ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 1, с. 123–144

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

О ЗАДАЧАХ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СОБОЛЕВСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСТВА

© 2023 г. М. О. Корпусов[1,*], Р. С. Шафир[1,**]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

**e-mail: romanshafir@mail.ru

Поступила в редакцию 01.08.2021 г.
Переработанный вариант 05.05.2022 г.
Принята к публикации 04.08.2022 г.

Исследуются две задачи Коши для нелинейных соболевских уравнений: $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \Delta u = |u|^q$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp u + \Delta u = |u|^q$. Найдены условия, при которых существуют слабые обобщенные локальные во времени решения задач Коши, а также происходит разрушение слабых решений этих же задач Коши. Библ. 15.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость.

DOI: 10.31857/S0044466922120092, **EDN:** LMBXET

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются две задачи Коши. Первая задача Коши имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \Delta u = |u|^q, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T], \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.2}$$

Вторая задача Коши имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp u + \Delta u = |u|^q, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T], \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.4}$$

В формуле (1.3) под оператором $\Delta_\perp$ понимается $\Delta_\perp := \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$.

В работе исследуются слабые и слабые обобщенные локальные во времени решения данных задач Коши. Доказывается существование слабых обобщенных решений при $q > 4$. При $1 < q \leqslant 3$ доказано разрушение слабых решений.

Отметим работу [1], в которой исследовалась задача Коши с той же нелинейностью, но другим дифференциальным оператором, имеющим вид

$$A_{x,t}[u](x,t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp u(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}(x,t).$$

Уравнения (1.1), (1.3) относятся к уравнениям соболевского типа (см. [2]), исследованию которых посвящено большое количество работ. Например, в работах Г.А. Свиридюка, С.А. Загребиной, А.А. Замышляевой [3]–[5] были рассмотрены в общем виде и в виде примеров начально-краевые задачи для различных типов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа.

Теория потенциала для неклассических уравнений типа Соболева впервые была рассмотрена в работе Б.В. Капитонова [6], а в дальнейшем изучалась в работах С.А. Габова и А.Г. Свешникова [7], [8], а также в работах их учеников (см. работу Ю.Д. Плетнера [9]).

В классической работе [10] С.И. Похожаева и Э. Митидиери методом нелинейной емкости были получены глубокие результаты о роли критических показателей. Также можно отметить работы Е.И. Галахова и О.А. Салиевой [11] и [12].

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [13]–[15] и посвященные получению критических показателей для решений задач Коши для нелинейных уравнений соболевского типа.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Пусть $\{O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ – некоторая декартова прямоугольная система координат в пространстве. При рассмотрении анизотропного сегнетоэлектрика вблизи температуры Кюри с анизотропией вдоль оси Oz и с учетом модельной временной дисперсии справедливы следующие уравнения:

$$D_x = \varepsilon_x E_x + \varepsilon_0 \int_0^t (t-\tau) E_x(\tau)\, d\tau, \tag{2.1}$$

$$D_y = \varepsilon_y E_y + \varepsilon_0 \int_0^t (t-\tau) E_y(\tau)\, d\tau, \tag{2.2}$$

$$D_z = \varepsilon_z E_z + \varepsilon_0 \int_0^t (t-\tau) E_z(\tau)\, d\tau, \tag{2.3}$$

причем

$$\max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\} \ll |\varepsilon_z|, \tag{2.4}$$

где

$$\mathbf{D} = D_x \mathbf{e}_x + D_y \mathbf{e}_y + D_z \mathbf{e}_z. \tag{2.5}$$

Кроме того, рассмотрим электрическую часть системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = q_0 \int_0^t |\phi|^q(\tau)\, d\tau, \quad q > 1. \tag{2.7}$$

Из уравнений (2.1)–(2.7) получим дифференциальное следствие

$$\varepsilon_x \phi_{xxtt} + \varepsilon_y \phi_{yytt} + \varepsilon_z \phi_{zztt} + \varepsilon_0 \Delta\phi = 4\pi q_0 |\phi|^q, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.8}$$

С учетом выражения (2.4) приходим к выводу о том, что уравнение (2.8) можно упростить, формально положив

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.$$

Приходим к уравнению

$$\varepsilon_z \phi_{zztt} + \varepsilon_0 \Delta\phi = 4\pi q_0 |\phi|^q. \tag{2.9}$$

Кроме того, мы в работе рассмотрим следующее уравнение:

$$\varepsilon_x \phi_{xxtt} + \varepsilon_y \phi_{yytt} + \varepsilon_0 \Delta\phi = 4\pi q_0 |\phi|^q, \tag{2.10}$$

которое получается из (2.8), если формально положить

$$\varepsilon_z = 0.$$

3. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Под классом функций $u(x,t) \in \mathbb{C}_b((1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2};\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ при $\gamma_1 \geqslant 0$ и $\gamma_2 \geqslant 0$ мы понимаем такие функции $u(x,t)\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$, что конечна следующая норма:

$$\|u\|_T := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]}(1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2}|u(x,t)| < +\infty. \tag{3.1}$$

Можно доказать, что $\mathbb{C}_b((1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2};\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ является банаховым пространством относительно нормы (3.1).

Под классом функций $\mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ мы понимаем такие функции $u(x,t)$, что

$$u(x,t), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\otimes[0,T]). \tag{3.2}$$

Можно доказать, что это пространство банахово относительно нормы

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]}\left[|u(x,t)| + \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|\right] < +\infty. \tag{3.3}$$

Под классом функций $\mathbb{C}^{2+2}(\mathbb{R}^3\otimes(0,T])$ мы понимаем такие функции $u(x,t)$, что

$$D_t^k D_x^\alpha u(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3\otimes(0,T]), \tag{3.4}$$

$$D_t^k = \partial_t^k, \quad D_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}, \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \\ \alpha_j \in \{0,1,2\}, \quad j = 1,2,3, \tag{3.5}$$

$$|\alpha| := \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leqslant 2, \quad k \in \{0,1,2\}, \tag{3.6}$$

причем всевозможные смешанные производные вида (3.4) перестановочны.

Под классом функций $\mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ подразумеваем такие функции $u(x,t)\in\mathbb{C}_b^{2+2}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$, что

$$D_t^k D_x^\alpha u(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\otimes[0,T]), \tag{3.7}$$

а также $u(x,T) = u'(x,T) = 0$ для всех $x\in\mathbb{R}^3$, и носитель $\operatorname{supp} u(x,t)$ – компакт в $\mathbb{R}^3\otimes[0,T]$.

Под классом функций $\mathbb{C}^{2+1}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ мы понимаем такие функции $u(x,t)$, что

$$D_t^k D_x^\alpha u(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T]), \tag{3.8}$$

$$D_t^k = \partial_t^k, \quad D_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}, \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \\ \alpha_j \in \{0,1,2\}, \quad j = 1,2,3, \tag{3.9}$$

$$|\alpha| := \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leqslant 2, \quad k \in \{0,1\}, \tag{3.10}$$

причем всевозможные смешанные производные вида (3.8) перестановочны.

Под классом функций $\mathbb{C}_b^{(0,1)}((1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2};\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ мы понимаем такие функции $u(x,t)$, что

$$u(x,t), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b((1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2};\mathbb{R}^3\otimes[0,T]). \tag{3.11}$$

Можно доказать, что это пространство банахово относительно нормы

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]}(1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2}\left(|u(x,t)| + \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|\right) < +\infty. \tag{3.12}$$

Будем говорить, что пара функций $\{u_0(x), u_1(x)\}$ принадлежит классу H_{x_3}, если $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ и найдется такой шар $O(x_0, R) \subset \mathbb{R}^3$ положительного радиуса $R > 0$, что $u_0(x), u_1(x) \in H^2(O(x_0, R))$, и имеет место неравенство

$$\left(\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_3^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_3^2}\right)^2 > 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in O(x_0, R). \tag{3.13}$$

Будем говорить, что пара функций $\{u_0(x), u_1(x)\}$ принадлежит классу $H_{x_1x_2}$, если $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ и найдется такой шар $O(x_0, R) \subset \mathbb{R}^3$ положительного радиуса $R > 0$, что $u_0(x), u_1(x) \in H^2(O(x_0, R))$, и имеет место неравенство

$$(\Delta_\perp u_0(x))^2 + (\Delta_\perp u_1(x))^2 > 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in O(x_0, R). \tag{3.14}$$

4. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ОЦЕНКИ

Рассмотрим первый дифференциальный оператор, действие которого определяется равенством

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u(x,t) + \Delta u(x,t), \tag{4.1}$$

где $(x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4_+ := \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^1_+$.

Найдем фундаментальное решение оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$, т.е. найдем решение следующего уравнения в смысле пространства обобщенных функций:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x,t) = \delta(t)\delta(x). \tag{4.2}$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства (4.2) и получим уравнение, понимаемое в смысле обобщенных функций:

$$p^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \overline{\mathscr{E}}(x,p) + \Delta \overline{\mathscr{E}}(x,p) = \delta(x). \tag{4.3}$$

Одним из решений данного уравнения является функция

$$\overline{\mathscr{E}}(x,p) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\frac{1}{\sqrt{p^2 + \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1^2 + x_2^2}}}. \tag{4.4}$$

Применим обратное преобразование Лапласа и получим следующий вид фундаментального решения:

$$\mathscr{E}(x,t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} J_0(\beta(x)t), \quad \beta(x) := \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1^2 + x_2^2}}, \tag{4.5}$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Для функции Бесселя справедлива оценка

$$|J_0(y)| \leqslant \frac{c_0}{\sqrt{|y|}} \quad \text{для всех} \quad y \neq 0, \tag{4.6}$$

где $c_0 > 0$ – некоторая постоянная. Тогда для функции $\mathscr{E}(x,t)$ справедлива следующая цепочка оценок:

$$\begin{gathered}|\mathscr{E}(x,t)| \leqslant \frac{c_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/4}\sqrt{t}} \leqslant \frac{c_1}{|x_3|^{1/2}(x_1^2 + x_2^2)^{1/4}\sqrt{t}} \\ \text{при} \quad x_3 \neq 0, \quad (x_1, x_2) \neq (0,0), \quad t > 0, \quad c_1 = \frac{c_0}{4\pi} > 0.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Кроме того, при $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ и $t \geqslant 0$ функция $\mathscr{E}(x,t)$ дифференцируема по переменной t, причем

$$\frac{\partial \mathscr{E}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{x_1^2 + x_2^2} J_1(\beta(x)t) \quad \text{при} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0), \quad t \geqslant 0. \tag{4.8}$$

При получении формулы (4.8) было использовано соотношение

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x). \tag{4.9}$$

Для функции Бесселя $J_1(x)$ справедлива оценка, аналогичная оценке (4.6) для функции $J_0(x)$, поэтому из (4.6), (4.8) получаем оценку

$$\left|\frac{\partial \mathscr{E}(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant c_2 \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/4}}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/4}\sqrt{t}} \quad \text{при} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0), \quad t > 0, \tag{4.10}$$

где $c_2 > 0$ — некоторая постоянная.

Из оценок (4.7), (4.10) следует, что

$$\mathscr{E}(x,t), \quad \frac{\partial \mathscr{E}(x,t)}{\partial t} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4_+). \tag{4.11}$$

Теперь рассмотрим второй дифференциальный оператор, действие которого определяется равенством

$$\mathfrak{L}_{x,t}[u](x,t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_\perp u(x,t) + \Delta u(x,t), \tag{4.12}$$

где $(x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4_+ := \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^1_+$.

Найдем фундаментальное решение оператора $\mathfrak{L}_{x,t}$, т.е. найдем решение следующего уравнения в смысле пространства обобщенных функций:

$$\mathfrak{L}_{x,t}[\mathscr{E}_1](x,t) = \delta(t)\delta(x). \tag{4.13}$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства (4.13) и получим следующее уравнение, понимаемое в смысле обобщенных функций:

$$(p^2+1)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\overline{\mathscr{E}_1}(x,p) + (p^2+1)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\overline{\mathscr{E}_1}(x,p) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\overline{\mathscr{E}_1}(x,p) = \delta(x). \tag{4.14}$$

Одним из решений данного уравнения является функция

$$\overline{\mathscr{E}_1}(x,p) = -\frac{1}{4\pi|x_3|} \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + \left(1 + \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}\right)}}. \tag{4.15}$$

Применим обратное преобразование Лапласа и получим следующий вид фундаментального решения:

$$\mathscr{E}_1(x,t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi|x_3|}\int_0^t J_0(\beta(x)\tau)\, J_0(t-\tau)\,d\tau, \quad \beta(x) := \sqrt{1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}}, \tag{4.16}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Снова воспользуемся оценкой (4.6) для функции Бесселя J_0 и получим оценку для фундаментального решения $\mathscr{E}_1(x,t)$:

$$|\mathscr{E}_1(x,t)| \leqslant \frac{c_1}{|x_3|^{1/2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/4}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}} d\tau \tag{4.17}$$
$$\text{при} \quad x_3 \neq 0, \quad (x_1, x_2) \neq (0,0), \quad t > 0, \quad c_1 > 0.$$

Заметим, что

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}}d\tau = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{1-s}}ds < +\infty \quad \text{при всех} \quad t : 0 \leqslant t < +\infty, \tag{4.18}$$

поэтому оценку (4.17) можно переписать следующим образом:

$$\left|\mathscr{E}_1(x,t)\right| \leqslant \frac{c_2}{\left|x_3\right|^{1/2}(x_1^2+x_2^2)^{1/4}}$$
$$\text{при} \quad x_3 \neq 0, \quad (x_1,x_2) \neq (0,0), \quad t > 0, \quad c_2 > 0. \tag{4.19}$$

Также заметим, что при $x_3 \neq 0$ и $t \geqslant 0$ функция $\mathscr{E}_1(x,t)$ дифференцируема по переменной t, и справедливо равенство

$$\frac{\partial \mathscr{E}_1(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi|x_3|}\int_0^t J_0(\beta(x)\tau)\,J_1(t-\tau)d\tau - \frac{1}{4\pi|x_3|}J_0(\beta(x)t) \quad \text{при} \quad x_3 \neq 0, \quad t \geqslant 0. \tag{4.20}$$

С помощью оценки (4.6) для функции Бесселя J_0 и аналогичной оценке для функции Бесселя J_1 нетрудно получить оценку

$$\left|\frac{\partial \mathscr{E}_1(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant \frac{c_0}{\left|x_3\right|^{1/2}(x_1^2+x_2^2)^{1/4}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{при} \quad x_3 \neq 0, \quad t > 0, \quad c_0 > 0. \tag{4.21}$$

Из оценок (4.19), (4.21) следует, что $\mathscr{E}_1(x,t), \dfrac{\partial \mathscr{E}_1(x,t)}{\partial t} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4_+)$.

В дальнейшем нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *При* $\gamma_1 > 2$ *и* $\gamma_2 > 1$ *найдется такая постоянная* $M_1 = M_1(\gamma_1,\gamma_2) > 0$, *что будет выполнено неравенство*

$$I := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathscr{E}(x-y,t-\tau)|}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}dyd\tau \leqslant \frac{M_1\sqrt{t}}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}}$$
$$\text{при} \quad (x,t) = (x_1,x_2,x_3,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]. \tag{4.22}$$

Доказательство. Применим оценку (4.7) для оценки интеграла I. Тогда получим

$$I \leqslant c_1 I_t I_x, \tag{4.23}$$

где $c_1 > 0$, а интегралы I_t, I_x определяются, как

$$I_t := \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 2\sqrt{t}, \tag{4.24}$$

$$I_x := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dy_1dy_2dy_3}{\left|x_3-y_3\right|^{1/2}[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{1/4}(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}. \tag{4.25}$$

Для оценки интеграла I_x нужно перейти в цилиндрическую систему координат и воспользоваться [1, леммы 1, 2]. В результате получим, что

$$I_x \leqslant \frac{K_1}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}}\frac{K_2}{(1+x_3^2)^{1/4}}, \quad K_1, K_2 > 0, \tag{4.26}$$

причем, постоянные K_1, K_2 не зависят от x.

Из формул (4.23), (4.24), (4.26) и следует доказательство леммы.

Лемма 2. *При* $\gamma_1 > 2$ *и* $\gamma_2 > 1$ *найдутся такие постоянные* $M_1 = M_1(\gamma_1,\gamma_2) > 0$, $M_2 = M_2(\gamma_1,\gamma_2) > 0$, *что будут выполнены неравенства*

$$I_1 := \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathscr{E}_1(x-y,t-\tau)|}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}dyd\tau \leqslant \frac{M_1 t}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}} \quad \text{при} \quad (x,t) = (x_1,x_2,x_3,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T], \tag{4.27}$$

$$I_2 := \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\dfrac{\partial\mathscr{E}_1(x-y,t-\tau)}{\partial t}\right|}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}dyd\tau \leqslant \frac{M_2(t+t^{1/2})}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}} \quad \text{при} \quad (x,t) = (x_1,x_2,x_3,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]. \tag{4.28}$$

Доказательство. Для доказательства этой леммы достаточно воспользоваться оценками (4.19), (4.21).

5. СВОЙСТВА ОБЪЕМНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим объемный потенциал

$$U_0[\rho](x,t) := \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau, \tag{5.1}$$

где

$$K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t) := \frac{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}\mathscr{E}(x-y,t), \tag{5.2}$$

а фундаментальное решение $\mathscr{E}(x,t)$ определяется формулой (4.5).

Лемма 3. *При* $\gamma_1 > 2$ *и* $\gamma_2 > 1$ *оператор*

$$U_0 : \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\otimes[0,T]) \to \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\otimes[0,T]), \tag{5.3}$$

причем справедливо предельное свойство

$$\lim_{t\to+0}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}|U_0(x,t)| = 0. \tag{5.4}$$

Доказательство. Шаг 1. Сначала нужно доказать, что $U_0 : \mathbb{C}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T]) \to \mathbb{C}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$.

Пусть $(x^1,t^1),(x^2,t^2)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]$. Пусть также для удобства $t^2 > t^1$. Оценим разностное отношение

$$\begin{aligned}\left|U_0(x^2,t^2) - U_0(x^1,t^1)\right| = \Bigg|\int_0^{t^2}\int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^2-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau - \\ - \int_0^{t^1}\int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1,y,t^1-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau\Bigg| \leqslant I_1 + I_2,\end{aligned} \tag{5.5}$$

где

$$I_1 := \int_{t^1}^{t^2}\int_{\mathbb{R}^3} \left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^2-\tau)\right||\rho(y,\tau)|dyd\tau, \tag{5.6}$$

$$I_2 := \int_0^{t^1}\int_{\mathbb{R}^3} \left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^2-\tau) - K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1,y,t^1-\tau)\right||\rho(y,\tau)|dyd\tau. \tag{5.7}$$

Введем следующие обозначения: $x^1 := (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, $x^2 := (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, $x_0^1 := (x_1^1, x_2^1)$, $x_0^2 := (x_1^2, x_2^2)$, $x_0^{1,2}$ — середина отрезка, соединяющего точки $x_0^1, x_0^2 \in \mathbb{R}^2$, $\Delta K := K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau) - K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)$.

Обозначим открытый шар с центром в точке x в $\mathbb{R}^2$ следующим образом:

$$O(x,r) := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < r^2,\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}. \tag{5.8}$$

Далее выберем числа $R, \varepsilon > 0$: $R > d(x_0^1, x_0^2)/2 + \varepsilon$, $\varepsilon < d(x_0^1, x_0^2)/2$, где $d(x_0^1, x_0^2)$ — это расстояние между точками $x_0^1, x_0^2 \in \mathbb{R}^2$. Также нам потребуется множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Omega := O(x_0^{1,2}, R) \setminus \left(O(x_0^1, \varepsilon) \cup O(x_0^2, \varepsilon)\right). \tag{5.9}$$

С учетом всех перечисленных выше обозначений и с учетом выбранных R, ε для интеграла I_2 справедлива оценка

$$I_2 \leqslant I_{21} + I_{22} + I_{23}, \tag{5.10}$$

где

$$I_{21} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^1} dy_3 \int_{O(x_0^1,\varepsilon)\cup O(x_0^2,\varepsilon)} |\Delta K| |\rho(y,\tau)| dy_1 dy_2, \tag{5.11}$$

$$I_{22} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^1} dy_3 \int_{\Omega} |\Delta K| |\rho(y,\tau)| dy_1 dy_2, \tag{5.12}$$

$$I_{23} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^1} dy_3 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus O(x_0^{1,2},R)} |\Delta K| |\rho(y,\tau)| dy_1 dy_2. \tag{5.13}$$

Интеграл I_{22} можно представить следующим образом:

$$I_{22} = I_{221} + I_{222}, \tag{5.14}$$

где

$$I_{221} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{-R_3}^{R_3} dy_3 \int_{\Omega} |\Delta K| |\rho(y,\tau)| dy_1 dy_2, \tag{5.15}$$

$$I_{222} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-R_3, R_3]} dy_3 \int_{\Omega} |\Delta K| |\rho(y,\tau)| dy_1 dy_2, \quad R_3 > 0. \tag{5.16}$$

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. В силу оценки (4.22) ясно, что найдутся достаточно малое $\varepsilon > 0$ и достаточно большие $R > 0$, $R_3 > 0$, что будут выполнены следующие неравенства:

$$I_{21} < \frac{\delta}{4}, \quad I_{23} < \frac{\delta}{4}, \quad I_{222} < \frac{\delta}{8}. \tag{5.17}$$

Для фиксированных выше ε, R, R_3 найдется достаточное малое $\eta > 0$ такое, что если выполнено неравенство

$$|x^2 - x^1|^2 + |t^2 - t^1|^2 < \eta^2, \tag{5.18}$$

то справедливы и неравенства

$$I_1 < \frac{\delta}{4}, \quad I_{221} < \frac{\delta}{8}, \tag{5.19}$$

при оценке интеграла I_{221} мы воспользовались непрерывностью подынтегральной функции на множестве $\Omega \times [-R_3, R_3]$.

В результате мы получили, что для любого $\delta > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что при выполнении неравенства (5.18) имеет место неравенство

$$\left|U_0(x^2,t^2) - U_0(x^1,t^1)\right| < \delta, \tag{5.20}$$

которое и означает, что $U_0(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Шаг 2. Теперь установим, что $U_0 : \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \to \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Пусть $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Тогда для $U_0[\rho](x,t)$ справедлива оценка

$$\left|U_0[\rho](x,t)\right| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left|\rho(x,t)\right| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)\right| dy d\tau \leqslant M_1\sqrt{t} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left|\rho(x,t)\right|, \quad M_1 > 0, \tag{5.21}$$

для получения которой мы воспользовались оценкой (4.22). Из оценки (5.21) сразу же вытекает предельное свойство (5.4). Также из оценки (5.21) следует, что

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left|U_0[\rho](x,t)\right| \leqslant M_1\sqrt{T} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left|\rho(x,t)\right| < +\infty. \tag{5.22}$$

Из оценки (5.22) и следует, что U_0: $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \to \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Лемма 3 доказана.

Теперь рассмотрим другой объемный потенциал:

$$V_0[\rho](x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau) dy d\tau, \tag{5.23}$$

где

$$G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t) := \frac{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}} \mathscr{E}_1(x-y,t), \tag{5.24}$$

а фундаментальное решение $\mathscr{E}_1(x,t)$ определяется формулой (4.16).

Лемма 4. *При* $\gamma_1 > 2$ *и* $\gamma_2 > 1$ *оператор*

$$V_0 : \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \to \mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]), \tag{5.25}$$

причем справедливы предельные свойства

$$\lim_{t\to+0} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left|V_0(x,t)\right| = 0, \tag{5.26}$$

$$\lim_{t\to+0} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial V_0(x,t)}{\partial t}\right| = 0. \tag{5.27}$$

Доказательство. Шаг 1. Докажем сначала, что V_0: $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \to \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Пусть $(x^1,t^1),(x^2,t^2) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]$. Пусть также для удобства $t^2 > t^1$.

Оценим разностное отношение

$$\begin{gathered}\left|V_0(x^2,t^2) - V_0(x^1,t^1)\right| = \left|\int_0^{t^2}\int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^2-\tau)\rho(y,\tau) dy d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{t^1}\int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1,y,t^1-\tau)\rho(y,\tau) dy d\tau\right| \leqslant I_1 + I_2,\end{gathered} \tag{5.28}$$

где

$$I_1 := \int_{t^1}^{t^2}\int_{\mathbb{R}^3} \left|G_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^2-\tau)\right|\left|\rho(y,\tau)\right| dy d\tau, \tag{5.29}$$

$$I_2 := \int_0^{t^1}\int_{\mathbb{R}^3} \left|G_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau) - G_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)\right| |\rho(y, \tau)| dy d\tau. \tag{5.30}$$

Введем следующие обозначения: $x^1 := (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, $x^2 := (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, $x_3^{1,2}$ – середина отрезка, соединяющего точки $x_3^1, x_3^2 \in \mathbb{R}^1$, $\Delta G := G_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau) - G_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)$. Далее выберем числа $R, \varepsilon > 0$: $R > d(x_3^1, x_3^2)/2 + \varepsilon$, $\varepsilon < d(x_3^1, x_3^2)/2$, где $d(x_3^1, x_3^2)$ – это расстояние между точками $x_3^1, x_3^2 \in \mathbb{R}^1$. Также нам потребуются два множества $U_\varepsilon, U_R \subset \mathbb{R}^1$:

$$U_\varepsilon := [x_3^1 - \varepsilon, x_3^1 + \varepsilon] \cup [x_3^2 - \varepsilon, x_3^2 + \varepsilon], \tag{5.31}$$

$$U_R := [x_3^{1,2} - R, x_3^{1,2} + R]. \tag{5.32}$$

С учетом всех перечисленных выше обозначений и с учетом выбранных R, ε для интеграла I_2 следует оценка

$$I_2 \leqslant I_{21} + I_{22} + I_{23}, \tag{5.33}$$

где

$$I_{21} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{U_\varepsilon} dy_3 \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta G| |\rho(y, \tau)| dy_1 dy_2, \tag{5.34}$$

$$I_{22} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta G| |\rho(y, \tau)| dy_1 dy_2, \tag{5.35}$$

$$I_{23} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{\mathbb{R}^1 \setminus U_R} dy_3 \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta G| |\rho(y, \tau)| dy_1 dy_2. \tag{5.36}$$

Представим интеграл I_{22} следующим образом:

$$I_{22} = I_{221} + I_{222}, \tag{5.37}$$

где

$$I_{221} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 \int_{O(0, R_{12})} |\Delta G| |\rho(y, \tau)| dy_1 dy_2, \tag{5.38}$$

$$I_{222} := \int_0^{t^1} d\tau \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus O(0, R_{12})} |\Delta G| |\rho(y, \tau)| dy_1 dy_2, \quad R_{12} > 0. \tag{5.39}$$

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Тогда в силу оценки (4.27) найдутся достаточно малое $\varepsilon > 0$ и достаточно большие $R > 0$, $R_{12} > 0$, что будут выполнены неравенства

$$I_{21} < \frac{\delta}{4}, \quad I_{23} < \frac{\delta}{4}, \quad I_{222} < \frac{\delta}{8}. \tag{5.40}$$

Для фиксированных выше ε, R, R_{12} найдется достаточное малое $\eta > 0$ такое, что если выполнено неравенство

$$\left|x^2 - x^1\right|^2 + \left|t^2 - t^1\right|^2 < \eta^2, \tag{5.41}$$

то справедливы и неравенства

$$I_1 < \frac{\delta}{4}, \quad I_{221} < \frac{\delta}{8}, \tag{5.42}$$

где при оценке интеграла I_{221} была использована непрерывность подынтегральной функции на соответствующем множестве.

В результате мы получаем, что для любого $\delta > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что при выполнении неравенства (5.41) имеет место неравенство

$$\left|V_0(x^2,t^2) - V_0(x^1,t^1)\right| < \delta, \tag{5.43}$$

которое и означает, что $V_0(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Шаг 2. Теперь установим, что $V_0 : \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \to \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Пусть $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Тогда для $V_0[\rho](x,t)$ справедлива оценка

$$\left|V_0[\rho](x,t)\right| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left|\rho(x,t)\right| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left|G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)\right| dy d\tau \leqslant M_1 t \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left|\rho(x,t)\right|, \quad M_1 > 0, \tag{5.44}$$

для получения которой мы воспользовались оценкой (4.27). Из оценки (5.44) сразу же вытекает предельное свойство (5.26). Также из оценки (5.44) следует, что

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left|V_0[\rho](x,t)\right| \leqslant M_1 T \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left|\rho(x,t)\right| < +\infty. \tag{5.45}$$

Из оценки (5.45) следует, что $V_0 \colon \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \to \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Шаг 3. Докажем теперь, что если $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, то $V_0(x,t) \in C^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Пусть $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T], x = (x^1,x^2,x^3)$. Будем считать, что $\Delta t > 0$, тогда мы вычислим правую производную. Случай же $\Delta t < 0$ рассматривается аналогичным образом, отличие будет состоять лишь в том, что там не возникнет выражения типа I_1 (см. формулу (5.47)):

$$\left|\frac{V_0(x,t+\Delta t) - V_0(x,t)}{\Delta t} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t} \rho(y,\tau) dy d\tau\right| \leqslant I_1 + I_2, \tag{5.46}$$

где

$$I_1 := \left|\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau+\Delta t)\rho(y,\tau) dy d\tau\right|, \tag{5.47}$$

$$I_2 := \left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau+\Delta t) - G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)}{\Delta t} - \frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t}\right) \rho(y,\tau) dy d\tau\right|. \tag{5.48}$$

Поскольку $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, то существует константа $c_0 > 0$: $c_0 = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left|\rho(x,t)\right| < +\infty$.

Введем удобные для дальнейшего обозначения: $U_\varepsilon := [x^3 - \varepsilon, x^3 + \varepsilon]$, $U_R := [x^3 - R, x^3 + R]$, $0 < \varepsilon < R$. Учтем это и оценим сначала интеграл I_1:

$$I_1 \leqslant \frac{c_0}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_{\mathbb{R}^3} \left|G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,\Delta t - s)\right| dy ds = I_{11} + I_{12} + I_{13}, \tag{5.49}$$

где

$$I_{11} := \frac{c_0}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} ds \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{U_\varepsilon} dy_3 \left|G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,\Delta t - s)\right|, \tag{5.50}$$

$$I_{12} := \frac{c_0}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} ds \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{U_R \setminus U_\varepsilon} dy_3 \left|G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,\Delta t - s)\right|, \tag{5.51}$$

$$I_{13} := \frac{c_0}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} ds \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{\mathbb{R}^1 \setminus U_R} dy_3 \left|G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,\Delta t - s)\right|. \tag{5.52}$$

Интеграл I_{12} представим следующим образом:

$$I_{12} = I_{121} + I_{122}, \tag{5.53}$$

где

$$I_{121} := \frac{c_0}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} ds \int_{O(0,R_{12})} dy_1 dy_2 \int_{U_R\setminus U_\varepsilon} dy_3 \left|G_{\gamma_1,\gamma_2}(x, y, \Delta t - s)\right|, \tag{5.54}$$

$$I_{122} := \frac{c_0}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} ds \int_{\mathbb{R}^2\setminus O(0,R_{12})} dy_1 dy_2 \int_{U_R\setminus U_\varepsilon} dy_3 \left|G_{\gamma_1,\gamma_2}(x, y, \Delta t - s)\right|, \tag{5.55}$$

где $O(0, R_{12})$ — это открытый шар радиуса R_{12} с центром в нуле в $\mathbb{R}^2$.

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Из формул (5.24), (4.27) следует, что найдутся достаточно малое $\varepsilon > 0$ и достаточно большие $R > 0$, $R_{12} > 0$, что будут выполнены неравенства

$$I_{11} < \frac{\delta}{8}, \quad I_{13} < \frac{\delta}{8}, \quad I_{122} < \frac{\delta}{8}. \tag{5.56}$$

Для фиксированных выше ε, R, R_{12} найдется достаточно малое $\eta > 0$ такое, что если будет выполнено неравенство $\Delta t < \eta$, то будет справедливо и неравенство $I_{121} < \delta/8$. Для доказательства этой оценки для интеграла I_{121} достаточно воспользоваться формулой среднего значения, а затем учесть непрерывность подынтегральной функции в точке $t = 0$. В результате мы приходим к тому, что

$$I_1 < \frac{\delta}{2}. \tag{5.57}$$

Интеграл I_2 можно оценить следующим образом:

$$I_2 \leqslant c_0\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x, y, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x, y, t-\tau)}{\partial t}\right| dy d\tau, \quad \text{где} \quad t^* \in [t-\tau, t-\tau+\Delta t]. \tag{5.58}$$

Представим интеграл I_2 в виде

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23}, \tag{5.59}$$

где

$$I_{21} := c_0\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{U_\varepsilon} dy_3 \left|\frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x, y, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x, y, t-\tau)}{\partial t}\right|, \tag{5.60}$$

$$I_{22} := c_0\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{U_R\setminus U_\varepsilon} dy_3 \left|\frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x, y, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x, y, t-\tau)}{\partial t}\right|, \tag{5.61}$$

$$I_{23} := c_0\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 \int_{\mathbb{R}^1\setminus U_R} dy_3 \left|\frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x, y, t^*)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x, y, t-\tau)}{\partial t}\right|. \tag{5.62}$$

Далее достаточно воспользоваться оценкой (4.28) и повторить рассуждения шага 1 из доказательства данной леммы. Мы придем к тому, что

$$I_2 < \frac{\delta}{2}, \tag{5.63}$$

как только $\Delta t < \eta$.

В результате получаем, что для любого $\delta > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что как только $|\Delta t| < \eta$, то выполнено неравенство

$$\left|\frac{V_0(x,t+\Delta t) - V_0(x,t)}{\Delta t} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t} \rho(y,\tau) dy d\tau\right| < \delta, \tag{5.64}$$

которое и означает, что $V_0(x,t) \in \mathbb{C}^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Шаг 4. Докажем, наконец, ограниченность производной $\partial V_0(x,t)/\partial t$. Пусть

$$c_0 := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} |\rho(x,t)| < +\infty.$$

Воспользуемся оценкой (4.28)

$$\left|\frac{\partial V_0(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t} \rho(y,\tau)\right| dy d\tau \leqslant c_0 M_2(t + t^{1/2}) \leqslant c_1(T + T^{1/2}),$$
$$c_1 > 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]. \tag{5.65}$$

Выполнение предельного свойства (5.27) сразу же следует из оценки (5.65). Также из оценки (5.65) следует, что

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left|\frac{\partial V_0(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant c_1(T + T^{1/2}) < +\infty, \tag{5.66}$$

поэтому $V_0(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, как только $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Лемма 4 доказана.

6. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ДВУХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим первое нелинейное интегральное уравнение:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\left(|u|^q(y,\tau) + f(y,\tau)\right) dy d\tau, \tag{6.1}$$

где функция $\mathscr{E}(x,t)$ определяется формулой (4.5), а функция $f(x,t)$ будет определена далее.

Сделаем в интегральном уравнении (6.1) замену:

$$v(x,t) := (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4} u(x,t), \tag{6.2}$$

$$f_0(x,t) := (1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2} f(x,t). \tag{6.3}$$

Тогда мы получим следующее интегральное уравнение:

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K_{q/2,q/2}(x,y,t-\tau)|v|^q(y,\tau) dy d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau) f_0(y,\tau) dy d\tau, \tag{6.4}$$

где ядро интегрального уравнения определяется равенством

$$K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau) = \frac{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + y_3^2)^{\gamma_2/2}} \mathscr{E}(x-y,t-\tau). \tag{6.5}$$

Перепишем интегральное уравнение (6.4) в виде

$$v(x,t) = U_{q/2,q/2}[|v|^q](x,t) + U_{\gamma_1,\gamma_2}[f_0](x,t), \tag{6.6}$$

где оператор U_{γ_1,γ_2} определяется равенством

$$U_{\gamma_1,\gamma_2}[\rho](x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau) dy d\tau. \tag{6.7}$$

Свойства объемного потенциала U_{γ_1,γ_2} изучались в разд. 5. Далее, воспользовавшись техникой, аналогичной технике, примененной при доказательстве теоремы 4 работы [1], можно установить следующий результат.

Теорема 1. *Если* $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, *то для всех* $f_0(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ *найдется такое максимальное* $T_0 > 0$, *что для каждого* $T \in (0,T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (6.4) *в банаховом пространстве* $v(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\lim_{T\uparrow T_0} \|v\|_T = +\infty, \quad \|v\|_T = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} |v(x,t)|. \tag{6.8}$$

Непосредственным следствием данной теоремы является теорема 2.

Теорема 2. *Если* $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, *то для всех* $f(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ *найдется такое максимальное* $T_0 > 0$, *что для каждого* $T \in (0,T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (6.1) *в банаховом пространстве* $u(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\lim_{T\uparrow T_0} \|u\|_T = +\infty, \quad \|u\|_T = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4} |u(x,t)|. \tag{6.9}$$

Рассмотрим второе нелинейное интегральное уравнение:

$$u(x,t) = F(x,t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}_1(x - y, t - \tau)\Big(|u|^q(y,\tau) - \rho(y,\tau)\Big) dy d\tau, \tag{6.10}$$

где функция $\mathscr{E}_1(x,t)$ определяется формулой (4.16), а функции $F(x,t), \rho(x,t)$ будут определены далее. Сделаем в интегральном уравнении (6.10) замену:

$$v(x,t) := (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4} u(x,t), \tag{6.11}$$

$$\rho_0(x,t) := (1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2} \rho(x,t). \tag{6.12}$$

Тогда мы придем к следующему интегральному уравнению:

$$v(x,t) = F_0(x,t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{q/2,q/2}(x,y,t-\tau)|v|^q(y,\tau) dy d\tau - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)\rho_0(y,\tau) dy d\tau, \tag{6.13}$$

где $F_0(x,t) = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4} F(x,t)$, а ядро интегрального уравнения определено равенством

$$G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau) = \frac{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}}{(1 + y_1^2 + y_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + y_3^2)^{\gamma_2/2}} \mathscr{E}_1(x - y, t - \tau). \tag{6.14}$$

Перепишем интегральное уравнение (6.13) в операторном виде

$$v(x,t) = F_0(x,t) + V_{q/2,q/2}[|v|^q](x,t) - V_{\gamma_1,\gamma_2}[\rho_0](x,t), \tag{6.15}$$

где оператор V_{γ_1,γ_2} определяется равенством

$$V_{\gamma_1,\gamma_2}[\rho](x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau) dy d\tau. \tag{6.16}$$

Свойства объемного потенциала V_{γ_1,γ_2} изучались в разд. 5. Далее, воспользовавшись техникой, примененной при доказательстве теоремы 4 работы [1], можно установить следующий результат.

Теорема 3. *Если* $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, *то для всяких* $\rho_0(x,t), F_0(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ *найдется такое максимальное* $T_0 > 0$, *что для каждого* $T \in (0,T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (6.13) *в банаховом пространстве* $v(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|v\|_T = +\infty, \quad \|v\|_T = \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]} |v(x,t)|. \tag{6.17}$$

Непосредственным следствием теоремы 3 является теорема 4.

Теорема 4. *Если* $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, *то для всех* $F(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ *найдется такое максимальное* $T_0 > 0$, *что для каждого* $T \in (0,T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (6.10) *в банаховом пространстве* $u(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|u\|_T = +\infty, \quad \|u\|_T = \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]} (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4} |u(x,t)|. \tag{6.18}$$

7. СЛАБЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУХ ЗАДАЧ КОШИ

Рассмотрим первую задачу Коши:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) = |u|^q + f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T], \tag{7.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{7.2}$$

где оператор $\mathfrak{M}_{x,t}$ определяется равенством

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u(x,t) + \Delta u(x,t). \tag{7.3}$$

Дадим определение слабого локального во времени решения задачи Коши (7.1), (7.2), для которого далее будем изучать явление разрушения, а также дадим определение слабого обобщенного локального во времени решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями, для которого будем далее исследовать разрешимость.

Определение 1. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) называется функция $u(x,t) \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, которая удовлетворяет интегральному равенству

$$\begin{gathered}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\phi(x,t) + \Delta\phi(x,t)\right]dxdt + \int_{\mathbb{R}^3}\left[u_0(x)\frac{\partial \phi_{x_3x_3}}{\partial t}(x,0) - u_1(x)\phi_{x_3x_3}(x,0)\right]dx = \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^q \phi(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f(x,t)\phi(x,t)dxdt\end{gathered} \tag{7.4}$$

для произвольной функции $\phi(x,t) \in \mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Кроме того, $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $f(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Определение 2. Слабым обобщенным локальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) с нулевыми начальными условиями называется функция $u(x,t) \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, которая удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\phi(x,t) + \Delta\phi(x,t)\right]dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^q \phi(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f(x,t)\phi(x,t)dxdt \tag{7.5}$$

для произвольной функции $\phi(x,t) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (0,T))$. При этом $f(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Теорема 5. *Пусть* $u(x,t)$ *— это решение нелинейного интегрального уравнения* (6.1) *в банаховом пространстве* $\mathbb{C}_b((1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4};\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$, *причем* $f(x,t)\in\mathbb{C}_b((1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2};\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$, *где* $q>4$, $\gamma_1>2$, $\gamma_2>1$. *Тогда функция* $u(x,t)$ *является слабым обобщенным локальным во времени решением задачи Коши* (7.1), (7.2) *с нулевыми начальными условиями в смысле определения* 2.

Доказательство. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – это скобки двойственности между $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3\otimes(0,T))$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3\otimes(0,T))$. Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (6.1). Тогда в смысле пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3\otimes(0,T))$ справедливо равенство

$$u(x,t)=\mathscr{E}(x,t)*\Big[|u(x,t)|^q+f(x,t)\Big]. \tag{7.6}$$

Тогда, с одной стороны,

$$\begin{gathered}\Big\langle\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t),\phi(x,t)\Big\rangle=\Big\langle\mathfrak{M}_{x,t}\Big[\mathscr{E}(x,t)*\Big(|u(x,t)|^q+f(x,t)\Big)\Big],\phi(x,t)\Big\rangle=\\ =\Big\langle\mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}(x,t)]*\Big(|u(x,t)|^q+f(x,t)\Big),\phi(x,t)\Big\rangle=\Big\langle\delta(x,t)*\Big(|u(x,t)|^q+f(x,t)\Big),\phi(x,t)\Big\rangle=\\ =\Big\langle|u(x,t)|^q+f(x,t),\phi(x,t)\Big\rangle=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^q\phi(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}f(x,t)\phi(x,t)dxdt.\end{gathered} \tag{7.7}$$

Здесь нами была использована формула дифференцирования свертки обобщенных функций

$$D(f*g)=D(f)*g, \tag{7.8}$$

где D – дифференциальный оператор. Также было учтено, что

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}(x,t)]=\delta(x,t) \tag{7.9}$$

в смысле равенства обобщенных функций в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3\otimes(0,T))$.

С другой стороны,

$$\Big\langle\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t),\phi(x,t)\Big\rangle=\Big\langle u(x,t),\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t)\Big\rangle=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}u(x,t)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\phi(x,t)+\Delta\phi(x,t)\right]dxdt. \tag{7.10}$$

Из равенств (7.7), (7.10) и следует утверждение теоремы.

Теперь получим результат, касающийся разрушения слабых локальных во времени решений задачи Коши (7.1), (7.2).

Теорема 6. *Пусть* $1<q\leqslant 3$ *и* $\{u_0(x),u_1(x)\}\in H_{x_3}$. *Пусть выполнены неравенства*

$$|u_0(x)|\leqslant\frac{A_0}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}},\quad |u_1(x)|\leqslant\frac{A_1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}\quad\text{при}\quad\alpha>1,\quad\beta>1. \tag{7.11}$$

Пусть, кроме того, функция f, *входящая в уравнение* (7.4), *тождественно равна нулю.*

Тогда не существует слабого локального во времени решения задачи Коши (7.1), (7.2) *в смысле определения* 1 *ни для какого* $T>0$.

Доказательство. Пусть функция $u(x,t)$ является слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) в смысле определения 1. Введем следующее обозначение: $L_{x_3}:=\partial^2/\partial x_3^2$. Также введем обозначения для интегралов из равенства (7.4):

$$I_1:=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}u(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}L_{x_3}\phi(x,t)dxdt,\quad I_2:=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}u(x,t)\Delta\phi(x,t)dxdt, \tag{7.12}$$

$$I_3:=\int_{\mathbb{R}^3}u_0(x)\frac{\partial}{\partial t}L_{x_3}\phi(x,0)dx,\quad I_4:=\int_{\mathbb{R}^3}u_1(x)L_{x_3}\phi(x,0)dx, \tag{7.13}$$

$$I := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^q \phi(x,t)\,dx\,dt. \tag{7.14}$$

Тогда равенство (7.4) можно переписать в виде

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = I. \tag{7.15}$$

Выберем пробную функцию $\phi(x,t)$ специальным образом:

$$\phi(x,t) = \phi_1(t)\phi_2(x), \tag{7.16}$$

$$\phi_1(t) := \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda, \quad \phi_2(x) := \phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad \lambda > 2q', \quad q' = \frac{q}{q-1}, \quad q > 1, \tag{7.17}$$

$$\phi_0(s) := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad s \geqslant 2, \end{cases} \qquad \phi_0(s) \in \mathbb{C}_0^\infty[0,+\infty), \tag{7.18}$$

причем дополнительно потребуем, чтобы функция $\phi_0(s)$ была монотонно невозрастающей.

Оценим сначала интегралы, связанные с начальными условиями:

$$\begin{gathered} |I_3| = \left|\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) L_{x_3} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0)\,dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) L_{x_3} \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda \phi_2(x)\right)\Bigg|_{t=0} dx\right| = \\ = \frac{\lambda}{T}\left|\int_{R \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2}R} u_0(x) L_{x_3}\phi_2(x)\,dx\right| = \frac{\lambda}{T} R \left|\int_{1 \leqslant |y| \leqslant \sqrt{2}} u_0(Ry) L_{y_3} \phi_0(|y|^2)\,dy\right| \leqslant \frac{A_1}{R^{\alpha-1}} \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty, \end{gathered} \tag{7.19}$$

$$\begin{gathered} |I_4| = \left|\int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) L_{x_3} \phi(x,0)\,dx\right| = \left|\int_{R \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2}R} u_1(x) L_{x_3} \phi_2(x)\,dx\right| = R\left|\int_{1 \leqslant |y| \leqslant \sqrt{2}} u_1(Ry) L_{y_3} \phi_0(|y|^2)\,dy\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{A_2}{R^{\beta-1}} \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty. \end{gathered} \tag{7.20}$$

Далее оценим интегралы I_1, I_2, связанные с дифференциальным оператором:

$$\begin{gathered} |I_1| = \left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_{x_3}\phi(x,t)\,dx\,dt\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2} \int_0^T \int_{R \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2}R} \left|u(x,t)\,(\phi(x,t))^{1/q}\right| \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-2} \frac{|L_{x_3}\phi_2(x)|}{(\phi(x,t))^{1/q}}\,dx\,dt \leqslant c_1(R) I_R^{1/q}, \end{gathered} \tag{7.21}$$

где

$$I_R := \int_0^T \int_{R \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2}R} \phi(x,t)|u(x,t)|^q\,dx\,dt, \tag{7.22}$$

$$\begin{gathered} c_1(R) := \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\left[\int_0^T \int_{R \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2}R} \left(\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-2} \frac{|L_{x_3}\phi_2(x)|}{(\phi(x,t))^{1/q}}\right)^{q'} dx\,dt\right]^{1/q'} = \\ = \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\left[\int_0^T \int_{R \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2}R} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-2q'} \frac{|L_{x_3}\phi_2(x)|^{q'}}{(\phi_2(x))^{q'/q}}\,dx\,dt\right]^{1/q'} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2}\left(\frac{T}{\lambda - 2q' + 1}\right)^{1/q'} c_0 R^{(3-2q')/q'}, \end{gathered} \tag{7.23}$$

где

$$c_0 := \left(\int_{1 \leqslant |y| \leqslant \sqrt{2}} \frac{|L_{y_3}\phi_0(|y|^2)|^{q'}}{(\phi_0(|y|^2))^{q'/q}}\,dy\right)^{1/q'}, \tag{7.24}$$

$$|I_2| = \left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\Delta\phi(x,t)dxdt\right| \leqslant \int_0^T\int_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}\left|u(x,t)\left(\phi(x,t)\right)^{1/q}\right|\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}\frac{|\Delta\phi_2(x)|}{\left(\phi(x,t)\right)^{1/q}}dxdt \leqslant c_2(R)I_R^{1/q}, \quad (7.25)$$

где интеграл I_R определяется равенством (7.22):

$$c_2(R) := \left[\int_0^T\int_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}\frac{|\Delta\phi_2(x)|}{\left(\phi(x,t)\right)^{1/q}}\right)^{q'}dxdt\right]^{1/q'} = \left(\frac{T}{\lambda+1}\right)^{1/q'}c_1R^{(3-2q')/q'}, \quad (7.26)$$

где

$$c_1 := \left(\int_{1\leqslant|y|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|\Delta\phi_0(|y|^2)\right|^{q'}}{\left(\phi_0(|y|^2)\right)^{q'/q}}dy\right)^{1/q'}. \quad (7.27)$$

В [10] доказано существование таких монотонно невозрастающих функций $\phi_0(s)$, для которых будут конечны емкости $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$.

Сначала мы рассмотрим случай $1 < q < 3$. Тогда $3 - 2q' < 0$.

Заметим, что имеет место следующая оценка:

$$I_R \leqslant I := \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)|u(x,t)|^q dxdt. \quad (7.28)$$

Из (7.15) с учетом оценок (7.21), (7.25) вытекает оценка

$$I \leqslant c_1(R)I_R^{1/q} + c_2(R)I_R^{1/q} + |I_3| + |I_4|. \quad (7.29)$$

Воспользуемся трехпараметрическим неравенством Юнга

$$ab \leqslant \varepsilon a^q + \frac{b^{q'}}{q'(q\varepsilon)^{q'/q}}, \quad a,b \geqslant 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (7.30)$$

Из (7.28), (7.29) и (7.30) получаем неравенство

$$(1-2\varepsilon)I \leqslant \frac{1}{q'(q\varepsilon)^{q'/q}}\left(c_1^{q'}(R) + c_2^{q'}(R)\right) + |I_3| + |I_4|. \quad (7.31)$$

Положим в неравенстве (7.31) $\varepsilon = 1/4$. Тогда получим следующее неравенство:

$$I \leqslant 2\left(\frac{1}{q'}\left(\frac{4}{q}\right)^{q'/q}\left(c_1^{q'}(R) + c_2^{q'}(R)\right) + |I_3| + |I_4|\right) \leqslant k, \quad (7.32)$$

где постоянная $k > 0$ не зависит от R.

Положим $R = N \in \mathbb{N}$. Заметим, что последовательность функций

$$\chi_N(x,t) := \phi(x,t)|u(x,t)|^q = \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}\phi_0\left(\frac{|x|^2}{N^2}\right)|u(x,t)|^q \quad (7.33)$$

удовлетворяет неравенству

$$\chi_N(x,t) \leqslant \chi_{N+1}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]. \quad (7.34)$$

Воспользуемся теоремой Беппо Леви и получим, что, с одной стороны,

$$I = I(N) := \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\chi_N(x,t)dxdt \to \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}|u(x,t)|^q dxdt \quad \text{при} \quad N \to +\infty. \quad (7.35)$$

С другой стороны, из неравенства (7.32), а также оценок (7.19), (7.20), (7.23), (7.26) следует, что

$$I = I(N) \to +0 \quad \text{при} \quad N \to +\infty. \quad (7.36)$$

Таким образом, при условии $1 < q < 3$ получаем, что

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left(1-\frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x,t)|^q\,dxdt = 0 \Leftrightarrow u(x,t) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]. \tag{7.37}$$

Критический случай $q = 3$ нужно рассмотреть отдельно. Если $q = 3$, то $3 - 2q' = 0$, поэтому емкости $c_1(R)$, $c_2(R)$ уже не стремятся к нулю при $R \to +\infty$ (но являются ограниченными). Воспользуемся неравенством (7.32), которое справедливо и для случая $q = 3$. Тогда, снова применив теорему Беппо Леви (снова положив $R = N \in \mathbb{N}$), мы придем к тому, что

$$I = I(N) \to \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left(1-\frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x,t)|^q\,dxdt < +\infty \quad \text{при} \quad N \to +\infty. \tag{7.38}$$

А из (7.38) сразу же получаем, что

$$0 \leqslant I_R = \int_0^T\int_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}\phi(x,t)|u(x,t)|^q\,dxdt \leqslant \int_0^T\int_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R}\left(1-\frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x,t)|^q\,dxdt \to +0 \quad \text{при} \quad R\to+\infty. \tag{7.39}$$

Но тогда из оценок (7.19), (7.20), (7.29) (7.39) следует, что

$$I \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty. \tag{7.40}$$

Из (7.38), (7.40) получаем, что

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left(1-\frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x,t)|^q\,dxdt = 0 \Leftrightarrow u(x,t) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]. \tag{7.41}$$

В результате мы приходим к тому, что при $1 < q \leqslant 3$ единственным слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.1), (7.2) является функция $u(x,t)$, равная нулю почти всюду, поэтому из (7.4) получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left[u_0(x)L_{x_3}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) - u_1(x)L_{x_3}\phi(x,0)\right]dx = 0 \tag{7.42}$$

для произвольной функции $\phi(x,t)\in\mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$.

Пусть

$$\phi(x,t) = \psi_0(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^\lambda, \quad \lambda > 1, \quad \psi_0(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{7.43}$$

Тогда из (7.42) и (7.43) приходим к следующему равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{\lambda}{T}u_0(x) + u_1(x)\right]L_{x_3}\psi_0(x)dx = 0 \tag{7.44}$$

для всех $\psi_0(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и любого $T > 0$. Так как пара функций $\{u_0(x), u_1(x)\}$ принадлежит классу функций H_{x_3}, то найдется такой шар $O(x_0,R)$ радиуса $R > 0$, что $u_0(x), u_1(x)\in H^2(O(x_0,R))$ и

$$\left(L_{x_3}u_0(x)\right)^2 + \left(L_{x_3}u_1(x)\right)^2 > 0 \quad \text{для почти всех} \quad x\in O(x_0,R). \tag{7.45}$$

Выберем $\psi_0(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(O(x_0,R))$. Тогда из (7.44) получим равенство

$$\int_{O(x_0,R)}\left[\frac{\lambda}{T}L_{x_3}u_0(x) + L_{x_3}u_1(x)\right]\psi_0(x)dx = 0 \tag{7.46}$$

для каждой $\psi_0(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(O(x_0,R))$. Но тогда, согласно основной лемме вариационного исчисления, мы приходим к тому, что

$$\frac{\lambda}{T}L_{x_3}u_0(x) + L_{x_3}u_1(x) = 0 \tag{7.47}$$

для почти всех $x \in O(x_0, R)$. Продифференцируем равенство (7.47) по параметру λ. Тогда получаем, что

$$L_{x_3} u_0(x) = 0, \quad \text{а значит, и} \quad L_{x_3} u_1(x) = 0, \tag{7.48}$$

что противоречит условию (7.45). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вторую задачу Коши:

$$\mathfrak{L}_{x,t}[u](x,t) = |u|^q, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T], \tag{7.49}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{7.50}$$

где оператор $\mathfrak{L}_{x,t}$ определяется равенством

$$\mathfrak{L}_{x,t}[u](x,t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_\perp u(x,t) + \Delta u(x,t). \tag{7.51}$$

Определение 3. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (7.49), (7.50) называется функция $u(x,t) \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, которая удовлетворяет равенству

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_\perp \phi(x,t) + \Delta \phi(x,t) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^3} \left[u_0(x) \Delta_\perp \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) - u_1(x) \Delta_\perp \phi(x,0) \right] dx = \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u|^q \phi(x,t) dx dt \tag{7.52}$$

для всех $\phi(x,t) \in \mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Кроме того, $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Определение 4. Слабым обобщенным локальным во времени решением задачи Коши (7.49), (7.50) называется функция $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, которая удовлетворяет в смысле пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (0,T))$ равенству

$$\left\langle \mathfrak{L}_{x,t}[u](x,t), \phi(x,t) \right\rangle = \left\langle |u|^q, \phi(x,t) \right\rangle \tag{7.53}$$

для произвольной функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (0,T))$, а также удовлетворяет начальным условиям (7.50) поточечно, причем $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 7. *Пусть функция $u(x,t)$ — это решение нелинейного интегрального уравнения* (6.10) *в банаховом пространстве $\mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Пусть показатель $q > 4$. В уравнении* (6.10) *в качестве функций $F(x,t)$, $\rho(x,t)$ берутся следующие функции*:

$$F(x,t) := u_0(x)\chi(t) + u_1(x)\eta(t), \tag{7.54}$$

$$\rho(x,t) := \chi(t)\Delta u_0(x) + \chi''(t)\Delta_\perp u_0(x) + \eta(t)\Delta u_1(x) + \eta''(t)\Delta_\perp u_1(x), \tag{7.55}$$

$$\chi(t), \eta(t) \in \mathbb{C}^2([0,T]), \quad \chi(0) = 1, \quad \chi'(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 1, \tag{7.56}$$

$$u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]), \tag{7.57}$$

$$\Delta_\perp u_0(x), \Delta u_0(x), \Delta_\perp u_1(x), \Delta u_1(x) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3), \quad \gamma_1 > 2, \quad \gamma_2 > 1. \tag{7.58}$$

Тогда функция $u(x,t)$ является слабым обобщенным локальным во времени решением задачи Коши (7.49), (7.50) *в смысле определения* 4.

Доказательство. Шаг 1. Пусть $u(x,t)$ — это решение интегрального уравнения (6.10). Проверим, что эта функция удовлетворяет начальным условиям (7.50):

$$u(x,0) = f(x,0) = u_0(x)\chi(0) + u_1(x)\eta(0) = u_0(x), \tag{7.59}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,0)+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}_1(x-y,t-\tau)\left(|u|^q(y,\tau)-\rho(y,\tau)\right)dyd\tau\Big|_{t=0}= \\ =u_0(x)\chi'(0)+u_1(x)\eta'(0)=u_1(x).\end{gathered}\tag{7.60}$$

Шаг 2. Проверим выполнение равенства (7.53).

Заметим, что в смысле пространства обобщенных функций $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3\otimes(0,T))$ справедливо равенство

$$u(x,t)=F(x,t)+\mathscr{E}_1(x,t)*\left[|u(x,t)|^q-\rho(x,t)\right].\tag{7.61}$$

Но тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered}\left\langle\mathfrak{L}_{x,t}[u](x,t),\phi(x,t)\right\rangle=\left\langle\mathfrak{L}_{x,t}[F](x,t),\phi(x,t)\right\rangle+\left\langle\mathfrak{L}_{x,t}\left[\mathscr{E}_1(x,t)*(|u(x,t)|^q-\rho(x,t))\right],\phi(x,t)\right\rangle= \\ =\left\langle\chi(t)\Delta u_0(x)+\chi''(t)\Delta_\perp u_0(x)+\eta(t)\Delta u_1(x)+\eta''(t)\Delta_\perp u_1(x),\phi(x,t)\right\rangle+ \\ +\left\langle\mathfrak{L}_{x,t}[\mathscr{E}_1(x,t)]*(|u(x,t)|^q-\rho(x,t)),\phi(x,t)\right\rangle= \\ =\left\langle\rho(x,t),\phi(x,t)\right\rangle+\left\langle(|u(x,t)|^q-\rho(x,t)),\phi(x,t)\right\rangle=\left\langle|u(x,t)|^q,\phi(x,t)\right\rangle,\end{gathered}\tag{7.62}$$

где мы учли, что, во-первых,

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}_{x,t}[F](x,t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp+\Delta\right)(u_0(x)\chi(t)+u_1(x)\eta(t))= \\ =\Delta_\perp u_0(x)\chi''(t)+\Delta u_0(x)\chi(t)+\Delta_\perp u_1(x)\eta''(t)+\Delta u_1(x)\eta(t),\end{gathered}\tag{7.63}$$

причем все производные здесь понимаются в классическом смысле.

Во-вторых, нами была использована формула дифференцирования свертки обобщенных функций

$$D(f*g)=D(f)*g,\tag{7.64}$$

где D – дифференциальный оператор. В-третьих, было учтено, что

$$\mathfrak{L}_{x,t}[\mathscr{E}_1(x,t)]=\delta(x,t).\tag{7.65}$$

И, в-четвертых, – что $f(x,t)*\delta(x,t)=f(x,t)$ для всякой обобщенной функции $f(x,t)$. Теорема доказана.

В следующей теореме сформулирован результат о разрушении слабых локальных во времени решений задачи Коши (7.49), (7.50).

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 6, надо только заменить оператор $L_{x_3}=\partial^2/\partial x_3^2$ на оператор $L_{x_1x_2}:=\Delta_\perp$.

Теорема 8. *Пусть* $1<q\leqslant 3$ *и* $\{u_0(x),u_1(x)\}\in H_{x_1x_2}$. *Пусть выполнены неравенства*

$$|u_0(x)|\leqslant\frac{A_0}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}},\quad |u_1(x)|\leqslant\frac{A_1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}\quad \textit{при}\quad \alpha>1,\quad \beta>1.\tag{7.66}$$

Тогда не существует слабого локального во времени решения задачи Коши (7.49), (7.50) *в смысле определения* 3 *ни для какого* $T>0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корпусов М.О., Шафир Р.С.* О разрушении слабых решений задачи Коши для 3 + 1-мерного уравнения дрейфовых волн в плазме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 1. С. 124–158.
2. *Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations // De Gruyter Series in Nonlin. Anal. Appl. 2011. V. 15. P. 648.
3. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
4. *Загребина С.А.* Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)–радиальным оператором // Матем. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. № 2. С. 39–48.

5. *Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A.* Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. 2016. V. 8. № 4. P. 5–16.
6. *Капитонов Б.В.* Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109(151). № 4(8). С. 607–628.
7. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. С. 344.
8. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998. С. 448.
9. *Плетнер Ю.Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
10. *Похожаев С.И., Митидиери Э.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.
11. *Galakhov E.I.* Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 252. № 1. P. 256–277.
12. *Галахов Е.И., Салиева О.А.* Об отсутствии неотрицательных монотонных решений для некоторых коэрцитивных неравенств в полупространстве // СФМН. 2017. Т. 63. № 4. С. 573–585.
13. *Корпусов М.О.* Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79. № 5. С. 103–162.
14. *Корпусов М.О.* О разрушении решений нелинейных уравнений типа уравнения Хохлова–Заболотской // ТМФ. 2018. Т. 194. № 3. С. 403–417.
15. *Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Panin A.A.* Instantaneous blow-up versus local solvability of solutions to the Cauchy problem for the equation of a semiconductor in a magnetic field // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 17. P. 8070–8099.