

УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.928

СХОДИМОСТЬ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ВТОРОГО ЧЛЕНА  
ЧЕТВЕРТОЙ ИЕРАРХИИ ПЕНЛЕВЕ В ОКРЕСТНОСТИ НУЛЯ<sup>1)</sup>

© 2023 г. В. И. Аношин<sup>1</sup>, А. Д. Бекетова<sup>1</sup>,  
А. В. Парусникова<sup>1,\*</sup>, Е. Д. Прокопенко<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 123458 Москва, Таллинская ул., 34, Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, Россия

\*e-mail: [aparusnikova@hse.ru](mailto:aparusnikova@hse.ru)

Поступила в редакцию 04.08.2022 г.  
Переработанный вариант 04.08.2022 г.  
Принята к публикации 10.09.2022 г.

Рассматривается второй член иерархии четвертого уравнения Пенлеве. Доказана сходимость некоторых степенных асимптотических разложений в окрестности нуля. Найдены новые семейства степенных асимптотических разложений. Вычисления проводятся с использованием пакета компьютерной алгебры. Дана ссылка на код, который может быть использован для вычисления порядка Жевре формального разложения решения дифференциального уравнения второго порядка в пакете символьных вычислений. Библ. 12. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** асимптотические разложения, порядки Жевре, уравнения Пенлеве, символьные вычисления.

DOI: 10.31857/S0044466923010040, EDN: LKQVOT

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Существует ряд способов построения иерархий Пенлеве (см. [1], [2]) – аналогов уравнений Пенлеве более высоких порядков. В данной работе рассматривается второй член четвертой иерархии Пенлеве из [2] – обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, продолжающее цепочку, соответствующую четвертому уравнению Пенлеве. Решения уравнений – членов иерархий уравнений Пенлеве могут, как это имеет место для исходных уравнений Пенлеве, определять новые специальные функции; впрочем, доказательство справедливости этого факта или опровергающие такое утверждение результаты на данный момент авторам неизвестны.

В [3] методами степенной геометрии [4] найдены степенные формальные асимптотические разложения решений второго члена четвертой иерархии Пенлеве. Здесь, применяя теорию из [5], [6], доказываем сходимость полученных в окрестности нуля разложений и отсутствие экспоненциальных добавок (см. [7]). Для поиска экспоненциальных добавок к решениям используется код, написанный в пакете символьных вычислений (код для реализации первых шагов методами степенной геометрии приведен в [3]). Дана ссылка на программу для символьных вычислений порядка Жевре формального разложения решения дифференциального уравнения второго порядка.

## 2. МЕТОДЫ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение порядка  $n$  вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-10003), <https://rscf.ru/project/19-71-10003/>.

где  $F$  – аналитическая функция  $n + 2$  переменных и формально удовлетворяющий ему в окрестности бесконечности степенной ряд

$$\hat{y} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}. \quad (2)$$

Известно, что каждому формальному решению вида (2) уравнения (1) соответствует аналитическое решение  $y$  уравнения (1), асимптотически приближаемое по Жевре рядом (2) в некотором секторе с вершиной в бесконечности, т.е. на множестве  $V = \{x : |x| > R, \text{Arg } x \in (\varphi_1, \varphi_2)\}$  при некотором  $R > 0$ .

Для доказательства сходимости ряда (2) можно использовать асимптотическую теорию Жевре. В случае, когда сходимость таким методом не может быть доказана, осмысленным для определения точности приближения настоящего решения уравнения (1) вновь является применение асимптотической теории Жевре, а также вычисление уточняющих экспоненциальных добавок (экспоненты, в показателях которых записан формальный степенной ряд) к решению.

Кратко опишем алгоритм поиска порядков Жевре и точности приближения по Жевре разложения (см. [5], [6]):

I.1. Вычислить производную Фреше  $L$  левой части уравнения (1) на решении  $\hat{y}$ ;

I.2. Проверить, содержит ли  $L$  оператор  $\frac{d^n}{dx^n}$  ( $n$  – порядок уравнения (1));

I.3. Выразить в  $L$  операторы  $\frac{d^k}{dx^k}$  через операторы  $D^s$ ,  $s = 1, \dots, k$ , где  $D = x \frac{d}{dx}$ , т.е. переписать  $L$  в виде

$$L = \sum_{k=0}^n a_k(x) D^k, \quad \text{где } a_k \in \mathbb{C}[x][[1/x]], \quad a_k(x) = \sum_{j=j_k}^{\infty} a_{j,k} x^{-j}; \quad (3)$$

I.4. Построить многоугольник Ньютона оператора  $L$  (3) как выпуклую оболочку точек  $\{(q_1, q_2) : 0 \leq q_1 \leq k, q_2 \geq j_{k,0}\}$ ;

I.5. Определить тангенсы  $k_i$  угла наклона границы многоугольника Ньютона к оси абсцисс;

I.6. Множество  $\{0, 1/k_1, \dots, 1/k_r\}$  содержит все возможные порядки Жевре ряда (2).

Порядок Жевре 0 соответствует сходимости ряда (2). Сразу гарантирует сходимость многоугольник Ньютона с тремя сторонами, одна из которых – горизонтальный отрезок, две оставшиеся стороны – вертикальные полупрямые.

Теперь опишем алгоритм поиска экспоненциальных добавок к решению методами степенной геометрии (см. [7]):

II.1. Вычислить производную Фреше  $L$  левой части уравнения (1) на решении  $\hat{y}$ ;

II.2. Применить  $L$  к  $u$ ;

II.3. Сделать в (линейном) уравнении  $Lu = 0$  замену

$$\ln u = w, \quad (4)$$

сократить на  $u$ , получить дифференциальное уравнение  $G(x, w) = 0$ ;

II.4. Построить многоугольник Ньютона полученного уравнения по правилам степенной геометрии [4]. Поскольку подставляли ряд, многоугольник – в общем случае – не является ограниченным множеством;

II.5. Рассмотреть ребра многоугольника, внешняя нормаль  $N = (p_1, p_2)$  к которым имеет  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ . Найти степенные разложения решений уравнения  $G(z, w) = 0$ , соответствующие укороченным уравнениям этих ребер;

II.6. Сделать обратную замену  $u = e^w$ .

**Замечание 1.** Мы рассмотрели формальный асимптотический ряд в окрестности бесконечности. В работе речь идет о формальных степенных разложениях решений ОДУ вблизи нуля. Для применения алгоритма I делаем замену  $x = 1/t$ , переводя нуль в бесконечность. При примене-

нии алгоритма II замену делать не надо, следует на шаге II.5 рассмотреть ребра многоугольника, внешняя нормаль  $N = (p_1, p_2)$  к которым имеет  $p_1 < 0, p_2 > 0$ .

### 3. СРАВНЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В предыдущем разделе появились два многоугольника Ньютона; опишем, как они связаны. Их преобразование друг в друга корректирует сделанное в [8] замечание об их связи, поясним это.

**Утверждение 1.** Точки, используемые для построения многоугольника Ньютона, употребляемого для определения порядков Жевре по линейному дифференциальному оператору, получаются как подмножество точек носителя многоугольника Ньютона, применяемого при вычислении экспоненциальных добавок к степенным разложениям решений в бесконечности, повернутого на  $\pi/2$  по часовой стрелке.

**Доказательство.** Алгоритмы методов степенной геометрии и методов французской школы отличаются на этапе линеаризации левой части дифференциального уравнения. Итак, пусть есть линеаризация дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, которая имеет вид

$$\sum_{k=0}^n c_k(x)u^{(k)}, \tag{5}$$

где каждая  $c_k \in \mathbb{C}[[1/x]]$  – ряд по убывающим степеням  $x$ .

1. Покажем, как преобразуются и в какие точки переходят  $u^{(k)}$  при замене (4). Видим, что  $u' = uw'$ , после сокращения на  $u$  ей соответствует точка  $(-1, 1)$ , вторая производная  $u'' = u((w')^2 + w'')$  дает точки  $(-2, 2)$  и  $(-2, 1)$  и т.д. Докажем, что функции  $u^{(n)}$  сопоставляются точки  $(-n, n), (-n, n-1), \dots, (-n, 1)$ .

По индукции: база проверена; пусть

$$u^{(n-1)} = u \sum_{\substack{\ell_1+2\ell_2+\dots+(n-1)\ell_{n-1}=n-1, \\ \ell_i \in \{0,1,\dots,n-1\}}} c_L(w')^{\ell_1} \dots (w^{(n-1)})^{\ell_{n-1}},$$

тогда

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= u' \sum_{\substack{\ell_1+\dots+(n-1)\ell_{n-1}=n-1, \\ \ell_i \in \{0,1,\dots,n-1\}}} c_L(w')^{\ell_1} \dots (w^{(n-1)})^{\ell_{n-1}} + u \sum_{k=1}^{n-1} c_L \ell_k (w')^{\ell_1} \dots (w^{(k)})^{\ell_k} \dots (w^{(n-1)})^{\ell_{n-1}} = \\ &= u \sum_{\substack{\ell_1+\dots+(n-1)\ell_{n-1}=n-1, \\ \ell_i \in \{0,1,\dots,n-1\}}} c_L(w')^{\ell_1+1} \dots (w^{(n-1)})^{\ell_{n-1}} + u \sum_{k=1}^{n-2} c_L \ell_k (w')^{\ell_1} \dots (w^{(k)})^{\ell_k-1} (w^{(k+1)})^{\ell_{k+1}+1} \dots (w^{(n-1)})^{\ell_{n-1}} + \\ &\quad + u c_{(0,\dots,0,1)} \ell_{n-1} w^{(n)} = u \sum_{\substack{\ell_1+2\ell_2+\dots+(n-1)\ell_{n-1}+n\ell_n=n, \\ \ell_i \in \{0,1,\dots,n\}}} \tilde{c}_L(w')^{\ell_1} \dots (w^{(n)})^{\ell_n}. \end{aligned}$$

Полученной дифференциальной сумме соответствуют точки вида

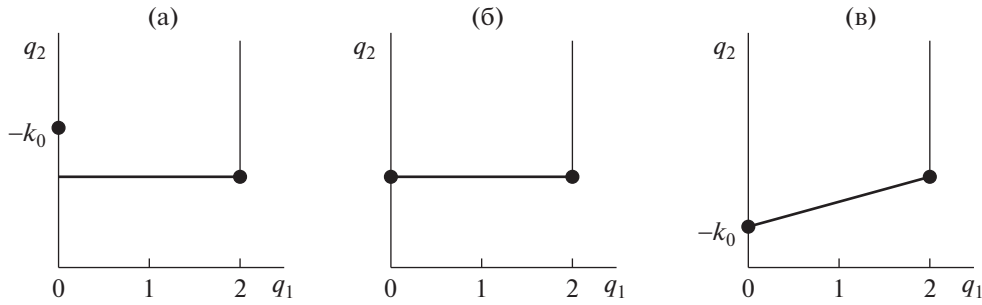
$$(-\ell_1 - 2\ell_2 - \dots - (n-1)\ell_{n-1} - n\ell_n, \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{n-1} + \ell_n) = (-n, k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

и, поскольку  $1 \leq \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{n-1} + \ell_n \leq n$ , формула доказана.

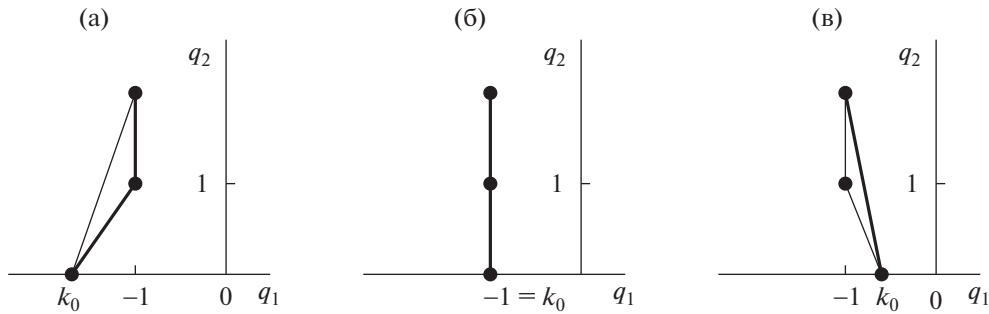
2. Теперь найдем точки, которые соответствуют  $u^{(k)}$  при построении многоугольника, по которому вычисляется порядок Жевре. Перепишем функции  $u^{(k)}$  через оператор  $D$  из предыдущего раздела. Так,  $u = Iu = D^0u$ , и ей сопоставляется  $(0, 0)$ , функции  $u' = \frac{Du}{x}$  соответствует точка  $(1, 1)$

многоугольника, функции  $u'' = \frac{D^2u - Du}{x^2}$  отвечают точки  $(2, 2), (1, 2)$ . Легко проверить по индукции, что  $u^{(k)}$  добавит в многоугольник точки  $(k, k), (k-1, k), \dots, (1, k)$ , поскольку

$$u^{(k)} = \frac{D(D-I)\dots(D-(k-1)I)u}{x^k}.$$



Фиг. 1. Многоугольники Ньютона уравнения (6) для алгоритма I в случаях (а), (б), (в).



Фиг. 2. Многоугольники Ньютона уравнения (6) для алгоритма II в случаях (а), (б), (в).

Получили, что моному  $x^a u^{(k)}$  соответствуют точки  $(a - k, k), (a - k, n - k), \dots, (a - k, 1)$  в многоугольнике Ньютона алгоритма II и точки  $(k, k - a), (k - 1, k - a), \dots, (1, k - a)$  алгоритма I (в алгоритме I затем используется только часть точек). Имеем биективное для каждого из дифференциальных мономов отображение точек первого многоугольника на точки второго, осуществляемое с помощью поворота на  $\pi/2$  против часовой стрелки, переводящего точки второго многоугольника в точки первого по формуле

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

При этом, если точка вида  $(a, k)$  появляется в многоугольнике алгоритма II на каком-то из этапов, то затем она не может исчезнуть, поскольку она соответствует выражениям вида  $c_{a,k} x^{a+k} u^{(k)}, c_{a,k+1} x^{a+k+1} u^{(k+1)}, \dots$  в операторе (3), т.е. выражениям, которые не могут сократиться после логарифмического преобразования (4) в полученном уравнении  $G(x, w) = 0$  (степень  $x$  перед мономами не меняется), а именно, мономам вида

$$\tilde{c}_{a,k} x^{a+k} (w')^k, \tilde{c}_{a,k+1} x^{a+k+1} (w')^{k-1} w'', \tilde{c}_{a,k+2} x^{a+k+2} (w')^{k-2} (w'')^2, \hat{c}_{a,k+2} x^{a+k+2} (w')^{k-1} w''', \dots$$

Это завершает доказательство утверждения.

**Пример 1.** При алгоритме I может пропасть часть точек из алгоритма II.

Рассматривается уравнение

$$x u'' + u' + x^{k_0} u = 0. \tag{6}$$

Вычисления по алгоритму I дадут точки  $(0, -k_0), (2, 1)$ , вычисления по методу II – точки  $(k_0, 0), (-1, 1), (-1, 2)$ . Таким образом, точке  $(-1, 1)$  метода II не соответствует точка по методу I.

На фиг. 1 и 2 изображены многоугольники для алгоритмов I и II для уравнения (6) в случаях (а)  $k_0 < -1$ , (б)  $k_0 = -1$  и (в)  $k_0 > -1$ .

## 4. СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ В НУЛЕ

Запишем второй член четвертой иерархии Пенлеве (см. [2]). Заметим, что это уравнение уже представлено в виде дифференциальной суммы (конечной суммы многочленов от  $y, y_x, \dots, y_{xxxx}$ , умноженных на  $x^\alpha$ ):

$$\begin{aligned} & (y_{xx} - 2xy - 2y^3 - \beta)y^2y_{xxxx} + (2y^2 + 8y^3y_x + 4yy_x x - y_x y_{xx} + \beta y_x)yy_{xxx} - \frac{1}{2}y^2y_{xxx}^2 - \frac{4}{3}yy_x^3 + \\ & + \left(3xy^2 + 3\beta y - \frac{3}{2}y^4 + \frac{3}{2}y_x^2\right)y_{xx}^2 + (\beta y^4 - 2y_x y^2 - 12y_x^2 y^3 - 2\beta^2 y + 10xy^5 - 3\beta y_x^2 + 10y^7 - \\ & - 4xyy_x^2 - 4\beta xy^2)y_{xx} + 2(\beta - 4y^3)y^2y_x + \left(4\beta xy + 8xy^4 + \frac{3}{2}\beta^2 + 12\beta y^3\right)y_x^2 - \frac{10}{3}y^{10} - \\ & - 8xy^8 - 2\beta y^7 - 6x^2y^6 - 2x\beta y^5 + \left(\frac{1}{2}\beta^2 - 2 + 9\delta - \frac{4}{3}x^3\right)y^4 + x\beta^2 y^2 + \frac{1}{3}\beta^3 y = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $x$  и  $y$  – независимая и зависимая комплексные переменные соответственно,  $\beta, \delta$  – комплексные параметры. Далее рассматриваем случай общего положения, предполагая, что оба параметра уравнения ненулевые.

4.1. Разложения  $W_1$ – $W_9$ 

Рассмотрим разложения решений уравнения (7), полученные в [3] и [9] при  $x \rightarrow 0$ .

Начнем с рассмотрения разложений семейства  $W_1$ , которые имеют вид

$$y = -\frac{\beta x^2}{10} + c_4 x^4 + \frac{\beta}{80} x^5 + c_6 x^6 + \sum_{k=7}^{\infty} a_{k,1} x^k.$$

Здесь и далее  $c_j$  – произвольные постоянные, коэффициенты  $a_{j,s}$  однозначно через них выражаются.

Во-первых, заметим, что линейризация укороченного уравнения

$$\begin{aligned} & y_{xx}y^2y_{xxxx} - \beta y^2y_{xxxx} - \frac{y^2y_{xxx}^2}{2} - yy_x y_{xx} y_{xxx} + \beta yy_x y_{xxx} - \frac{4}{3}yy_x^3 + 3\beta yy_{xx}^2 + \frac{3}{2}y_x^2 y_{xx}^2 - \\ & - 2\beta^2 yy_{xx} - 3\beta y_x^2 y_{xx} + \frac{3}{2}\beta^2 y_x^2 + \frac{1}{3}\beta^3 y = 0, \end{aligned}$$

из которого получен первый член асимптотического разложения  $W_1$ , на решении  $w = -\beta x^2/10$  содержит оператор четвертой производной, т.е. порядок максимальной входящей в линейризацию производной совпадает с порядком исходного уравнения (7). Для доказательства сходимости разложения можно использовать теоремы о сходимости из [10]. Разложение сходится.

Во-вторых, проверим это утверждение путем нахождения порядков Жевре и экспоненциальных добавок. Вычислим первую вариацию левой части уравнения (7) на решении  $W_1$ , применим к  $u$ , сделаем замену (4), построим многоугольник Ньютона полученного уравнения

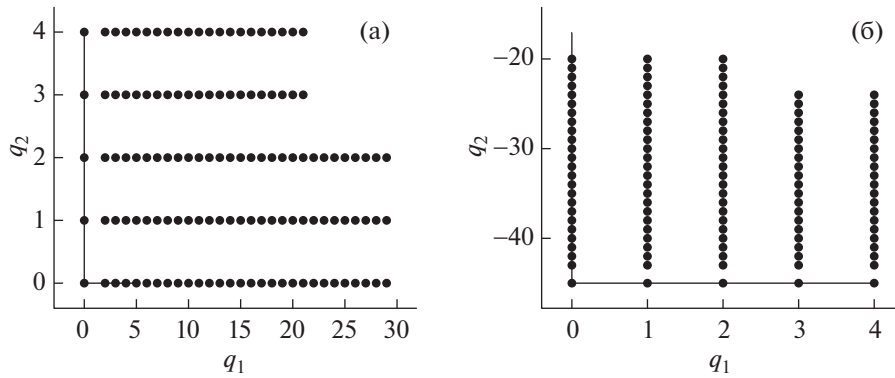
$$\frac{3\beta^3}{125} \left( -36xw_x + 3x^3w_x w_{xx} - 2x^4w_x w_{xxx} + 8x^2w_x^2 - 3x^4w_x^2 w_{xx} + x^3w_x^3 - \frac{1}{2}x^4w_x^4 + \dots \right) = 0 \quad (8)$$

на фиг. 3а (в уравнении (8) выписаны только мономы с минимальными по  $x$  степенями).

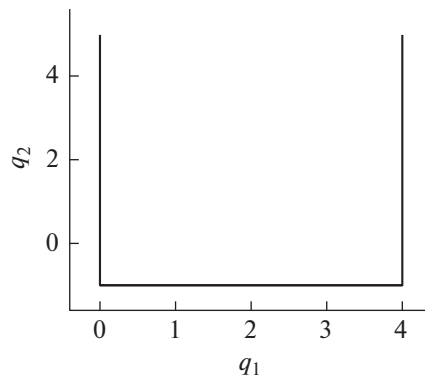
Многоугольник не имеет сторон с внешними нормальными  $N = (p_1, p_2)$ , удовлетворяющими условию  $p_1 < 0, p_2 > 0$ , поэтому разложение  $W_1$  не имеет экспоненциальных добавок.

На фиг. 3б указан многоугольник для нахождения порядков Жевре разложений. Видим, что он не имеет ненулевых тангенсов углов наклона сторон, поэтому ряд  $W_1$  сходится согласно теории из [6].

Рассуждения для семейств разложений  $W_2$ – $W_7$  из [3] идентичны проведенным выше, все эти разложения являются сходящимися, доказательство сходимости разложений семейств  $W_8, W_9$  (при  $\beta \neq -2$  и  $\beta \neq 2$  соответственно) также аналогично.



Фиг. 3. Многоугольники Ньютона алгоритмов II и I для разложения  $W_1$ .



Фиг. 4. Многоугольник Ньютона алгоритма I.

4.2. Разложения, продолжающие асимптотику  $y = cx$

Докажем, пользуясь алгоритмом I, сходимость разложений семейств  $W_{19}-W_{21}$ . Разложения этих семейств имеют вид  $y = cx + \beta/2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \dots$

Сделаем в уравнении (7) замену  $x = 1/t$ , переведя точку  $x = 0$  в  $t = \infty$ , и воспользуемся алгоритмом I построения многоугольника.

Для этого запишем линеаризацию левой части уравнения (7) (после замены переменной), выраженную через оператор  $D_t = t \frac{d}{dt}$ , получим (выписываем только старшие – ведущие степени по  $t$ )

1)  $b_3 \neq 0$ , ведущие слагаемые вида  $6c^2b_3(D_t^4 + 8D_t^3 + 19D_t^2 + 12D_t)t$ , многоугольник Ньютона которого представлен на фиг. 4. Многоугольник не имеет наклонных ребер, что говорит о сходимости разложений семейства  $W_{19}$ ;

2)  $b_3 = 0, b_4 \neq c/6$ , ведущие слагаемые вида  $-2c^2(c - 6b_4)(D_t^4 + 9D_t^3 + 23D_t^2 + 15D_t)$ , многоугольник Ньютона получается сдвигом из многоугольника на фиг. 4. Для разложений семейств  $W_{20,21}$  коэффициент  $b_4 = c/6$  только в случае  $\delta = 0$ , такой случай не рассматриваем в данной работе, сходимость доказана.

4.3. Сходимость разложений, продолжающих асимптотику  $y = c$

Рассмотрим семейство разложений

$$y = c + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_kx^k, \quad c \neq 0,$$

заметив, что разложения  $F_1 - F_6$  из [9] и найденные ниже разложения могут быть записаны как частные случаи этого семейства при различных соотношениях на коэффициенты  $c_1 - c_4$ . Вновь переводим точку  $x = 0$  в  $t = \infty$ , выписываем ведущие слагаемые при степенях оператора  $D_t$ :

$$-c^2(b + 2c^3 - 2c_2)(D_t^4 + 6D_t^3 + 11D_t^2 + 6D_t)t^4. \quad (9)$$

В случае  $b + 2c^3 - 2c_2 \neq 0$  многоугольник оператора (9) по алгоритму I получается вертикальным сдвигом из многоугольника на фиг. 4. Имеет место сходимость таких разложений. Сходимость разложений при  $b + 2c^3 - 2c_2 = 0$  должна быть рассмотрена отдельно.

#### 4.4. Разложения, продолжающие асимптотику $y = c$ при $\beta = -2c^3$

**Утверждение 2.** При  $\beta = -2c^3 \neq 0$ ,  $\delta \neq 0$  имеются следующие дополнительные семейства асимптотических разложений:

$$F_7 = \left\{ y = c + c_2 x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_{k,7} x^k \right\}, \quad c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\};$$

$$F_{8,9} = \left\{ y = c + \frac{c(2 \pm 3\sqrt{2\delta})}{6} x^3 + c_4 x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_{k,8,9} x^k \right\}, \quad c_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \text{ существуют при } \delta \neq 2/9;$$

$$F_{10} = \left\{ y = c + \frac{2c}{3} x^3 + c_4 x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_{k,10} x^k \right\}, \quad c_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \text{при } \delta = 2/9;$$

$$F_{16} = \left\{ y = c + c_4 x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_{k,16} x^k \right\}, \quad c_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \text{при } \delta = 2/9;$$

$$F_{11} = \left\{ y = c - \frac{c^3}{20} x^5 + \sum_{k=6}^{\infty} a_{k,11} x^k \right\}, \text{ существует при } \delta = 2/9;$$

$$F_{12} = \left\{ y = c + c_1 x + c_2 x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_{k,12} x^k \right\};$$

$$F_{13,14} = \left\{ y = c + c_1 x + \frac{c(2 + 6cc_1 \pm 3\sqrt{2\delta})}{6} x^3 + c_4 x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_{k,13,14} x^k \right\}, \quad 6cc_1 + 2 = \pm 3\sqrt{2\delta}, \quad c_1 \neq 0;$$

$$F_{15} = \left\{ y = c + c_1 x + \frac{-3c^4 c_1 - c^3 + 2c_1^3}{20} x^5 + \sum_{k=6}^{\infty} a_{k,15} x^k \right\}, \quad 6cc_1 + 2 = \pm 3\sqrt{2\delta}, \quad c_1 \neq 0.$$

**Доказательство** состоит в последовательном переборе вершин и ребер многоугольников Ньютона методами степенной геометрии и следует ниже.

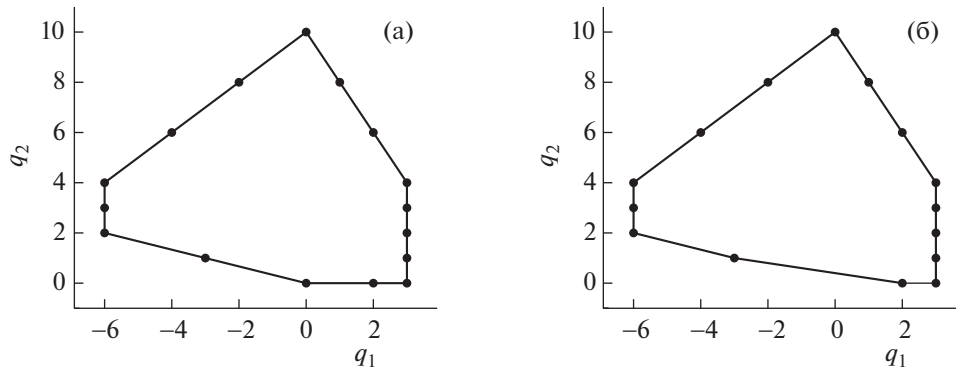
Обратимся к случаю  $\beta = -2c^3$ . Такое соотношение параметров уравнения и решения пропущено в [9]: при подстановке  $y = c + w$  в уравнение (7) у многоугольника  $\hat{\Gamma}$  может пропасть точка  $(-4, 1)$ , которой соответствует укороченное уравнение

$$-c^2(\beta + 2c^3)w_{xxxx} = 0.$$

Преобразованному уравнению (7) в этом случае соответствует многоугольник  $\hat{\Gamma}$ , изображенный на фиг. 5а. В рассмотрении в многоугольнике  $\hat{\Gamma}$  нуждаются лишь вершина  $(-6, 2)$  и ребро  $\hat{\Gamma}_1$ , соединяющее вершины  $(-6, 2)$  и  $(0, 0)$ . Эта конфигурация многоугольника возможна при наличии точки  $(0, 0)$ , т.е. в случае  $\delta \neq 2/9$ .

Вершине  $(-6, 2)$  многоугольника  $\hat{\Gamma}$  соответствует укороченное уравнение

$$c^2 \left( w_{xxxx} w_{xx} - \frac{w_{xxx}^2}{2} \right) = 0,$$



Фиг. 5. Многоугольники Ньютона  $\hat{\Gamma}$  и  $\hat{\Gamma}'$ .

в которое подставляем  $w = cx^r$ , имеем  $r = 0, r = 1$  (кратности два),  $r = 2, r = 4$  (кратности один). В конусе задачи лежат  $r = 1$  и  $r = 2$ . При  $r = 2$  асимптотика продолжается как семейство разложений  $F_7$ . Случай  $r = 1$  – кратный корень – исследуем позже, сделав в уравнении (7) замену  $w = c + c_1x + u$ .

Ребру  $\hat{\Gamma}_1$  отвечает уравнение

$$c^2 w_{xxxx} w_{xx} - \frac{1}{2} c^2 w_{xxx}^2 + 2c^3 w_{xxx} - 2c^3 x w_{xxxx} - c^4 (2 - 9\delta) = 0. \tag{10}$$

Его решение ищем в виде  $w = Ax^3$ , получаем, что  $A_{1,2} = (2c \pm 3c\sqrt{2\delta})/6$ . Имеем либо одно критическое число  $k = 4$  при  $\delta \neq 0$ , что дает разложения  $F_{8,9}$ , либо – при  $\delta = 0$  (кратном корне  $A$ ) – нулевую линейризацию укороченного уравнения на решении. В данной работе рассматриваем случай общего положения, поэтому дальнейшее исследование нулевой линейризации здесь не проводим.

Теперь рассмотрим многоугольник  $\hat{\Gamma}'$ , полученный для уравнения (7) после замены  $y = c + w$  в случае  $\beta = -2c^3, \delta = 2/9$  (изображен на фиг. 5б). Рассматриваем его ребра: ребро  $\hat{\Gamma}'_1$ , соединяющее вершины  $(-6, 2)$  и  $(-3, 1)$ , и ребро  $\hat{\Gamma}'_2$ , соединяющее вершины  $(2, 0)$  и  $(-3, 1)$ , а также вершины  $(2, 0)$  (алгебраическая),  $(-6, 2)$  (встречалась ранее) и новую вершину  $(-3, 1)$ , которой отвечает укороченное уравнение

$$2c^3 (w_{xxx} - xw_{xxxx}) = 0.$$

Оно не дает подходящих степенных решений: подставляя  $w = cx^r$  в уравнение, имеем  $r \in \{0, 1, 2, 4\}$ , такие значения не подходят для продолжения разложения (не соответствуют нормальному конусу вершины).

Ребру  $\hat{\Gamma}'_1$  отвечает укороченное уравнение (10) при  $\delta = 2/9$  и семейства  $F_{10}, F_{16}$ , полученные из имеющихся выше семейств  $F_{8,9}$  подстановкой.

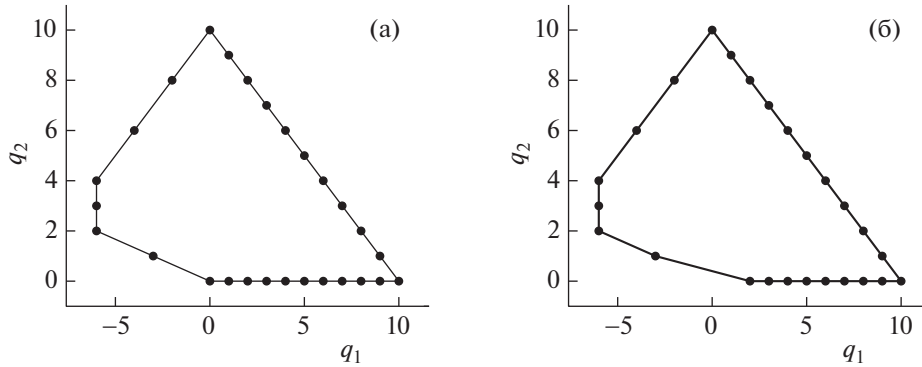
Ребру  $\hat{\Gamma}'_2$  отвечает укороченное уравнение

$$2c^3 (w_{xxx} - xw_{xxxx}) - 6c^6 x^2 = 0, \tag{11}$$

его решение ищем, подставляя  $w = Bx^5$ . Имеем семейство разложений  $F_{11}$ .

Рассмотрим многоугольник уравнения, полученного из уравнения (7) заменой  $y = c + c_1x + u$ . В [9] не учтены разложения, отвечающие  $\beta + 2c^3 = 0$ . Опять разделяем случаи наличия (многоугольник  $\bar{\Gamma}$ , фиг. 6а) и отсутствия ( $\bar{\Gamma}'$ , фиг. 6б) точки  $(0, 0)$  в носителе многоугольника, т.е. случаи неравенства и равенства нулю выражения  $cc_1(12 + 18cc_1) - 9\delta + 2$  (заметим, что предыдущий разобраный случай вкладывается здесь как подслучай при  $c_1 = 0$ ).





Фиг. 6. Многоугольники Ньютона  $\bar{\Gamma}$  и  $\bar{\Gamma}'$ .

Уравнение вершины  $(-6, 2)$  многоугольника  $\bar{\Gamma}$  рассмотрено ранее, вершина дает семейство решений  $F_{12}$ . Вершина  $(0, 0)$  алгебраическая, не дает решений. Ребру, соединяющему вершины  $(0, 0)$  и  $(-6, 2)$ , отвечает уравнение

$$c^2 w_{xxxx} w_{xx} - \frac{1}{2} c^2 w_{xxx}^2 + (2c^3 + 6c^4 c_1) w_{xxx} - (2c^3 + 6c^4 c_1) x w_{xxxx} - c^4 (12c c_1 + 2 + 18c^2 c_1^2 - 9\delta) = 0.$$

Его решение ищем в виде  $w = Ax^3$ , получаем, что  $A_{13,14} = (2c + 6c^2 c_1 \pm 3c\sqrt{2\delta})/6$ , критическое число  $k = 4$  при  $\delta \neq 0$  и нулевую линеаризацию укороченного уравнения на решении при  $\delta = 0$ . Это дает при  $\delta \neq 0$  начальные члены разложения  $F_{13,14}$ .

Остается многоугольник  $\bar{\Gamma}'$ , в котором появляется не рассмотренное ранее ребро, соединяющее точки  $(-3, 1)$  и  $(2, 0)$ . Ему отвечает укороченное уравнение

$$2c^3(1 + 3cc_1)(u_{xxx} - xu_{xxxx}) - 6c^3(c^3 + 6c^4 c_1 + 9c^5 c_1^2 - 2c_1^3 - 6cc_1^4)x^2 = 0 \tag{12}$$

с подходящими решениями  $u = Bx^5$ . Заметим, что уравнение (11) получается как частный случай уравнения (12) при  $c_1 = 0$ . Имеем семейство  $F_{15}$ .

### 5. КОД ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПОРЯДКОВ ЖЕВРЕ

Имеется написанный в пакете символьных вычислений Wolfram Mathematica (см. [11]) код для вычисления порядка Жевре. На входе есть дифференциальное уравнение и формально удовлетворяющий ему ряд. Код приводится для дифференциального уравнения 2-го порядка и выложен в открытом доступе: <https://github.com/Victoranoshin/Asymptotic-expansions-of-solutions-for-equations-in-the-Wolfram-Mathematica-system>.

В команду Expand вместо многоточия подставляется левая часть дифференциального уравнения, вместо 'solution' – формальное решение этого уравнения.

Код для вычисления порядков Жевре в случае рассматриваемого уравнения 4-го порядка для конкретных формальных разложений выкладывается туда же.

### 6. О СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть уравнение (1) при  $x \rightarrow 0$  имеет формальное решение  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ . Сделаем в уравнении (1) подстановку

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + z,$$

получим уравнение  $G(x, z) = 0$ . При этом носитель дифференциальной суммы (ряда)  $G$  не содержит точек  $(q_1, q_2)$  с  $q_2 = 0$ . Пусть  $g$  – линейная по  $z$  часть дифференциальной суммы  $G$ . Тогда

$$g(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)x^k,$$

где  $g_k$  – линейные по  $z$  дифференциальные суммы с постоянными коэффициентами. Пусть  $g_\ell$  – первая отличная от нуля такая сумма.

**Теорема** (см. [4, п. 3.4]). *Если порядки дифференцирования в  $g_\ell$  и полном уравнении (1) совпадают, то формальное решение сходится при малых  $|x|$ .*

Это условие совпадает с условием в работе [12]. Для рядов более широкого класса, чем упомянуто здесь, оно доказано в [10].

Для всех полученных вблизи нуля разложений можно проверить выполнение этого условия для доказательства сходимости.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пикеринг А. Иерархии Пенлеве и тест Пенлеве // Успехи матем. наук. 2003. Т. 137. № 3. С. 445–456.
2. Кудряшов Н.А. О четвертой иерархии Пенлеве // Теор. и матем. физ. 2003. Т. 134. С. 101–109.
3. Аношин В.И., Бекетова А.Д., Парусникова А.В., Романов К.В. Некоторые асимптотические разложения решений иерархии четвертого уравнения Пенлеве // Программирование. 2022. № 1. С. 34–39.
4. Брюно А.Д. Асимптотика и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59. Вып. 3. С. 31–80. Тр. ММО. 2010. Т. 71.
5. Рамис Ж.П. Расходящиеся ряды и асимптотическая теория. Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2002.
6. Sibuya Y. Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation. Providence: AMS, 1985.
7. Брюно А.Д. Экспоненциальные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. АН. 2012. Т. 443. № 1. С. 539–544.
8. Parusnikova A.V. On Gevrey orders of formal power series solutions to the third and fifth Painlevé equations near infinity // Opuscula Math. 2014. V. 34. № 3. P. 591–599.
9. Аношин В.И., Бекетова А.Д., Парусникова А.В. Асимптотические разложения решений второго члена четвертой иерархии Пенлеве, продолжающие константную асимптотику при  $x \rightarrow 0$  // Дифференц. уравнения и смежные вопросы математики. Тр. XIII Приокской науч. конф. ГСГУ, 2021. С. 33–39.
10. Gontsov R., Goryuchkina I. The Maillet-Malgrange type theorem for generalized power series // Manuscripta Math. 2018. V. 156. P. 171–185.
11. Wolfram St. The Mathematica Book. Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p.
12. Malgrange B. Sur le théorème de Maillet-Malgrange // Asymptot. Anal. 1989. V. 2. P. 1–4.