

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ  
УРАВНЕНИЯ

УДК 519.16

ВЕЩЕСТВЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА БИНАРНОГО  
МНОГОЧЛЕНА В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. А. Б. Батхин<sup>1,2,\*</sup>, А. Д. Брюно<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 141701, Долгопрудный, МО, Институтский переулок, 9, МФТИ, Россия

<sup>2</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

\*e-mail: batkhin@gmail.com

\*\*e-mail: abruno@keldysh.ru

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.  
Переработанный вариант 25.04.2022 г.  
Принята к публикации 17.09.2022 г.

Рассматривается вещественный многочлен от двух переменных. Его разложения вблизи нулевой критической точки начинаются с формы третьей степени. Находятся его простейшие формы, к которым приводится этот многочлен с помощью обратимых вещественных локальных аналитических замен координат. Сначала для кубической формы с помощью линейных замен координат получены нормальные формы. Их оказалось три. Затем для полного многочлена получены три нелинейные нормальные формы. Предложено упрощение вычисления нормальной формы. Рассмотрен содержательный пример. Библ. 14. Фиг. 7.

**Ключевые слова:** кубическая форма, замена координат, нормальная форма, нелинейная нормализация.

**DOI:** 10.31857/S0044466923010064, **EDN:** LDMYKU

1. ВВЕДЕНИЕ

В окрестности нуля  $x = y = 0$  рассматривается вещественный многочлен

$$f(x, y) = \sum_{p, q} f_{pq} x^p y^q, \quad (1)$$

где  $0 \leq p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $p + q \geq 3$  и  $f_{pq}$  – вещественные коэффициенты. Ищется его простейший вид в классе вещественных аналитических обратимых замен координат

$$x = \xi(w, z), \quad y = \eta(w, z), \quad (2)$$

где  $\xi(0, 0) = \eta(0, 0) = 0$ . Эта задача разбита на две.

В разд. 2 рассматривается задача упрощения вещественной кубической формы

$$f_3(x, y) = f_{30}x^3 + f_{21}x^2y + f_{12}xy^2 + f_{03}y^3 \neq 0 \quad (3)$$

с помощью обратимых линейных вещественных замен координат

$$x = Au + Bv, \quad y = Cu + Dv, \quad (4)$$

где обратимость означает, что определитель

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0. \quad (5)$$

**Теорема 1.** Форма (3) с помощью замен (4) всегда приводится к одной из трех нормальных форм:

$$1. \quad f_3 = u^3 + v^3; \quad (6a)$$

$$2. \quad f_3 = u^3; \quad (6b)$$

$$3. \quad f_3 = u^2v. \quad (6b)$$

В разд. 3 рассматривается задача упрощения вещественного многочлена

$$g(u, v) = \sum_{p+q \geq 3} g_{pq} u^p v^q \quad (7)$$

с начальной кубической формой теоремы 1 в классе нелинейных вещественных аналитических замен координат

$$u = A_1 w + \xi_1(w, z), \quad v = D_1 z + \eta_1(w, z), \quad (8)$$

где  $A_1$  и  $D_1$  – ненулевые постоянные и ряды  $\xi_1, \eta_1$  начинаются с квадратичных членов.

**Теорема 2.** Многочлен (7) с помощью замен (8) всегда приводится к одной из трех нормальных форм:

1.  $g = w^3 + z^3$ ;
2.  $g = w^3 + bz^4$ ,  $b = \pm 1$ , если в форме четвертого порядка  $g_4(u, v)$  коэффициент  $g_{04} \neq 0$ ;
3.  $g = w^2 z + \tau z^m$ ,  $m > 3$ ,  $\tau \in \{-1, 0, 1\}$ .

В разд. 4 доказана

**Теорема 3.** Если многочлен  $f(u, v)$  имеет укороченный многочлен  $\hat{f}(u, v)$  одного из трех видов

1.  $\hat{f} = \alpha u^3 + \beta v^3$ ,
2.  $\hat{f} = \alpha u^3 + \beta v^4$ ,
3.  $\hat{f} = \alpha u^2 v + \beta v^m$ ,

где числа  $\alpha, \beta \neq 0$ ,  $m > 3$ , то его нормальная форма относится к случаям 1, 2, 3 теоремы 2 соответственно и получается из укороченного многочлена  $\hat{f}(x, y)$  линейной диагональной заменой  $u = Aw$ ,  $v = Dz$ , где

- $A = \sqrt[3]{\alpha}$ ,  $D = \sqrt[3]{\beta}$  для вида 1;
- $A = \sqrt[3]{\alpha}$ ,  $D = \sqrt[4]{|\beta|}$  для вида 2;
- $A = \sqrt[2m]{|\beta|/\sqrt{|\alpha|}}$ ,  $D = \text{sign } \alpha/\sqrt[2m]{|\beta|}$  для вида 3.

Определение укороченного многочлена  $\hat{f}$  см. в [1].

В разд. 5 рассматривается пример вычисления нормальной формы некоторого многочлена вблизи его особой точки второго порядка.

Отметим, что нормальные формы бинарного многочлена находят различные применения. Например, для классификации обобщенных алгебр Клиффорда, связанных с бинарными формами степени 3 [2], используется нормальная форма (ба) теоремы 1. Нормальные формы комплексных многочленов (1) в классе комплексных обратимых замен координат (2) рассмотрены в [3].

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Будем различать три случая.

1. В форме (3) хотя бы один из коэффициентов  $f_{30}$  и  $f_{03}$  отличен от нуля.
2. В форме (3) коэффициенты  $f_{30} = f_{03} = 0$ , но  $f_{21}$  и  $f_{12}$  отличны от нуля.
3. В форме (3) коэффициенты  $f_{30} = f_{12} = f_{03} = 0$ , но  $f_{21} \neq 0$ .

### 2.1. Случай 1

Если  $f_{30} \equiv 0$ , а  $f_{03} \neq 0$ , то  $u$  и  $v$  поменяем местами. Это линейное преобразование. Пусть  $f_{30} \neq 0$ .

Положим  $x_1 = \sqrt[3]{f_{30}}x$ , тогда

$$f_3 = x_1^3 + a_1 x_1^2 y + a_2 x_1 y^2 + a_3 y^3, \quad (9)$$

где коэффициенты  $a_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , выражаются через коэффициенты формы (3).

Положим  $x_1 = x_2 - \frac{1}{3}a_1y$ , тогда

$$f_3 = x_2^3 + b_2x_2y^2 + b_3y^3,$$

где коэффициенты  $b_2, b_3$  полиномиально выражаются через коэффициенты  $a_j, j = 1, 2, 3$ .

Если  $b_2 = 0$ , то при  $b_3 = 0$  имеем нормальную форму 2 (6б) из теоремы 1, а при  $b_3 \neq 0$  полагаем

$$u = x_2, \quad v = \sqrt[3]{b_3}y,$$

и получаем нормальную форму 1 (6а) теоремы 1.

Если  $b_2 \neq 0$ , то, полагая  $y_1 = \sqrt{|b_2|}y$ , получаем форму

$$f_3 = x_2^3 + \sigma x_2 y_1^2 + \gamma y_1^3, \quad \sigma = \pm 1, \quad (10)$$

где  $\sigma = \text{sign } b_2$  и  $\gamma = b_3/|b_2|^{3/2}$  – любое вещественное число.

Будем упрощать форму (10) с помощью линейных замен

$$x_2 = u + Bv, \quad y_1 = Cu + v. \quad (11)$$

Условие (5) здесь означает, что

$$BC \neq 1. \quad (12)$$

После замены (11) форма (10) принимает вид

$$f_3 = (\gamma C^3 + \sigma C^2 + 1)u^3 + (\sigma BC^2 + 3\gamma C^2 + 2\sigma C + 3B)u^2v + (2\sigma BC + 3B^2 + 3\gamma C + \sigma)uv^2 + (B^3 + \sigma B + \gamma)v^3. \quad (13)$$

Коэффициенты при мономах  $u^2v$  и  $uv^2$  аннулируются, если выполнены равенства

$$\sigma BC^2 + 3\gamma C^2 + 2\sigma C + 3B = 0, \quad (14)$$

$$2\sigma BC + 3B^2 + 3\gamma C + \sigma = 0. \quad (15)$$

Из уравнения (14) получаем

$$B = -\frac{3\gamma C^2 + 2\sigma C}{\sigma C^2 + 3}. \quad (16)$$

Подставив это выражение в уравнение (15), умножив его на  $(\sigma C^2 + 3)^2$ , приведя подобные члены и сократив на 3, получаем уравнение

$$-\gamma C^5 + (9\gamma^2 - \sigma)C^4 + 12\gamma\sigma C^3 + 2C^2 + 9C\gamma + 3\sigma = 0. \quad (17)$$

Этот многочлен распадается на множители

$$-(C^2 - 9\gamma C - 3\sigma)(\gamma C^3 + \sigma C^2 + 1). \quad (18)$$

Выделим тот исключительный случай, когда условие (12) не выполнено. Согласно (16) равенство  $BC = 1$  эквивалентно уравнению

$$2\sigma C^2 + 3\gamma C^3 + 3 + \sigma C^2 = 0,$$

т.е.

$$\gamma C^3 + \sigma C^2 + 1 = 0. \quad (19)$$

Поэтому второй множитель в (18) должен быть отличным от нуля, и уравнение (17) сводится к уравнению

$$C^2 - 9\gamma C - 3\sigma = 0. \quad (20)$$

Согласно (19) в исключительном случае имеем

$$\gamma = -\frac{\sigma C^2 + 1}{C^3}. \quad (21)$$

Подставляя это значение в уравнение (20), умножая его на  $C^2$  и приводя подобные члены, получаем уравнение

$$(C^2 + 3\sigma)^2 = 0, \quad \text{т.е.} \quad C^2 = -3\sigma.$$

Вещественное значение  $C$  возможно только при  $\sigma = -1$ , тогда  $C = \pm\sqrt{3}$ . Из (21) получаем  $\gamma = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

Итак, всегда, кроме исключительного случая

$$\sigma = -1, \quad \gamma = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad (22)$$

существует невырожденная замена (11), приводящая форму (10) к виду

$$f_3 = \alpha u^3 + \beta v^3, \quad (23)$$

где постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  отличны от нуля. Из формулы (13) имеем

$$\alpha = \gamma C^3 + \sigma C^2 + 1, \quad \beta = B^3 + \sigma B + \gamma.$$

Согласно (19)  $\alpha = 0$  только в исключительном случае.

Аналогично, из уравнения (15) получаем

$$C = -\frac{3B^2 + \sigma}{2\sigma B + 3\gamma}.$$

Вырожденность  $BC = 1$  означает, что

$$\sigma B + 3B^3 + 3\gamma + 2\sigma B = 3(B^3 + \sigma B + \gamma) = 0.$$

Поскольку мы рассматриваем невырожденный случай, то  $\beta \neq 0$ . Замена

$$u_1 = \sqrt[3]{\alpha}u, \quad v_1 = \sqrt[3]{\beta}v$$

приводит форму (23) к нормальной форме 1 (6а) теоремы 1.

Согласно (22) форма (10) в исключительном случае раскладывается на множители

$$x_2^3 - x_2 y_1^2 \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} y_1^3 = \left(x_2 \mp \frac{1}{\sqrt{3}} y_1\right)^2 \left(x_2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} y_1\right).$$

Поэтому, полагая

$$u = x_2 \mp \frac{1}{\sqrt{3}} y_1, \quad v = x_2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} y_1,$$

получаем нормальную форму 3 (6в) теоремы 1.

Итак, для случая 1 теорема 1 доказана.

## 2.2. Случай 2

В этом случае

$$f_3 = f_{21} x^2 y + f_{12} x y^2, \quad (24)$$

где оба коэффициента  $f_{21}$  и  $f_{12}$  отличны от нуля. Преобразование

$$x = \sqrt[3]{\frac{f_{12}}{f_{21}}} x_1, \quad y = \sqrt[3]{\frac{f_{21}}{f_{12}}} y_1$$

приводит форму (24) к виду

$$f_3 = x_1^2 y_1 + x_1 y_1^2.$$

Выполняем замену  $x_1 = x_2 - \frac{1}{2}y_1$  и получаем форму  $f_3 = x_2^2 y_1 - \frac{1}{4}y_1^3$ , которая после преобразования

$$x_2 = \frac{Y}{\sqrt[3]{2}}, \quad y_1 = -\sqrt[3]{4}X$$

приобретает вид

$$f_3 = X^3 - XY^2.$$

Но в п. 2.1 было показано, что эта форма эквивалентна нормальной форме 1 (6а) теоремы 1.

### 2.3. Случай 3

В этом случае

$$f_3 = f_{21}x^2y.$$

Линейной заменой  $u = x$ ,  $v = f_{21}y$  приводим эту форму к виду  $f_3 = u^2v$ , т.е. к нормальной форме 3 (6в) теоремы 1.

### 2.4. Неэквивалентность нормальных форм 1, 2, 3 теоремы 1

Покажем, что нормальная форма 1 (6а) и нормальная форма 2 (6б) не эквивалентны между собой.

Форма 2 есть  $f_3 = x^3$ . После линейной замены

$$x = Au + Bv, \quad y = Cu + Dv \tag{25}$$

она принимает вид

$$f_3 = A^3u^3 + 3A^2Bu^2v + 3AB^2uv^2 + B^3v^3. \tag{26}$$

Она имеет вид формы 1 (6а), только если  $A^2B = AB^2 = 0$ . Но тогда либо  $A = 0$ , либо  $B = 0$ , либо  $A = B = 0$ . В первых двух случаях форма (26) является формой вида 2 (6б). В третьем случае замена (25) вырождена.

Покажем теперь, что нормальная форма 3 (6в) не эквивалентна нормальной форме 1 (6а) и нормальной форме 2 (6б).

Форма  $f_3 = x^2y$  после замены (25) принимает вид

$$f_3 = A^2Cu^3 + (A^2D + 2ABC)u^2v + (2ABD + B^2C)uv^2 + B^2Dv^3.$$

Она имеет вид форм 1 и 2, только если

$$A^2D + 2ABC = A(AD + 2BC) = 0,$$

$$2ABD + B^2C = B(2AD + BC) = 0.$$

Эта система уравнений имеет 4 решения:

1.  $A = B = 0$ ;

2.  $A = 2AD + BC = 0$ , т.е.  $A = BC = 0$ ;

3.  $B = AD + 2BC = 0$ , т.е.  $B = AD = 0$ ;

4.  $AD + 2BC = 2AD + BC = 0$ , т.е.  $AD = BC = 0$ , ибо определитель этой однородной системы равен  $-3$ , т.е. отличен от нуля.

Для всех этих решений замена (25) вырождена.

Теорема 1 доказана.

## 2.5. Замечания к доказательству теоремы 1

**Замечание 1.** Доказательство теоремы 1 можно провести, используя современный вариант теории исключений, опирающийся на вычисление базисов Грёбнера соответствующих идеалов [4, Гл. 2, 3].

Для приведения формы (10) к виду (6а) с помощью преобразования (11) составляется идеал  $\mathcal{F}_1$  из многочленов (14) и (15). Затем для идеала  $\mathcal{F}_1$  вычисляется его базис Грёбнера с лексикографическим порядком переменных  $C \prec B$ . Величины  $\sigma$  и  $\gamma$  в этом случае выступают в качестве параметров. Первым многочленом этого базиса (с точностью до знака) является полином (17), который раскладывается на множители (18).

Если задать другой лексикографический порядок  $B \prec C$  и вычислить новый базис Грёбнера, то его первым многочленом будет полином, раскладывающийся на множители

$$(3\sigma B^2 + 9\gamma B - \sigma^2)(B^3 + \sigma B + \gamma). \quad (27)$$

Наличие кубических членов в формулах (18) и (27) гарантирует существование по крайней мере одного вещественного решения системы (14), (15). На самом деле, для всех значений параметров  $\sigma$ ,  $\gamma$ , кроме исключительного случая (22), имеется три набора решений указанной системы.

В этом легко убедиться, если вычислить дискриминанты  $D_C^{(1)} = D_B^{(1)} = 3(4\sigma + 27\gamma^2)$  квадратичных множителей формул (18) и (27) и дискриминанты кубических множителей этих же формул:  $D_C^{(2)} = D_B^{(2)} = -(4\sigma + 27\gamma^2)$ . Разные знаки этих выражений обеспечивают наличие двух вещественных корней квадратичных множителей и одного вещественного корня кубических при  $D_C^{(2)} < 0 < D_C^{(1)}$ , либо трех вещественных корней кубических множителей при  $D_C^{(1)} < 0 < D_C^{(2)}$ .

**Замечание 2.** Для преобразования многочлена (9) к нормальной форме 1 (6а) можно воспользоваться методом, который называется *преобразование Чирнгауза* (см. [5, Гл. 4, п. 19.1], [6, Ч. 1, п. 6.2]). Его идея заключается в том, что исходный многочлен преобразуется к многочлену  $F(y)$  наиболее простого вида (обычно  $F(y) = y^3 - c$ ) с помощью вспомогательного многочлена  $h(x)$ .

Рассмотрим, например, как преобразовать форму (10) к виду (6а) с помощью вспомогательного квадратного многочлена  $h = X^2 + c_1X + c_2$ , где  $c_1, c_2$  – некоторые неизвестные величины. Сначала с помощью подстановки  $x_2 = X/y_1$  перейдем к многочлену  $\tilde{f}_3 = X^3 + \sigma X + \gamma$  от одной переменной  $X$ . Многочлен  $F(Y)$  – результат преобразования Чирнгауза – можно вычислить одним из двух способов:

- либо как результат  $\text{Res}_X(\tilde{f}_3(X), y - h(X))$  многочленов  $\tilde{f}_3(X)$  и  $h(X)$  относительно переменной  $X$ ;
- либо как характеристический многочлен матрицы  $\mathfrak{B}$  – аналога матрицы Безу [6], [7], составленной из коэффициентов остатков от деления  $X^k h(X)$  на  $\tilde{f}_3(X)$ .

Вычисления удобнее выполнять в любой из систем компьютерной алгебры (СКА). Авторы использовали СКА Maple [8], [9], хотя здесь подойдет любая СКА, например, бесплатная SymPy [10]. Применяя один из указанных выше способов, получаем многочлен

$$F(Y) = Y^3 + (2\sigma - 3c_2)Y^2 + (\sigma c_1^2 + 3\gamma c_1 - 4\sigma c_2 + 3c_2^2 + 1)Y + \gamma c_1^3 - \sigma c_1^2 c_2 + \gamma \sigma c_1 - 3\gamma c_1 c_2 + 2\sigma c_2^2 - c_2^3 - \gamma^2 - c_2. \quad (28)$$

Подберем теперь коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  многочлена  $h(X)$  так, чтобы коэффициенты при линейном и квадратном членах многочлена  $F(Y)$  были равны нулю:

$$2\sigma - 3c_2 = 0, \quad \sigma c_1^2 + 3\gamma c_1 - 4\sigma c_2 + 3c_2^2 + 1 = 0.$$

Базис Грёбнера этого идеала имеет вид

$$\mathcal{GB} \mathcal{I} = \{3\sigma c_1^2 + 9\gamma c_1 - 1, 3c_2 - 2\sigma\}. \quad (29)$$

Очевидно, что вещественные корни идеала  $\mathcal{GBJ}$  существуют при условии, что дискриминант  $D^{(1)} = 3(27\gamma^2 + 4\sigma)$  его первого многочлена неотрицателен, что согласуется с выводами замечания 1.

Упрощая свободный член многочлена (28) по модулю базиса Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$ , получаем для него выражение

$$\delta = \frac{1}{81} D^{(1)} (9\gamma c_1^* - 2\sigma),$$

где  $c_1^*$  – один из корней первого многочлена базиса (29).

Итак, при условии  $D^{(1)} \geq 0$  форма (10) приводится к форме  $u^3 + \delta v^3$ , которая соответствует либо нормальной форме 1 (6а) при  $\delta \neq 0$ , либо нормальной форме 2 (6б) теоремы 1 при  $\delta = 0$ .

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Здесь рассмотрим многочлен (7) последовательно по случаям 1, 2, 3 на стр. 4.

#### 3.1. Случай $g_3 = u^3 + v^3$ .

Сделаем замену

$$u = u_1 - \frac{1}{3} g_{22} v^2.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} u^3 &= u_1^3 - g_{22} u_1^2 v^2 + 3g_{22} u_1 v^4 - \frac{1}{27} g_{22}^3 v^6, \\ g_{22} u^2 v^2 &= g_{22} u_1^2 v^2 - \frac{2}{3} g_{22}^2 u_1 v^4 + \frac{1}{9} g_{22}^3 v^6. \end{aligned}$$

Поэтому в новых координатах  $u_1, v$

$$g = u_1^3 + v^3 + \sum_{p+q \geq 4} \tilde{g}_{pq} u_1^p v^q, \tag{30}$$

где коэффициент  $\tilde{g}_{22} = 0$ .

Разобьем сумму (30) на две:

$$g = g^* + g^{**}, \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned} g^* &= u_1^3 \left[ 1 + \sum_{\substack{p \geq 3 \\ q \geq 0}} \tilde{g}_{pq} u_1^{p-3} v^q \right] \stackrel{\text{def}}{=} u_1^3 [1 + \alpha(u_1, v)], \\ g^{**} &= v^3 \left[ 1 + \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2 \\ q \geq 3}} \tilde{g}_{pq} u_1^p v^{q-3} \right] \stackrel{\text{def}}{=} v^3 [1 + \beta(u_1, v)], \end{aligned}$$

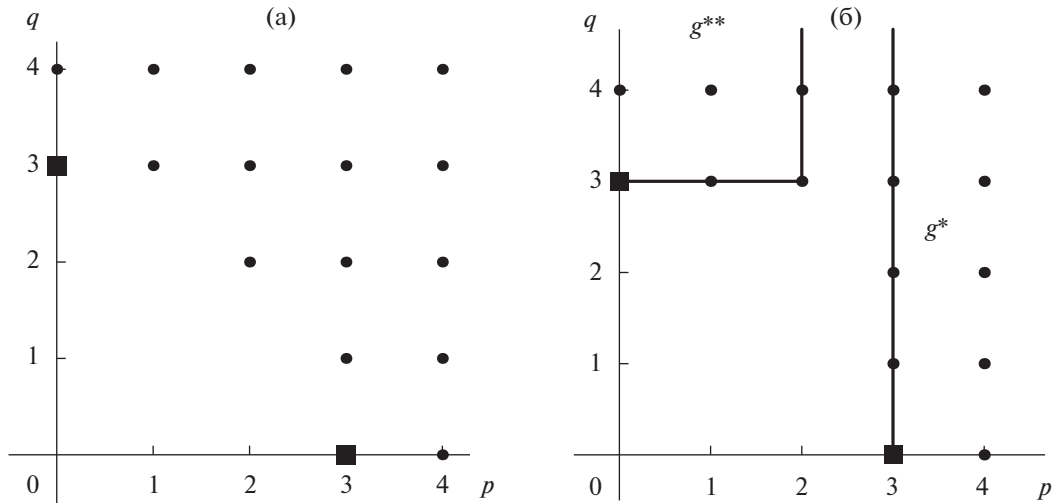
а величины  $\alpha(u_1, v)$  и  $\beta(u_1, v)$  – это многочлены без свободных членов. Поэтому замена

$$w = u_1 \sqrt[3]{1 + \alpha(u_1, v)}, \quad z = v \sqrt[3]{1 + \beta(u_1, v)}$$

аналитична. Получаем нормальную форму 1 теоремы 2.

Для многочлена (7) множество точек  $(p, q)$ , для которых  $g_{pq} \neq 0$ , называется его *носителем*.

На фиг. 1 слева показан носитель исходного многочлена (7), а справа – преобразованного многочлена (30). При этом квадратиками выделены точки носителя нормальной формы (6а) и отчеркнуты носители для сумм  $g^*$  и  $g^{**}$ .



Фиг. 1. Носители исходного (7) (а) и преобразованного (30) (б) многочленов. Случай 1.

3.2. Случай  $g_3 = u^3$

Пусть в разложении (7) коэффициент  $g_{04} \neq 0$ . Это и есть условие невырожденности формы  $g_4(u, v)$ . Можно считать, что  $g_{04} = \pm 1 \stackrel{\text{def}}{=} b$ .

Теперь аннулируем коэффициенты  $g_{13}$ ,  $g_{22}$  и  $g_{23}$  с помощью последовательных замен. Вначале выполняем подстановку  $v = v_1 - \frac{g_{13}}{4b}u$  и получаем новые коэффициенты  $\tilde{g}_{jk}$  разложения (7). Затем делаем подстановку  $u = u_1 - \frac{1}{3}\tilde{g}_{22}v_1^2 - \frac{1}{3}\tilde{g}_{23}v_1^3$ . Тогда полученная сумма

$$g(u_1, v_1) = u_1^3 + bv_1^4 + \sum \tilde{g}_{pq}u_1^p v_1^q \tag{32}$$

разбивается на две части (31), где

$$g^* = u_1^3 \left[ 1 + \sum_{\substack{p \geq 3 \\ q \geq 0}} \tilde{g}_{pq} u_1^{p-3} v_1^q \right] \stackrel{\text{def}}{=} u_1^3 [1 + \alpha(u_1, v_1)],$$

$$g^{**} = bv_1^4 \left[ 1 + \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2 \\ q \geq 4}} \tilde{g}_{pq} u_1^p v_1^{q-4} \right] \stackrel{\text{def}}{=} bv_1^3 [1 + \beta(u_1, v_1)],$$

где  $\alpha(u_1, v_1)$  и  $\beta(u_1, v_1)$  – это многочлены без свободных членов. Поэтому замена

$$w = u_1 \sqrt[3]{1 + \alpha(u_1, v_1)}, \quad z = v_1 \sqrt[4]{1 + \beta(u_1, v_1)}$$

аналитична и приводит многочлен к нормальной форме 2 теоремы 2.

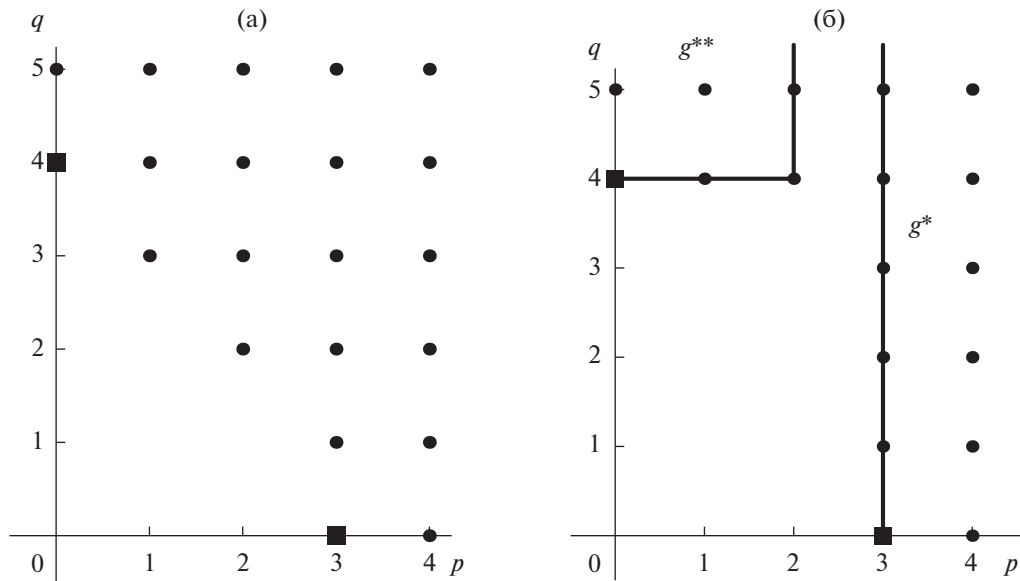
На фиг. 2 показаны носители исходного (7) (а) и преобразованного (32) (б) многочленов. Точки главных членов обозначены квадратами.

3.3. Случай  $g_3 = u^2v$

Согласно [1] многоугольник Ньютона многочлена  $g$  имеет вершину  $(p, q) = (2, 1)$ , а многочлен  $g$  имеет корень в виде сходящегося степенного ряда

$$v = \sum_{k \geq 2}^{\infty} \varphi_k u^k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(u).$$





Фиг. 2. Носители исходного (7) (а) и преобразованного (32) (б) многочленов. Случай 2.

Сделаем замену  $v = v_1 - \varphi(u)$ . Тогда  $g(u, v_1)$  делится на  $v_1$ . Теперь по теореме о неявной функции уравнение  $\frac{\partial g(u, v_1)}{\partial u} = 0$  имеет решение в виде сходящегося степенного ряда

$$u = \psi(v_1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 2}^{\infty} \psi_k v_1^k.$$

После замены  $u = u_1 - \psi(v_1)$  получаем

$$g(u_1, v_1) = u_1^2 v_1 + \sum \tilde{g}_{pq} u_1^p v_1^q, \tag{33}$$

где все  $\tilde{g}_{p0} = 0$  и все  $\tilde{g}_{1q} = 0$ . Поэтому сумма  $g$  разбивается на две части (31), где

$$g^* = u_1^2 v_1 [1 + \sum \tilde{g}_{p1} u_1^{p-2} v_1^{q-1}] \stackrel{\text{def}}{=} u_1^2 v_1 [1 + \alpha(u_1, v_1)], \tag{34}$$

$$g^{**} = \beta(v_1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=m}^{\infty} \beta_k v_1^k, \quad m > 3,$$

где  $\alpha(u_1, v_1)$  и  $\beta(v_1)$  суть сходящиеся степенные ряды без свободных членов, причем ряд  $\beta(v_1)$  начинается с некоторого члена  $\beta_m v_1^m$ , либо  $\beta(v_1) \equiv 0$ .

Если  $\beta \neq 0$ , то замена  $z = \sqrt[m]{\beta(v_1) / \text{sign } \beta_m}$  приводит ряды (34) к виду

$$g^* = \frac{1}{\sqrt[m]{|\beta_m|}} u_1^2 z [1 + \tilde{\alpha}(u_1, z)],$$

$$g^{**} = \tau z^m,$$

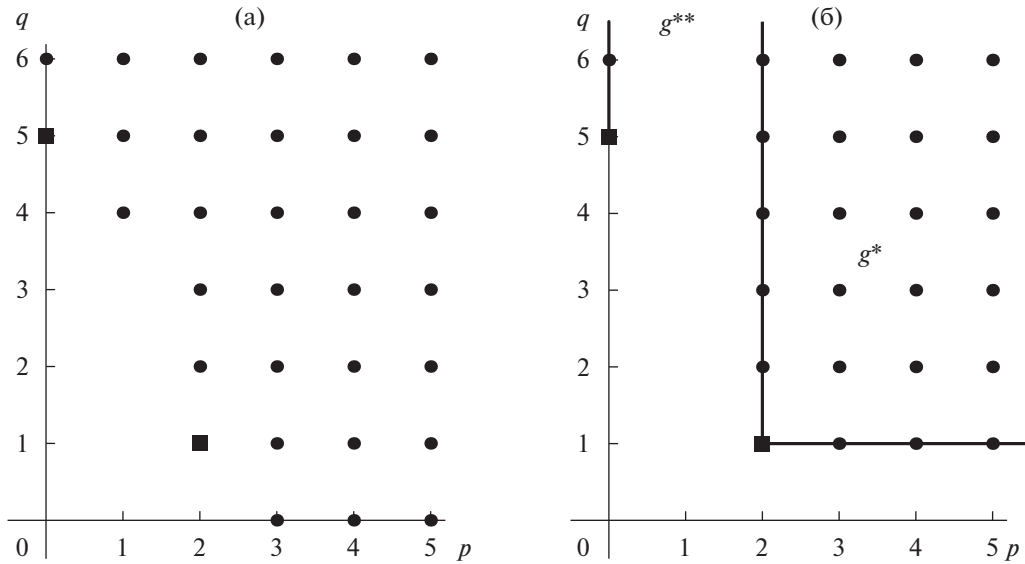
где  $\tau = \text{sign } \beta_m = \pm 1$ . Если  $\beta \equiv 0$ , то  $\tau = 0$ .

Теперь замена

$$w = u_1 \sqrt{\frac{1 + \tilde{\alpha}}{\sqrt[m]{|\beta_m|}}}$$

приводит многочлен к нормальной форме 3 теоремы 2.

На фиг. 3 показаны носители исходного (7) и преобразованного (33) многочленов. Доказательство окончено.



Фиг. 3. Носители исходного (7) (а) и преобразованного (33) (б) многочленов. Случай 3.

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

В ситуациях теоремы 3 нелинейные преобразования координат в доказательстве теоремы 2 не меняют укороченного многочлена  $\hat{f}$  и приводят исходный многочлен к укороченному. Выписанные в формулировке теоремы 3 линейные замены приводят укороченные многочлены к нормальным формам теоремы 2.

Теорема доказана.

#### 5. ПРИМЕР

Вычислим нормальную форму некоторого нетривиального многочлена вблизи его критической точки второго порядка. Кроме этого, определим расположение линий уровня ее нормальной формы вблизи этой критической точки так, как это описано в работе [11, разд. 6.2]. Все дальнейшие вычисления выполнялись в системе компьютерной алгебры (СКА) Maple [8] с использованием процедур из пакетов Groebner, PolyhedralSets и algcurves. Такие же вычисления несложно реализуются в других СКА, например, в Mathematica [12] или в SymPy [10].

В работах [13], [14] изучалась устойчивость в линейном приближении некоторой многопараметрической системы Гамильтона. В процессе исследования был получен многочлен  $g(x, y, z)$  6-го порядка от трех переменных  $x, y, z$  (см. формулу (3.7) в [14]). Здесь исследуем многочлен

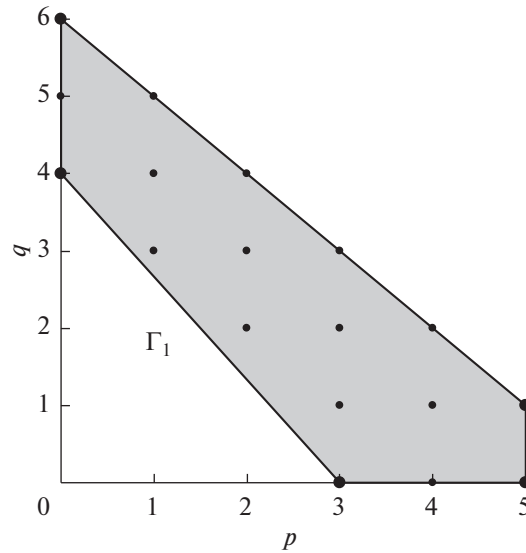
$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y, z)|_{z=0}$ , имеющий следующий вид:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & 64x^3 + 1728yx^2 + 15552y^2x + 46656y^3 + 13x^4 + 412yx^3 + 2782y^2x^2 + 828y^3x - \\
 & - 37827y^4 + 2x^5 + 82yx^4 + 740y^2x^3 + 3156y^3x^2 + 6490y^4x + 20250y^5 + 4yx^5 + \\
 & + 48y^2x^4 + 344y^3x^3 + 1200y^4x^2 + 2500y^5x.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Легко видеть, что многочлен (35) имеет в нуле особую точку 2-го порядка. Если составить полиномиальный идеал

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x, y) - c, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\},$$

а затем вычислить для него базис Грёбнера с чисто лексикографическим порядком  $c \prec y \prec x$ , то можно найти все его критические точки. Для вычисления их порядков надо в них вычислить частные производные до их ненулевых значений.



Фиг. 4. Многоугольник Ньютона  $\Gamma(f)$  многочлена (37).

Вычисления показывают, что имеется две вещественных критических точки  $x_1 = y_1 = 0$  порядка 2 и  $x_2 = -9/2, y_2 = 3/2$  порядка 1, соответствующих критическому значению  $c_1^* = 0$ , а также две вещественных критических точки порядка 1, соответствующих критическим значениям  $c_2^* \approx -476393.035$  и  $c_3^* \approx 51.504$ . Координаты двух последних критических точек являются вещественными корнями многочленов шестой степени, которые здесь не приводятся из-за их громоздкости.

Находим кубическую форму в особой точке 2-го порядка  $x = y = 0$ :

$$f_3(x, y) = 64x^3 + 1728yx^2 + 15552y^2x + 46656y^3 = 64(x + 9y)^3.$$

Тогда замена

$$u = 4(x + 9y), \quad \text{т.е.} \quad x = (u - 9y)/4 \tag{36}$$

приводит ее к нормальной форме 2 (6б). В новых переменных  $(u, y)$  многочлен записывается в следующем виде (промежуточный многочлен):

$$f(u, y) = u^3 - 34992y^4 + 3240uy^3 - \frac{253}{2}u^2y^2 - \frac{7}{8}u^3y + \frac{13}{256}u^4 + 97920y^5 - 11000uy^4 + \tag{37}$$

$$+ 528u^2y^3 - \frac{37}{4}u^3y^2 - \frac{u^4y}{32} + \frac{u^5}{512} - 97344y^6 + 13936uy^5 - 870u^2y^4 + 29u^3y^3 - \frac{33}{64}u^4y^2 + \frac{u^5y}{256}.$$

Как описано, например, в [1], вычислим его носитель  $S(f)$ , найдем его выпуклую оболочку  $\Gamma(f)$  – многоугольник Ньютона – и выделим в нем ребро  $\Gamma_1$ , внешняя нормаль которого лежит в третьем квадранте. Описанные объекты показаны на фиг. 4.

Этому ребру соответствует укороченный многочлен

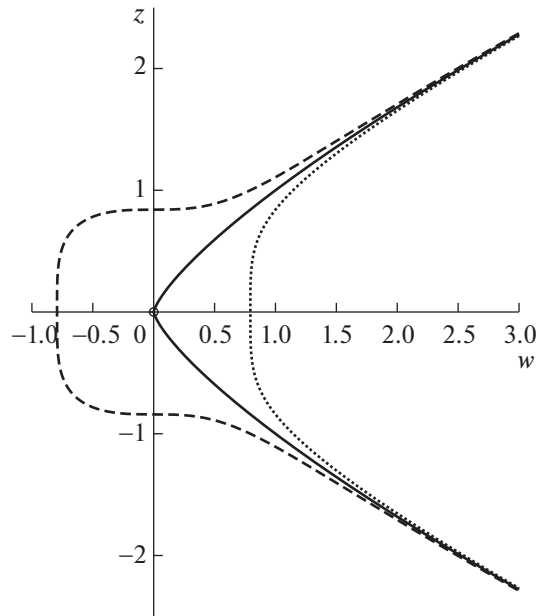
$$\hat{f}(u, y) = u^3 - 34992y^4. \tag{38}$$

Многочлен (38) соответствует виду 2 теоремы 3, следовательно, преобразованием

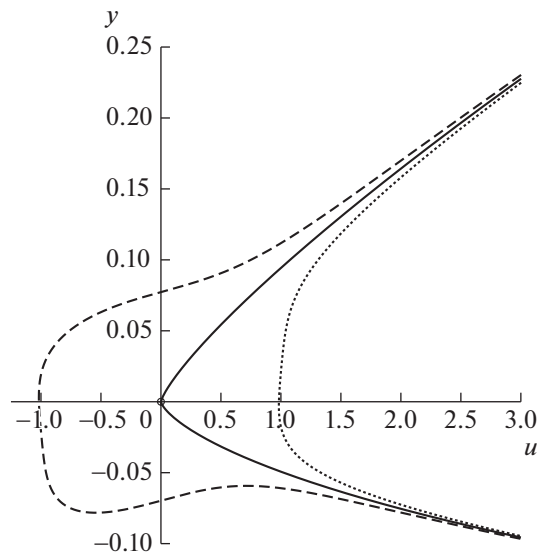
$$u = w, \quad y = \sqrt[4]{34992}z = 64^{3/4}z \tag{39}$$

он приводится к нормальной форме  $g$  вида 2 теоремы 2:

$$g(w, z) = w^3 - z^4. \tag{40}$$



Фиг. 5. Линии уровня нормальной формы (40) для значений  $c = -0.5, 0.0, 0.5$ .



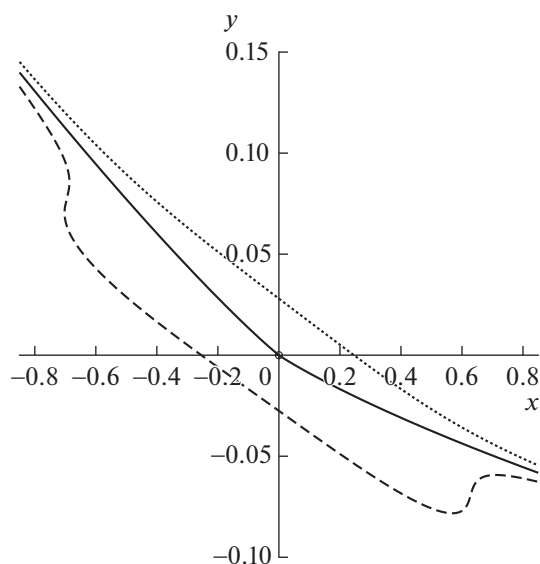
Фиг. 6. Линии уровня промежуточного многочлена (37) для значений  $c = -0.5, 0.0, 0.5$ .

Теперь построим линии уровня  $w^3 - z^4 = c$  нормальной формы (40) вблизи критической точки  $w = z = 0$  для значений  $c = -0.5$ ,  $c = 0$  и  $c = 0.5$ . На фиг. 5 они показаны соответственно штриховой, сплошной и пунктирной линиями.

Отметим, что с помощью пакета `algcurves` СКА Maple можно установить, что кривая  $f(u, y) = 0$  имеет род 0, т.е. допускает рациональную параметризацию

$$u(\tau) = \frac{(8\tau^2 + 420\tau + 8100)\tau^4}{(15\tau + 675)(\tau^2 + 30\tau + 450)^2}, \quad y(\tau) = -\frac{(\tau^2 + 45\tau + 900)\tau^3}{(2\tau + 90)(\tau^2 + 30\tau + 450)^2}.$$

Вид линий уровня  $f(u, y) = c$  для значений  $c = -0.5$ ,  $c = 0$  и  $c = 0.5$  вблизи начала координат показан соответственно штриховой, сплошной и пунктирной линиями на фиг. 6. Нетрудно ви-



Фиг. 7. Линии уровня исходного многочлена (35) для значений  $c = -0.5, 0.0, 0.5$ .

деть, что нормальная форма (40) качественно точно воспроизводит поведение линий уровня промежуточного многочлена (37).

Наконец, покажем на фиг. 7 расположение линий уровня  $f(x, y) = c$  вблизи начала координат исходного многочлена (35) для значений  $c = -0.5$ ,  $c = 0$  и  $c = 0.5$ . С учетом линейных преобразований (36) и (39) фиг. 6 качественно точно дает представление о поведении линий уровня исходного многочлена вблизи критической точки второго порядка.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А.Д., Батхин А.Б. Алгоритмы и программы вычисления корней многочлена от одной или двух неизвестных // Программирование. 2021. № 5. С. 22–43. <https://doi.org/10.31857/S0132347421050046>
2. Haile D.E. On the Clifford algebra of a binary cubic form // American J. of Math. 1984. V. 106. № 6. P. 1269–1280.
3. Арнольд В.И. Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29. № 2. С. 11–49.
4. Кокс Д., Литтл Д., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000. 687 с.
5. Прасолов В.В. Многочлены. 4-е изд., исправленное. М.: МЦНМО, 2014.
6. Калинина Е.А., Утешев А.Ю. Теория исключения: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.
7. Батхин А.Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. Т. 42. № 2. С. 8–21.
8. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. Maple. Version 2019. Waterloo, Ontario, 2019. URL <https://hadoop.apache.org>.
9. Thompson I. Understanding Maple. Cambridge University Press, 2016. 228 p.
10. Meurer A. [et al.]. SymPy: symbolic computing in Python // PeerJ Computer Science. 2017. V. 3. e103. ISSN 2376–5992. <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>.
11. Брюно А.Д., Батхин А.Б., Хайдаров З.Х. Примеры вычисления линий уровня многочленов на плоскости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 98. 36 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-98>
12. Wolfram S. The Mathematica Book. Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p.
13. Брюно А.Д., Батхин А.Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Программирование. 2012. № 2. С. 12–30.
14. Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. № 1. С. 80–133.