}_\parallel. \end{aligned} \quad (22)$$

Граничные условия (22) используются для вывода выражения для вектора неизвестных на грани. Для этого граничные условия дополняются условием на давление:

$$(\alpha_p p + \beta_p \mathbf{n} \cdot \nabla p) \Big|_{\mathbf{x}_\sigma} = r_p. \quad (23)$$

В (23) $r_p = \alpha_p p_b + \beta_p \xi$ с предписанным граничным давлением p_b . В [1] для простоты мы использовали граничное условие для давления $\xi = \mathbf{n} \cdot \nabla p^n$, предложенное в [2], где p^n – давление на предыдущем временном шаге. Такой выбор невозможен в настоящей работе из-за отсутствия времени. Прямой подход определения граничных условий состоит в том, чтобы вывести ξ из уравнения импульса или непрерывности (см. [23]). Воспользуемся первым вариантом и из первого уравнения в (1) получим

$$\xi = \mathbf{n} \cdot \text{div}(p\mathbb{I}) = \mathbf{n} \cdot \nabla p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} - \mathbf{n} \cdot \text{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^\top - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})). \quad (24)$$

В силу предположения о локальной линейности \mathbf{u} и с учетом (4) член $\mathbf{n} \cdot \text{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}))$, состоящий из вторых производных вектора скорости, обращается в нуль в (24).

Таблица 1. Коэффициенты для распространенных типов граничных условий

| | Коэффициенты Γ_D | Γ_{NS} | Γ_S | Γ_{TF} | Γ_P | Γ_{MN} |
|--------------------------|---|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| α_{\perp} | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| α_{\parallel} | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | λ |
| β_{\perp} | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| β_{\parallel} | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| α_p | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| β_p | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| r_{\perp} | $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_b$ | 0 | 0 | 0 | $-p_b$ | 0 |
| \mathbf{r}_{\parallel} | $\mathbf{u}_b - \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u}_b$ | $\mathbf{0}$ | $\mathbf{0}$ | $\mathbf{0}$ | $\mathbf{0}$ | $\mathbf{0}$ |

Учитывая вклад адвективного члена в (24) и используя условие бездивергентности (3), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \text{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T) &= \rho \mathbf{n}^T \mathbf{u} \mathbf{u}^T \nabla = \rho \mathbf{n}^T \begin{bmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{bmatrix} \nabla = \rho \mathbf{n}^T \begin{bmatrix} u \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial z} + w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{bmatrix} = \\ &= \rho \mathbf{n}^T \begin{bmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \rho (\mathbf{n}^T \otimes \mathbf{u}^T) \mathbf{u} \otimes \nabla. \end{aligned} \tag{25}$$

Наконец, отметим, что ξ является кусочно-постоянным из-за кусочно-линейности давления. В результате мы оцениваем ξ в барицентре \mathbf{x}_1 ячейки, смежной с σ . Это упрощает вычисление проекции объемной силы $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}$, которая обычно задана в центре ячейки, а адвективный член (25) превращается в $\rho (\mathbf{n}^T \otimes \mathbf{u}_1^T) \mathbf{u}_1 \otimes \nabla$.

Окончательное приближение для ξ имеет вид

$$\xi \approx \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_1} - \rho (\mathbf{n}^T \otimes \mathbf{u}_1^T) \mathbf{u}_1 \otimes \nabla. \tag{26}$$

Выбор коэффициентов для граничных условий типа Дирихле Γ_D , условия без проскальзывания Γ_{NS} , условия скольжения Γ_S , условия без трения Γ_{TF} , условия предписанного давления Γ_P и условия типа Максвелла–Навье Γ_{MN} с длиной скольжения λ представлены в табл. 1.

Объединим (22) и (23) в единую блочную систему, чтобы получить

$$D \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\sigma} \\ p_{\sigma} \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot \nabla p \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{x}_{\sigma}} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}r_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel} \\ r_p \end{bmatrix}, \tag{27}$$

где

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_{\parallel} \mathbb{I} + (\alpha_{\perp} - \alpha_{\parallel}) \mathbf{nn}^T & -\beta_{\perp} \mathbf{n} \\ & \alpha_p \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \beta_{\parallel} \mathbb{I} + (\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}) \mathbf{nn}^T & \\ & \beta_p \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Используя приближения (12), $\mathbf{n} \cdot \nabla p|_{\mathbf{x}_{\sigma}} \approx \mathbf{n} \cdot \nabla p_1$ и расширяя r_p с помощью (26), получаем

$$D \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\sigma} \\ p_{\sigma} \end{bmatrix} + N W_b \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla = \begin{bmatrix} \mathbf{n}r_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel} \\ \beta_p \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} + \alpha_p p_b \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где

$$W_b = \begin{bmatrix} \mu (\mathbb{1} \otimes \mathbf{n}^T + \mathbf{n}^T \otimes \mathbb{1}) \\ \rho \mathbf{n}^T \otimes \mathbf{u}_1^T & \mathbf{n}^T \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Мы используем разложение для градиента, аналогичное (11), но для скорости и давления:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla = r_1^{-1} (\mathbb{1} \otimes \mathbf{n}) \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}_\sigma \\ p_\sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \right) + (\mathbb{1} - r_1^{-1} (\mathbb{1} \otimes \mathbf{n})) \mathbb{1} \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla, \quad (31)$$

и введем

$$T_b = r_1^{-1} W_b (\mathbb{1} \otimes \mathbf{n}) = r_1^{-1} \begin{bmatrix} \mu (\mathbb{1} + \mathbf{n} \mathbf{n}^T) \\ \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{n}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Используя (31) и (32) в (29), получаем выражение для скорости и давления на грани:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_\sigma \\ p_\sigma \end{bmatrix} = (D + NT_b)^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{n} r_\perp + \mathbf{r}_\parallel \\ \beta_p \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} + \alpha_p p_b \end{bmatrix} + NT_b \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} + N (T_b \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)^T - W_b) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla \right). \quad (33)$$

Для аппроксимации потока на границе подставим выражение (33) в формулу (16).

6. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА

Для численного расчета потоков остается вычислить градиент скорости и давления в каждой ячейке V_i . Рассмотрим ячейку V_1 с набором граней $\sigma \in \mathcal{F}(V_1)$. Для внутренней грани $\sigma \in \mathcal{F}(\Omega \setminus \partial\Omega)$, $\sigma = V_1 \cap V_2$ мы накладываем следующее условие на градиент:

$$\mathbb{1} \otimes (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

а на границе $\sigma \in \mathcal{F}(\partial\Omega)$, $\sigma = \partial\Omega \cap V_1$ воспользуемся условием линейности

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} + \mathbb{1} \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\sigma \\ p_\sigma \end{bmatrix}, \quad (35)$$

чтобы вывести из (33) следующее условие на градиент:

$$\left(D \otimes (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1)^T + N W_b \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla = \begin{bmatrix} \mathbf{n} r_\perp + \mathbf{r}_\parallel \\ \beta_p \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} + \alpha_p p_b \end{bmatrix} - D \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Дополняем систему условием бездивергентности:

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla = 0. \quad (37)$$

Условия (34) и (36) по всем интерфейсам V_i и (37) образуют линейную систему с матрицей $A \in \mathcal{R}^{4|\mathcal{F}(V_1)|+1 \times 12}$ и правой частью $B \in \mathcal{R}^{4|\mathcal{F}(V_1)|+1 \times 1}$. Прямоугольная система решается методом наименьших квадратов:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \otimes \nabla = (A^T A)^{-1} A^T B, \quad (38)$$

что требует обращение положительно-определенной матрицы $A^T A$ размера 12×12 .

Мы обнаружили, что на практике для точности полезно масштабировать на r_1 строку, соответствующую давлению в (36).

7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для определения стационарного состояния нелинейной задачи используется метод Ньютона. На каждой итерации k метода Ньютона соберем вектор правой части \mathcal{R}^k размером $4|\mathcal{V}(\Omega)| \times 1$ и соответствующую матрицу \mathcal{J}^k размером $4|\mathcal{V}(\Omega)| \times 4|\mathcal{V}(\Omega)|$. В данной работе используется автоматическое дифференцирование для сборки разреженных матриц, в результате чего рассматривается только сборка невязки. Сборка происходит следующим образом:

1. Предварительно вычислим градиенты скорости и давления $[\mathbf{u}_i \ p_i]^T \otimes \nabla$ вместе с производными по каждой ячейке $V_i \in \mathcal{V}(\Omega)$, собирая и решая систему (38).

2. Соберем невязку в ячейке $V_i \in \mathcal{V}(\Omega)$, вычисляя (5):

$$\mathcal{R}_{V_i}^k = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}(V_i)} \left| \sigma \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ q \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}_\sigma}, \quad (39)$$

где потоки аппроксимируются, согласно (21) и (16)–(33), на внутренней и граничной σ соответственно.

3. Для каждой ячейки $V_i \in \mathcal{V}(\Omega)$ вычтем правую часть из невязки $\mathcal{R}_{V_i}^k$.

Скорость и давление на следующей итерации Ньютона $k + 1$ получаются из решения системы

$$\mathcal{J}^k \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}^{k+1} \\ p^{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{u}^k \\ p^k \end{bmatrix} \right) = -\mathcal{R}^k, \quad (40)$$

и следующая итерация продолжается с \mathbf{u}^{k+1} и p^{k+1} до тех пор, пока не будет достигнута относительная τ_{rel} или абсолютная τ_{abs} точность падения нормы невязки. Линейная система решается итерационно методом стабилизированного градиента с многоуровневым предобуславливателем второго порядка Crout-ILU (см. [5], [24]). Программная реализация метода основана на инструментари INMOST для распределенного математического моделирования (см. [5], [25], [26]), который обеспечивает обработку сетки, сборку линейной системы с помощью автоматического дифференцирования, решение линейной системы и визуализацию.

8. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Сначала мы продемонстрируем влияние новых граничных условий для давления на аналитическом решении для уравнений Навье–Стокса, предложенном Эшером и Штейнманом (см. [27]). Аналитическое решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -\frac{\pi}{4} \left(e^{\frac{\pi x}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4}(y + 2z)\right) + e^{\frac{\pi z}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{4}(x + 2y)\right) \right) e^{-\frac{\mu \pi^2 t}{4}}, \\ v(x, y, z) &= -\frac{\pi}{4} \left(e^{\frac{\pi y}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4}(z + 2x)\right) + e^{\frac{\pi x}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{4}(y + 2z)\right) \right) e^{-\frac{\mu \pi^2 t}{4}}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$w(x, y, z) = -\frac{\pi}{4} \left(e^{\frac{\pi z}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 2y)\right) + e^{\frac{\pi y}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{4}(z + 2x)\right) \right) e^{-\frac{\mu \pi^2 t}{4}},$$

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= -\frac{\pi^2}{32} \left(e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{\frac{\pi y}{2}} + e^{\frac{\pi z}{2}} + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 2y)\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}(z + 2x)\right) e^{\frac{\pi(y+z)}{4}} + \right. \\ &+ 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}(y + 2z)\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}(x + 2y)\right) e^{\frac{\pi(z+x)}{4}} + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}(z + 2x)\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}(y + 2z)\right) e^{\frac{\pi(x+y)}{4}} \left. \right) e^{-\frac{\mu \pi^2 t}{2}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Таблица 2. Нормы ошибок для задачи Эшера–Штейнмана

| ξ | 0 | | $\mathbf{n} \cdot \nabla p(x, y, z) _{x_0}$ | | по (26) | |
|----------|---------------------------------------|---------------------|---|---------------------|---------------------------------------|---------------------|
| | $\ \mathbf{u}_h - \mathbf{u}\ _{L_2}$ | $\ p_h - p\ _{L_2}$ | $\ \mathbf{u}_h - \mathbf{u}\ _{L_2}$ | $\ p_h - p\ _{L_2}$ | $\ \mathbf{u}_h - \mathbf{u}\ _{L_2}$ | $\ p_h - p\ _{L_2}$ |
| $N = 4$ | 0.04 | 0.25 | 0.025 | 0.14 | 0.026 | 0.21 |
| $N = 8$ | 0.023 | 0.083 | 0.01 | 0.027 | 0.011 | 0.037 |
| $N = 16$ | 0.012 | 0.034 | 0.0035 | 0.0054 | 0.0037 | 0.0077 |
| $N = 32$ | 0.006 | 0.016 | 0.001 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0017 |
| θ | 0.97 | 1.06 | 1.74 | 2.17 | 1.74 | 2.17 |

Мы вводим множитель Лагранжа и накладываем ограничение на интеграл давления, следуя [3] для единственного решения по давлению:

$$\sum_{V_i \in \mathcal{V}(\Omega)} p_i |V_i| = \sum_{V_i \in \mathcal{V}(\Omega)} p(x_i, y_i, z_i) |V_i| \approx \int_{\Omega} p(x, y, z) dV. \quad (43)$$

Задача решается в единичном кубе $\Omega \in [0, 1]^3$ до стационарного состояния для невязкой жидкости с $\rho = 1$ и $\mu = 0$. Заметим, что для невязкой жидкости аналитическое решение не зависит от времени. Аналитическое решение удовлетворяет $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. По всей границе накладываются граничные условия типа Дирихле $\partial\Omega = \Gamma_D$. Скорость на границе \mathbf{u}_b определяется из аналитического решения в центрах граней. Для ускорения сходимости мы задаем аналитическое решение в качестве начального решения как для давления, так и для скорости.

Введем декомпозицию Ω на регулярную $N \times N \times N$ кубическую сетку и рассмотрим три варианта задания граничных условий на давление. Первый вариант – $\xi = 0$, второй – $\xi = \mathbf{n} \cdot \nabla p(x, y, z)|_{x_0}$ и в третьем варианте ξ определяется по формуле (26).

Результаты для всех трех вариантов приведены в табл. 2 при различном сгущении сетки. В таблице $\theta = \log_2(\mathcal{E}_{32}/\mathcal{E}_{16})$ обозначает скорость сходимости, где \mathcal{E}_N – L_2 -норма ошибки на $N \times N \times N$ кубической сетке. Полученные результаты явно мотивируют использование формулы (26) для ξ . Хотя аналитически заданное ξ дает немного лучшие результаты, скорость сходимости восстанавливается с ξ , определенным по формуле (26).

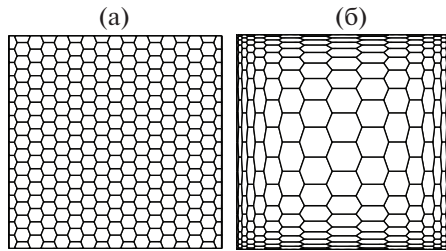
Нелинейная задача на каждом временном шаге требует до трех итераций для падения нормы невязки к точности $\tau_{\text{abs}} = 10^{-7}$ и $\tau_{\text{rel}} = 10^{-4}$. Для сравнения наименьшая начальная норма невязки составляет 1.6×10^{-4} , что соответствует аналитическому граничному условию на самой мелкой сетке.

Далее мы рассмотрим двумерную версию задачи о каверне с подвижной крышкой (см. [28]). Как и в [3] область единичного куба $\Omega \in [0, 1]^3$ аппроксимируется полигональной призматической сеткой с одним слоем ячеек в z -направлении. Узлы исходной регулярной сетки искажены для улучшения разрешения вблизи границ. Формула преобразования для координат исходной сетки $x_i, (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ имеет вид

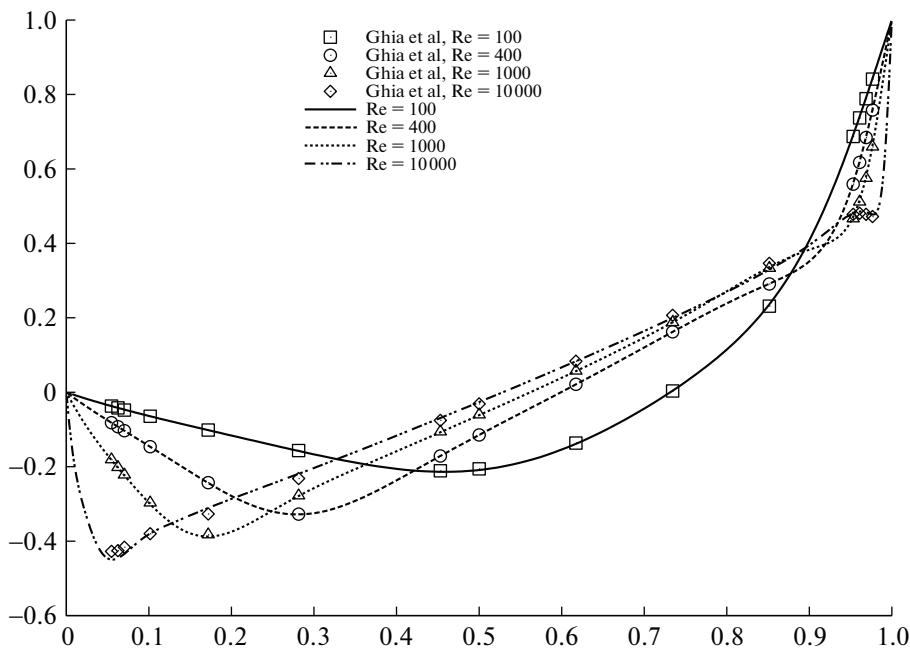
$$\tilde{x}_i = \frac{1}{2} + \left(x_i - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4} + \gamma^2\right)^{1/2} \left[\left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \gamma^2 \right]^{-1/2}, \quad (44)$$

где \tilde{x}_i – новая координата сетки, во всех случаях мы выбираем $\gamma = 1/4$. Регулярная и искаженная сетка с 280 элементами показана на фиг. 1. Для теста мы используем искаженную полигональную призматическую сетку с 65920 элементами, что приводит к системе из 263 680 неизвестных.

Граничное условие типа Дирихле Γ_D с $\mathbf{u}_b = (1, 0, 0)^T$ предписано на верхней стороне куба на $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{y = 1\}$, граничные условия скольжения Γ_S заданы на фронтальной и тыловой сторонах куба $\Gamma_2 = \partial\Omega \cap \{z = 0 \cup z = 1\}$ и отсутствие скольжения Γ_{NS} на левой, правой и нижней сторонах $\Gamma_3 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Интересующие нас числа Рейнольдса $\text{Re} \in \{100, 400, 1000, 3200, 10000\}$,



Фиг. 1. Полигональная призматическая сетка с 280 элементами в единичном кубе, оригинальная регулярная сетка (а), после искажения (44) с $\gamma = 1/4$ (б).



Фиг. 2. Сравнение u -компоненты скорости для $Re = \{100, 400, 1000, 10000\}$ вдоль $y = 0.5$ с данными из [28].

вязкость $\mu = 1/Re$ и плотность $\rho = 1$. Для единственного решения по давлению система дополнена множителем Лагранжа и ограничением (43).

Стационарная задача для $Re_i \in \{100, 400, 1000, 3200, 10000\}$ решается с ξ , определяемым (26). Начальным состоянием задачи при $Re_0 = 100$ являются нулевая скорость и давление, затем для ускорения сходимости мы повторно используем стационарное решение предыдущей задачи с Re_{i-1} для определения начального состояния для каждой последующей задачи с более высоким числом Рейнольдса Re_i . Решение стационарных задач требует до восьми итераций Ньютона с параметром точности $\tau_{abs} = 10^{-5}$.

Таблица 3. Сравнение u -компоненты скорости для $Re = 100$ вдоль $y = 0.5$ с данными из [28] и с различным выбором граничного условия ξ

| y | 0.9766 | 0.9531 | 0.7344 | 0.4531 | 0.1719 | 0.0547 |
|---------------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|
| Данные [28] | 0.84123 | 0.68717 | 0.00332 | -0.21090 | -0.10150 | -0.03717 |
| ξ из (26) | 0.84443 | 0.69016 | 0.00357 | -0.21367 | -0.10155 | -0.03707 |
| $\xi = 0$ | 0.84256 | 0.68682 | 0.00068 | -0.20823 | -0.10424 | -0.03737 |

Сравнение с эталонными данными [28] представлено на фиг. 2. Детальное сравнение в нескольких контрольных точках с различным выбором ξ для наиболее вязкого случая $Re = 100$ приведено в табл. 3. В результате при $\xi = 0$ метод немного сглаживает отрицательную вершину при $y = 0.4531$, а новый метод немного проскакивает ее. Метод Ньютона не сходится к стационарному состоянию при $Re = 10000$ и $\xi = 0$.

9. ВЫВОДЫ

В настоящей работе предложен и исследован подход к определению искусственных граничных условий на давление для стационарных уравнений Навье–Стокса. Новый подход достаточно прост для интеграции в конечно-объемную схему. Он демонстрирует явное улучшение скорости сходимости на задаче с известным аналитическим решением и работает в нескольких сложных эталонных задачах.

В дальнейших работах будет рассмотрен другой подход к аппроксимации диффузионного члена, учитывающий условие бездивергентности и применимый к неньютоновским жидкостям. Другим возможным направлением исследований является метод восстановления градиента с меньшим шаблоном.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Terekhov K.* Fully-implicit collocated finite-volume method for the unsteady incompressible navier-stokes problem. In Numerical Geometry, Grid Generation and Scientific Computing, Lect. Not. in Comput. Sci. and Engineer. Springer, Cham, 2021.
2. *Gresho P.M.* On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible ow and its implementation via a nite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. part 1: Theory // Inter. J. Numer. Meth. Fluid. 1990. V. 11. № 5. P. 587–620.
3. *Terekhov K.* Collocated finite-volume method for the incompressible Navier Stokes problem // J. of Numer. Math. 2021. V. 29. № 1. P. 63–79.
4. *Bouchnita A., Terekhov K., Nony P., Vassilevski Yu., Volpert V.* A mathematical model to quantify the effects of platelet count, shear rate, and injury size on the initiation of blood coagulation under venous ow conditions // Plos one. 2020. V. 15. № 7. e0235392.
5. *Vassilevski Yu., Terekhov K., Nikitin K., Kapyrin I.* Parallel finite volume computation on general meshes. Springer Inter. Publ., 2020.
6. *Ladyzhenskaya O.A.* The mathematical theory of viscous incompressible flow, V. 12. Gordon & Breach, New York, 1969.
7. *Lebedev V.I.* Difference analogues of orthogonal decompositions, basic differential operators and some boundary problems of mathematical physics // USSR Comput. Math. and Math. Phys. 1964. V. 4, № 3. P. 69–92.
8. *Harlow F.H., Welch J.E.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible ow of fluid with free surface // Phys. Fluid. 1965. V. 8. № 12. P. 2182–2189.
9. *Olshanskii M.A., Terekhov K.M., Vassilevski Yu.V.* An octree-based solver for the incompressible Navier Stokes equations with enhanced stability and low dissipation // Comput. Fluid. 2013. V. 84. P. 231–246.
10. *Perot B.* Conservation properties of unstructured staggered mesh schemes // J. of Comput. Phys. 2000. V. 159. № 1. P. 58–89.
11. *Rhie C.M., Chow W.L.* Numerical study of the turbulent ow past an airfoil with trailing edge separation // AIAA J. 1983. V. 21. № 11. P. 1525–1532.
12. *Brewster R., Carpenter C., Volpenhein E., Baglietto E., Smith J.* Application of cd-adapco best practices to nestor omega mvg benchmark exercises using star-ccm+,” // Proc. of NURETH-16. Chicago. IL. 2015.
13. ANSYS CFX-Solver. Theory guide. Release 11, 2006.
14. *Markovic J.D., Lukic N.L., Ilic J.D., Nikolovski B.G., Milan N Sovilj M.N., Sijacki I.M.* Using the ansys fluent for simulation of two-sided lid- driven ow in a staggered cavity // Acta Period. Technolog. 2012. V. 43. P. 169–178.
15. *Rutkowski D.R., Roldan-Alzate A., Johnson K.M.* Enhancement of cerebrovascular 4d flow mri velocity fields using machine learning and computational fluid dynamics simulation data // Sci. Rep. 2021. V. 11. № 1. P. 1–11.
16. *Karrholm F.P.* Rhie-chow interpolation in openfoam. Depart.t of Appl. Mech., Chalmers Univer. of Technology: Goteborg, Sweden, 2006.
17. *Terekhov K., Vassilevski Yu.* Finite volume method for coupled subsurface ow problems, I: Darcy problem // J. of Comput. Phys. 2019. V. 395. P. 298–306.
18. *Terekhov K.* Multi-physics flux coupling for hydraulic fracturing modelling within INMOST platform // Rus. J. of Numer. Analys. and Math. Model. 2020. V. 35. № 4. P. 223–237.

19. *Agelas L., Eymard R., Herbin R.* A nine-point finite volume scheme for the simulation of diffusion in heterogeneous media // *Comptes Rendus Math.* 2009. V. 347. P. 673–676.
20. *Terekhov K., Mallison B., Tchelepi H.* Cell-centered nonlinear finite-volume methods for the heterogeneous anisotropic diffusion problem // *J. of Comput. Phys.* 2017. V. 330. P. 245–267.
21. *Terekhov K.* Cell-centered finite-volume method for heterogeneous anisotropic poromechanics problem // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2020. V. 365. P. 112357.
22. *Terekhov K., Tchelepi H.* Cell-centered finite-volume method for elastic deformation of heterogeneous media with full-tensor properties // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2020. V. 364. P. 112331.
23. *Gresho P.M., Sani R.L.* On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations // *Inter. J. Numer. Meth. Fluid.* 1987. V. 7. № 10. P. 1111–1145.
24. *Terekhov K.* Parallel multilevel linear solver within INMOST platform. In Voevodin V., Sobolev S. (eds) *Supercomputing. RuSCDays 2020. Comm. in Comput. and Inform. Sci.* Springer, Cham, 2020.
25. *Terekhov K., Vassilevski Yu.* INMOST parallel platform for mathematical modeling and applications. In Voevodin V., Sobolev S. (eds) *Supercomputing. RuSCDays 2018. Comm. in Comput. and Inform. Sci.* V. 965. P. 230–241. Springer, Cham, 2018.
26. *Terekhov K., Vassilevski Yu.* Mesh modification and adaptation within INMOST programming platform. In *Numer. Geometry, Grid Generat. and Sci. Comput.* P. 243–255. Springer, 2019.
27. *Ethier C.R., Steinman D.A.* Exact fully 3D Navier Stokes solutions for benchmarking // *Inter. J. Numer. Meth. Fluid.* 1994. V. 19. № 5. P. 369–375.
28. *Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.* High-re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method // *J. Comput. Phys.* 1982. V. 48. № 3. P. 387–411.