

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 629.7

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ТЕЛ  
В ПЛОСКОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ  
МЕТОДОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

© 2023 г. С. А. Гутник<sup>1,2,\*</sup>, В. А. Сарычев<sup>3,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119454 Москва, пр-т Вернадского, 76, МГИМО МИД России, Россия

<sup>2</sup> 141701 Долгопрудный, М. о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

<sup>3</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

\*e-mail: s.gutnik@inno.mgimo.ru

\*\*e-mail: vas31@rambler.ru

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.

Переработанный вариант 25.04.2022 г.

Принята к публикации 17.09.2022 г.

Методы компьютерной алгебры применяются для определения равновесных ориентаций системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, движущихся в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите под действием гравитационного момента. Главное внимание уделяется изучению равновесных ориентаций связки двух тел в плоскости круговой орбиты. С применением символического дифференцирования были получены дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Лагранжа II рода. Предложен метод преобразования системы тригонометрических уравнений, определяющих равновесия, в систему алгебраических уравнений, которая, в свою очередь, путем вычисления результата была сведена к одному алгебраическому уравнению 12 степени от одной неизвестной. Корни полученного алгебраического уравнения определяют равновесные ориентации связки двух тел в плоскости круговой орбиты. Проведена символическая факторизация полученного алгебраического уравнения на три полиномиальных множителя, каждый из которых задает определенный класс равновесных конфигураций. Классификация областей с равным числом положений равновесия выполнялась с использованием алгебраических методов построения дискриминантной гиперповерхности. Уравнения дискриминантной гиперповерхности, которая определяет границы областей с равным числом положений равновесия в пространстве параметров задачи, были получены с использованием символических вычислений определителя матрицы результата. Число положений равновесия системы двух тел в зависимости от параметров определялось путем численного анализа действительных корней полученных алгебраических уравнений. Библ. 16. Фиг. 2.

**Ключевые слова:** система двух тел, круговая орбита, уравнения Лагранжа, положения равновесия, алгебраические уравнения, компьютерная алгебра, результат, дискриминантная гиперповерхность.

DOI: 10.31857/S0044466923010088, EDN: LMDVUO

## ВВЕДЕНИЕ

В работе представлены результаты исследования положений равновесия системы двух тел (спутник-стабилизатор), соединенных сферическим шарниром, движущейся по круговой орбите в центральном гравитационном поле с применением методов компьютерной алгебры.

Исследование равновесных ориентаций связки тел, движущихся в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите, представляет значительный практический интерес для создания составных схем гравитационной системы ориентации спутников, которые могут функционировать на орбите продолжительное время без расходования энергии и рабочего тела. Действие стабилизатора на спутник позволяет получить новые положения равновесия системы двух тел и ввести диссипацию в систему, что представляет большой интерес для практики. Подробное рассмотрение динамики различных типов составных схем гравитационных систем ориентации представлено в [1].

В работе [2] главное внимание было уделено исследованию существования равновесных ориентаций системы двух тел в случаях, когда одна из главных осей инерции как первого, так и второго тела совпадает с нормалью к плоскости орбиты, радиусом-вектором или касательной к орбите. Для определения равновесных ориентаций связки двух тел проводилась декомпозиция системы 12 алгебраических уравнений на ряд подсистем. Для решения каждой из подсистем алгебраических уравнений применялись алгоритмы построения базисов Гребнера. В [2] также представлен обзор результатов последних исследований по данной теме.

В работе [3] был получен широкий класс пространственных равновесных ориентаций системы спутник-стабилизатор с использованием комбинации методов компьютерной и линейной алгебры при определенных ограничениях на параметры задачи в случае, когда сферический шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции спутника и стабилизатора.

В работе [4] исходная система 12 алгебраических уравнений, определяющая равновесия системы двух тел, была решена с применением методов построения базисов Гребнера для такой комбинации значений инерциальных и геометрических параметров двух тел, при которой коэффициенты алгебраической системы, определяющей равновесные ориентации, зависят только от одного параметра.

Задача нахождения всех пространственных положений равновесия двух соединенных сферическим шарниром тел на круговой орбите в общем виде до сих пор не решена. Подробное исследование задачи о пространственных положениях равновесия системы двух связанных осесимметричных тел проведено в работе [5].

Динамика движения двух соединенных шарниром тел в плоскости круговой орбиты в случае, когда сферический шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции спутника и стабилизатора, исследовалась в работах [6]–[10].

В работе [11] проведено исследование равновесных ориентаций системы двух связанных тел в плоскости перпендикулярной плоскости круговой орбиты в случае, когда сферический шарнир расположен на линии пересечения двух плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и стабилизатора. Для исследования равновесных ориентаций применялся метод редукции полиномов с использованием символьного вычисления результата.

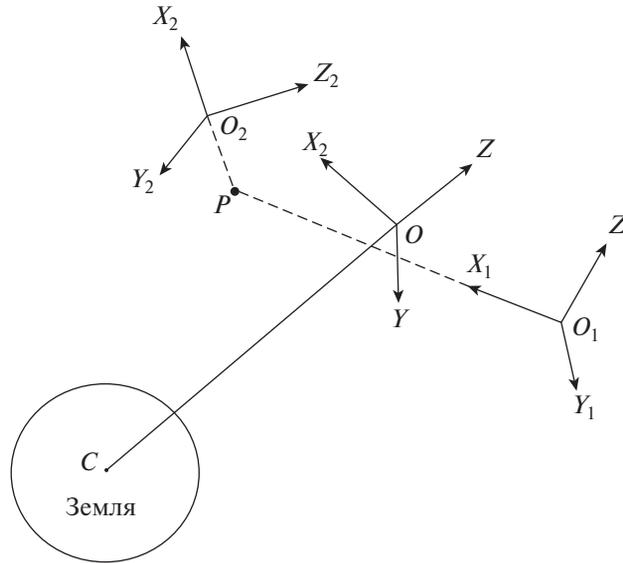
Основное внимание в представленной работе уделяется исследованию равновесных ориентаций связки двух тел в плоскости круговой орбиты, когда сферический шарнир расположен на линии пересечения двух плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и стабилизатора. Для исследования равновесных ориентаций примененный в работе [11], сводящийся к преобразованию системы тригонометрических уравнений, определяющих положения равновесия в систему алгебраических уравнений, для решения которой применялись символьные методы вычисления определителей матриц результатов.

Классификация областей с равным числом положений равновесия выполнялась с применением алгебраических методов построения дискриминантной гиперповерхности. Число положений равновесия системы двух тел в зависимости от параметров определялось путем численного анализа действительных корней полученных алгебраических уравнений.

## 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу о движении системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, по круговой орбите [11]. Для записи уравнений движения системы двух тел введем следующие правые системы координат (фиг. 1):  $OXYZ$  – орбитальная система координат; ось  $OZ$  направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центр масс  $C$  Земли и центр масс  $O$  системы двух тел; ось  $OX$  направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс  $O$ , ось  $OY$  совпадает с нормалью к плоскости орбиты. Оси систем координат  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$  направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника и стабилизатора соответственно (фиг. 1). Ориентацию системы координат  $O_ix_iy_iz_i$  относительно орбитальной системы координат определим с использованием самолетных углов тангажа  $\alpha_i$ , рыскания  $\beta_i$  и крена  $\gamma_i$  (см. [1])

$$\begin{aligned} a_{11}^{(i)} &= \cos \alpha_i \cos \beta_i, \\ a_{12}^{(i)} &= \sin \alpha_i \sin \gamma_i - \cos \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i, \\ a_{13}^{(i)} &= \sin \alpha_i \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i, \end{aligned}$$



Фиг. 1. Основные системы координат.

$$\begin{aligned}
 a_{21}^{(i)} &= \sin \beta_i, \\
 a_{22}^{(i)} &= \cos \beta_i \cos \gamma_i, \\
 a_{23}^{(i)} &= -\cos \beta_i \sin \gamma_i, \\
 a_{31}^{(i)} &= -\sin \alpha_i \cos \beta_i, \\
 a_{32}^{(i)} &= \cos \alpha_i \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i, \\
 a_{33}^{(i)} &= \cos \alpha_i \cos \gamma_i - \sin \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Индекс  $i = 1$  ( $i = 2$ ) относится к телу 1 – спутнику (телу 2, стабилизатору).

Пусть  $(a_i, b_i, c_i)$  – координаты сферического шарнира  $P$  в связанной с телом системе координат  $O_i x_i y_i z_i$ ;  $A_i, B_i, C_i$  – главные центральные моменты инерции тел,  $M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ ;  $M_i$  – масса  $i$ -го тела. Рассмотрим случай, когда шарнир расположен на линии пересечения двух плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и стабилизатора, когда  $b_1 = b_2 = 0$  и равновесные ориентации системы двух тел находятся в плоскости орбиты ( $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ). Тогда координаты сферического шарнира в связанных с каждым телом системе координат будут иметь значения  $(a_1, 0, c_1)$  и  $(a_2, 0, c_2)$ . В этом случае имеют место выражения для кинетической энергии

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}[B_1 + M(a_1^2 + c_1^2)](\dot{\alpha}_1 + \omega_0)^2 + \frac{1}{2}[B_2 + M(a_2^2 + c_2^2)](\dot{\alpha}_2 + \omega_0)^2 - \\
 &- M[(a_1 a_2 + c_1 c_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - (a_1 c_2 - a_2 c_1) \sin(\alpha_1 - \alpha_2)](\dot{\alpha}_1 + \omega_0)(\dot{\alpha}_2 + \omega_0)
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

и силовой функции

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{3}{2} M \omega_0^2 [(a_1 \sin \alpha_1 - c_1 \cos \alpha_1) - (a_2 \sin \alpha_2 - c_2 \cos \alpha_2)]^2 - \frac{3}{2} \omega_0^2 (A_1 - C_1) \sin^2 \alpha_1 - \\
 &- \frac{3}{2} \omega_0^2 (A_2 - C_2) \sin^2 \alpha_2 + M \omega_0^2 [(a_1 a_2 + c_1 c_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - (a_1 c_2 - a_2 c_1) \sin(\alpha_1 - \alpha_2)].
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Используя выражения для кинетической энергии (1.2) и силовой функции (1.3), определяющей действие гравитационного поля Земли на систему двух тел, уравнения движения этой систе-

мы можно записать в форме уравнений Лагранжа II рода, используя возможности символьного дифференцирования в системе Mathematica 12.1 [12], в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & (B_1 + M(a_1^2 + c_1^2))\ddot{\alpha}_1 - M((a_1a_2 + c_1c_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - (a_1c_2 - a_2c_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_2))\ddot{\alpha}_2 - \\
 & - M((a_1a_2 + c_1c_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + (a_1c_2 - a_2c_1)\cos(\alpha_1 - \alpha_2))(\dot{\alpha}_2^2 + 2\dot{\alpha}_2) + \\
 & + 3(A_1 - C_1)\sin\alpha_1\cos\alpha_1 - 3M(a_1\cos\alpha_1 + c_1\sin\alpha_1)(a_1\sin\alpha_1 - c_1\cos\alpha_1) - \\
 & - (a_2\sin\alpha_2 - c_2\cos\alpha_2) = 0, \tag{1.4} \\
 & - M((a_1a_2 + c_1c_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - (a_1c_2 - a_2c_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_2))\ddot{\alpha}_1 + (B_2 + M(a_2^2 + c_2^2))\ddot{\alpha}_2 + \\
 & + 3(A_2 - C_2)\sin\alpha_2\cos\alpha_2 + M((a_1a_2 + c_1c_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + (a_1c_2 - a_2c_1)\cos(\alpha_1 - \alpha_2))(\dot{\alpha}_1^2 + 2\dot{\alpha}_1) + \\
 & + 3M(a_2\cos\alpha_2 + c_2\sin\alpha_2)(a_1\sin\alpha_1 - c_1\cos\alpha_1) - (a_2\sin\alpha_2 - c_2\cos\alpha_2) = 0.
 \end{aligned}$$

В уравнениях (1.4) точкой обозначено дифференцирование по  $\tau = \omega_0 t$ , где  $t$  – время.

## 2. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Положив в уравнениях (1.4)  $\alpha_1 = \text{const}$ ,  $\alpha_2 = \text{const}$ , получим при условиях  $A_i \neq B_i \neq C_i$  уравнения

$$\begin{aligned}
 & ((A_1 - C_1)/M)\sin\alpha_1\cos\alpha_1 - (a_1\cos\alpha_1 + c_1\sin\alpha_1)(a_1\sin\alpha_1 - c_1\cos\alpha_1) + \\
 & + (a_1\cos\alpha_1 + c_1\sin\alpha_1)(a_2\sin\alpha_2 - c_2\cos\alpha_2) = 0, \tag{2.1} \\
 & ((A_2 - C_2)/M)\sin\alpha_2\cos\alpha_2 - (a_2\cos\alpha_2 + c_2\sin\alpha_2)(a_2\sin\alpha_2 - c_2\cos\alpha_2) + \\
 & + (a_2\cos\alpha_2 + c_2\sin\alpha_2)(a_1\sin\alpha_1 - c_1\cos\alpha_1) = 0,
 \end{aligned}$$

позволяющие определить положения равновесия системы спутник-стабилизатор в орбитальной системе координат в плоскости орбиты. Тригонометрическую систему уравнений (2.1) относительно двух неизвестных самолетных углов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  аналитически решить не удастся.

Для решения системы (2.1) воспользуемся следующей универсальной заменой синусов и косинусов углов  $\alpha_i$  и  $\alpha_2$  через их тангенсы:

$$\sin\alpha_i = \frac{\text{tg}\alpha_i}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha_i}} = \frac{t_i}{\sqrt{1 + t_i^2}}, \quad \cos\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha_i}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t_i^2}}, \tag{2.2}$$

где  $t_i = \text{tg}\alpha_i$ .

Подставляя выражения (2.2) в уравнения системы (2.1) и вводя обозначения  $d_1 = (A_1 - C_1)/M$ ,  $d_2 = (A_2 - C_2)/M$ , получаем два уравнения от двух неизвестных  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\begin{aligned}
 & d_1 t_1 - (a_1 + c_1 t_1)(a_1 t_1 - c_1) = (a_1 + c_1 t_1)(c_2 - a_2 t_2) \frac{\sqrt{1 + t_1^2}}{\sqrt{1 + t_2^2}}, \\
 & d_2 t_2 - (a_2 + c_2 t_2)(a_2 t_2 - c_2) = (a_2 + c_2 t_2)(c_1 - a_1 t_1) \frac{\sqrt{1 + t_2^2}}{\sqrt{1 + t_1^2}}. \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

Систему уравнений (2.3) можно упростить. Для этого сначала умножим левую (правую) часть первого уравнения (2.3) на левую (правую) часть второго уравнения, а затем разделим левую (правую) часть первого уравнения (2.3) на левую (правую) часть второго уравнения соответственно. В результате получим алгебраическую систему двух уравнений относительно двух неизвестных  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\bar{a}_0 t_1^3 + \bar{a}_1 t_1^2 + \bar{a}_2 t_1 + \bar{a}_3 = 0, \quad \bar{b}_0 t_1^2 + \bar{b}_1 t_1 + \bar{b}_2 = 0, \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{a}_0 &= c_1(c_2(a_1^2 - a_2^2)t_2^3 + a_2(a_1^2 - a_2^2 + 2c_2^2 + d_2)t_2^2 + c_2(a_1^2 - c_2^2 + 2a_2^2 - d_2)t_2 + a_2(a_1^2 - c_2^2)), \\ \bar{a}_1 &= a_1(c_2(a_1^2 - a_2^2 - 2c_1^2 - d_1)t_2^3 + a_2(a_1^2 - a_2^2 - 2c_1^2 + 2c_2^2 - d_1 + d_2)t_2^2 + \\ &\quad + c_2(a_1^2 + 2a_2^2 - 2c_1^2 - c_2^2 - d_1 - d_2)t_2 + a_2(a_1^2 - 2c_1^2 - c_2^2 - d_1)), \\ \bar{a}_2 &= c_1(c_2(c_1^2 - a_2^2 - 2a_1^2 + d_1)t_2^3 + a_2(c_1^2 - a_2^2 - 2a_1^2 + 2c_2^2 + d_1 + d_2)t_2^2 - \\ &\quad - c_2(2a_1^2 - 2a_2^2 - c_1^2 + c_2^2 - d_1 + d_2)t_2 - a_2(2a_1^2 - c_1^2 + c_2^2 - d_1)), \\ \bar{a}_3 &= a_1(c_2(c_1^2 - a_2^2)t_2^3 - a_2(a_2^2 - c_1^2 - 2c_2^2 - d_2)t_2^2 + c_2(2a_2^2 + c_1^2 - c_2^2 - d_2)t_2 + a_2(c_1^2 - c_2^2)), \\ \bar{b}_0 &= a_1c_1d_2t_2, \quad \bar{b}_1 = a_2c_2d_1t_2^2 + ((a_2^2 - c_2^2)d_1 + (a_1^2 - c_1^2)d_2 - d_1d_2)t_2 - a_2c_2d_1, \quad \bar{b}_2 = -a_1c_1d_2t_2.\end{aligned}$$

Исключая из системы (2.4)  $t_1$  с использованием понятия результата [13], [14] в системе Wolfram Mathematica алгебраическое уравнение 12 порядка относительно переменной  $t_2$ , которое после факторизации представляет собой произведение трех полиномов

$$P(t_2) = P_1(t_2)P_2(t_2)P_3(t_2) = 0, \quad (2.5)$$

где  $P_1(t_2)$  и  $P_2(t_2)$  полиномы второго порядка и имеют следующий вид:

$$P_1(t_2) = a_1c_1d_1(a_2t_2 - c_2)^2 = 0, \quad (2.6)$$

$$P_2(t_2) = a_2c_2t_2^2 + (a_2^2 - c_2^2 + d_2)t_2 + a_2c_2 = 0, \quad (2.7)$$

$P_3(t_2)$  — является полиномом 8 порядка

$$P_3(t_2) = p_0t_2^8 + p_1t_2^7 + p_2t_2^6 + p_3t_2^5 + p_4t_2^4 + p_5t_2^3 + p_6t_2^2 + p_7t_2 + p_8 = 0, \quad (2.8)$$

коэффициенты которого представляют собой полиномы от шести параметров системы  $a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ :

$$\begin{aligned}p_0 &= c_2^4d_1^2(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - c_1^2), \\ p_1 &= 2a_2c_2^3d_1(d_2(a_1^2 - c_1^2)(a_1^2 - a_2^2 + c_1^2) + d_1(2a_2^2(a_1^2 - a_2^2) + c_1^2(c_2^2 - a_1^2 - d_2) + (2a_2^2 - a_1^2)(c_1^2 + c_2^2 + d_2))), \\ p_2 &= c_2^2(d_2^2(a_1^2 - a_2^2 + c_1^2)(a_1^2 + c_1^2)^2 + 2d_1d_2(a_1^2 - c_1^2)(3a_2^2(a_1^2 - a_2^2 + c_1^2 + c_2^2 + d_2) - \\ &\quad - (a_1^2 + c_1^2)(c_2^2 + d_2)) + d_1^2(6a_2^4(a_1^2 - a_2^2) + c_1^2(c_2^2 + d_2)^2 - a_1^2a_2^2(7c_2^2 + 6c_1^2 + 6d_2) + 2a_2^4(8c_2^2 + \\ &\quad + 3c_1^2 + 6d_2) + a_1^2(c_2^4 - 2c_1^2c_2^2 + 2c_2^2d_2 + d_2^2) - a_2^2(6c_2^4 + 7c_1^2c_2^2 + 6d_2(c_1^2 + c_2^2) + 6d_2^2))), \\ p_3 &= 2a_2c_2(d_2^2(a_1^2 - a_2^2 + c_1^2 + c_2^2 + d_2)(a_1^2 + c_1^2)^2 + d_1(d_2(a_1^2 - c_1^2)(3a_1^2a_2^2 - 3(a_2^2 - d_2)^2 + 2d_2(a_1^2 - c_1^2) - \\ &\quad - 2c_1^2(a_1^2 + c_1^2) - 3c_2^2(c_2^2 + 2d_2) + 3a_2^2(c_1^2 + 3c_2^2)) + d_1^2((c_1^2 + 2c_2^2 + 2d_2)(c_2^2 + d_2)^2 - 2a_2^6 + a_1^2(2a_2^4 - \\ &\quad - 2a_2^2c_1^2 - 4a_2^2c_2^2 - 3a_2^2d_2 - 4c_1^2c_2^2 + c_2^4 + 2c_2^2d_2 + d_2^2) - a_2^2(4c_2^2(c_1^2 + 3c_2^2) + 3d_2(c_1^2 + 6c_2^2) + 6d_2^2))), \\ p_4 &= d_2^2(a_1^2 + c_1^2)^2(a_1^2a_2^2 - (a_2^2 - c_2^2)^2 + 2d_2(a_2^2 - c_2^2) + a_2^2(c_1^2 + 2c_2^2) + c_2^2(a_1^2 + c_1^2) - d_2^2) + \\ &\quad + d_1(2d_2(a_1^2 - c_1^2)(a_2^2 - c_2^2 - d_2)(a_1^2(a_2^2 + c_2^2) + a_2^2(c_1^2 + 8c_2^2 + 2d_2) + c_1^2c_2^2 - (c_2^2 + d_2)^2 - a_2^4) + \\ &\quad + d_1^2(a_2^6(c_1^2 + 16c_2^2 + 4d_2) - a_2^8 - (c_2^4 - c_1^2c_2^2 + 2c_2^2d_2 + d_2^2)(c_2^2 + d_2)^2 - 2a_2^4((c_2^2 + d_2)(c_1^2 + 18c_2^2) + \\ &\quad + 3d_2^2) + a_2^2(4d_2^2 + 36c_2^4d_2 - 2c_2^4(c_1^2 - 8c_2^2) + d_2^2(c_1^2 + 24c_2^2)) + a_1^2(a_2^6 - a_2^4(c_1^2 + 2c_2^2 + 2d_2) + \\ &\quad + c_2^2(c_2^4 - c_1^2c_2^2 + 2c_2^2d_2 + d_2^2) + a_2^2(d_2^2 - 2c_2^4 - 12c_1^2c_2^2))), \\ p_5 &= 2a_2c_2(d_2^2(a_1^2 + a_2^2 + c_1^2 - c_2^2 - d_2)(a_1^2 + c_1^2)^2 + d_1(d_2(a_1^2 - c_1^2)(2(a_1^2 + c_1^2)(a_2^2 - d_2) + \\ &\quad + 3(a_2^2 - d_2)^2 - 3c_2^2(a_1^2 + 3a_2^2 + c_1^2 - c_2^2 - 2d_2)) + d_1^2(2a_2^6 + a_2^4(c_1^2 - 12c_2^2 - 6d_2) - \\ &\quad - (2c_2^4 - 2c_1^2c_2^2 + 4c_2^2d_2 - c_1^2d_2 + 2d_2^2)(c_2^2 + d_2) + 2a_2^2(6c_2^4 - 2c_1^2c_2^2 + 9c_2^2d_2 - c_1^2d_2 + 3d_2^2) + \\ &\quad + a_1^2(a_2^4 + d_2^2 + c_2^2(2c_2^2 - 2c_1^2 + 3d_2) - 2a_2^2(2c_1^2 + 2c_2^2 + d_2))))),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_6 &= a_2^2(a_2^2(a_1^2 + c_1^2 - c_2^2)(a_1^2 + c_1^2)^2 + 2d_1d_2(a_1^2 - c_1^2)(a_1^2(a_2^2 - 3c_2^2 - d_2) + a_2^2(c_1^2 - 3c_2^2) + 3c_2^4 - \\
&\quad - 3c_1^2c_2^2 + 3c_2^2d_2 - c_1^2d_1) + d_1^2(a_1^2(a_2^4 + d_2^2 + 6c_2^2d_2 - 6c_1^2c_2^2 + 6c_2^4 - a_2^2(2c_1^2 + 7c_2^2 + 2d_2)) + \\
&\quad + a_2^2(16c_2^4 - 7c_1^2c_2^2 + 12c_2^2d_2 - 2c_1^2d_1) + a_2^4(c_1^2 - 6c_2^2) - 6c_2^2(c_2^2 + d_2)(c_2^2 - c_1^2 + d_2) + c_1^2d_2^2)), \\
p_7 &= -2a_2^3c_2d_1(d_2(a_1^2 - c_1^2)(a_1^2 + c_1^2 - c_2^2) + d_1(a_1^2(a_2^2 - d_2) + c_1^2(2a_1^2 + a_2^2 - d_2) - \\
&\quad - 2c_2^2(a_1^2 + a_2^2 + c_1^2 - c_2^2 - d_2))), \\
p_8 &= -a_2^4d_1^2(a_1^2 - c_2^2)(c_1^2 - c_2^2).
\end{aligned}$$

По определению результата каждому корню  $t_2$  уравнения (2.5) соответствует один общий корень  $t_1$  системы (2.4). Число действительных корней полученного алгебраического уравнения четно и не превышает 12. Подставляя значение действительного корня  $t_2$  алгебраического уравнения (2.5) в уравнения системы (2.4), найдем совпадающий корень  $t_1$  этих уравнений.

Можно показать, что каждому действительному корню уравнений (2.4) и (2.5) соответствуют 4 равновесных решения исходной системы (2.1). Так как общее число действительных корней уравнения (2.5) не превышает 12, то система двух связанных тел спутник–стабилизатор в плоскости орбиты может иметь не более 48 равновесных ориентаций в орбитальной системе координат. Используя уравнения (2.4)–(2.8) для каждого набора системных параметров, мы можем определить все плоские равновесные ориентации системы спутник–стабилизатор в орбитальной системе координат.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Уравнения (2.4)–(2.8) позволяют определить все равновесные ориентации системы спутник–стабилизатор, движущейся по круговой орбите при заданных значениях параметров  $a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ .

Проведем подробное исследование решений системы алгебраических уравнений (2.6)–(2.8). В случае  $P_1(t_2) = 0$  имеет место кратный корень  $\operatorname{tg} \alpha_2 = c_2/a_2$ . Величину  $\operatorname{tg} \alpha_1$  находим из квадратного уравнения (2.4), при значениях параметров, обеспечивающих условие неотрицательности его дискриминанта. Из вида коэффициентов второго уравнения системы (2.4) следует, что дискриминант этого уравнения представляет собой сумму квадратов двух величин и не отрицателен при любых значениях параметров задачи.

Уравнение (2.7)  $P_2(t_2) = 0$  при условии существования двух действительных корней определяет два значения  $\operatorname{tg} \alpha_2$ . Величину  $\operatorname{tg} \alpha_1$  находим из квадратного уравнения (2.4). Заметим, что равновесные решения в этом случае определяются только геометрическими и инерционными характеристиками второго тела.

Для исследования числа положений равновесия системы спутник–стабилизатор в случае  $P_3(t_2) = 0$  определим в пространстве 6 параметров области с одинаковым числом вещественных корней этого алгебраического уравнения 8 порядка. Для этого выделим в пространстве параметров области с одинаковым числом вещественных корней уравнения (2.7) путем построения дискриминантной гиперповерхности полинома  $P_3(t_2)$ . Эта гиперповерхность содержит компоненту коразмерности 1, которая является границей областей с одинаковым числом вещественных корней. Множество особых точек дискриминантной гиперповерхности в пространстве параметров задается следующей системой алгебраических уравнений:

$$P_3(t_2) = 0, \quad P_3'(t_2) = 0. \quad (3.1)$$

Символ “штрих” обозначает дифференцирование по переменной  $t_2$ .

Исключая переменную из системы (3.1) путем символического вычисления определителя матрицы результата 15-го порядка уравнений (3.1) с использованием матричных функций системы Wolfram Mathematica, получим выражение для гиперповерхности, которое имеет очень громоздкий вид и в данной статье не приводится.

Другим способом определить число действительных корней полинома можно путем вычисления  $i$ -х субдискриминантов [15], [16].

Рассмотрим несколько более простых случаев.

**Случай 1:**  $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = a$ . В этом случае, перейдя к новым параметрам в уравнении (2.4)  $d_{01} = (B_1 - A_1)/Ma^2$  и  $d_{02} = (B_2 - A_2)/Ma^2$ , получим из уравнения (2.8) алгебраическое уравнение 4 степени

$$P_4(t_2) = p_{00}t_2^4 + p_{01}t_2^3 + p_{02}t_2^2 + p_{03}t_2 + p_{04} = 0, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} p_{00} &= 4(d_{01}d_{02} + d_{01} - d_{02})(d_{01}d_{02} + d_{01} + d_{02}), & p_{01} &= -4(d_{02} + 2)(d_{01}^2d_{02}^2 - d_{01}^2d_{02} - 2d_{01}^2 + 2d_{02}^2), \\ p_{02} &= (d_{01}^2d_{02}^4 + 4d_{02}^4 - 16d_{01}^2d_{02}^2 + 24(d_{01}^2 - d_{02}^2)), & p_{03} &= 4(d_{02} - 2)(d_{01}^2d_{02}^2 + d_{01}^2d_{02} - 2d_{01}^2 + 2d_{02}^2), \\ p_{04} &= 4(d_{01}d_{02} - d_{01} - d_{02})(d_{01}d_{02} - d_{01} + d_{02}). \end{aligned}$$

Определим теперь условия существования действительных корней уравнения (3.2). Для этого вычислим дискриминант полинома  $P_4(t_2)$ , который задает на плоскости  $d_{01}, d_{02}$ , уравнение дискриминантной кривой. Границы областей с равным числом действительных корней на плоскости параметров  $d_{01}, d_{02}$ , определяются следующей системой алгебраических уравнений:

$$P_4(t_2) = 0, \quad P_4'(t_2) = 0. \tag{3.3}$$

Исключим переменную  $t_2$  из системы (3.3) путем символического вычисления определителя результата этих уравнений и получим уравнение дискриминантной кривой в виде

$$P_5(d_{01}, d_{02}) = 1024d_{02}^{12}P_6(d_{01}, d_{02})P_7(d_{01}, d_{02})P_8(d_{01}, d_{02}) = 0. \tag{3.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_6(d_{01}, d_{02}) &= (d_{01}^2(d_{02} + 1)^2 - d_{02}^2), & P_7(d_{01}, d_{02}) &= ((d_{01}^2d_{02}^2 + 4(d_{01} - d_{02})^2)((d_{01}^2d_{02}^2 + 4(d_{01} + d_{02})^2)), \\ P_8(d_{01}, d_{02}) &= (d_{01}^4(d_{02}^2 + 8)^2 + 16d_{01}^2d_{02}^2(d_{02}^2 + 10) + 64(d_{02}^4 - 108)). \end{aligned}$$

Проверим теперь, как изменяется число равновесных решений при пересечении одной из кривых (3.4). Это можно сделать численно, определив число действительных решений в одной точке из каждой области, ограниченной кривыми (3.4) на плоскости  $(d_{01}, d_{02})$ . Численный анализ показал, что только кривая  $P_8(d_{01}, d_{02})$  разделяет области с различным числом действительных корней уравнения (3.2). При пересечении границ кривых заданными уравнениями  $P_6(d_{01}, d_{02}) = 0$  и  $P_7(d_{01}, d_{02}) = 0$  смены числа действительных корней уравнения (3.2) не происходит. На фиг. 2 показаны области с одинаковым числом действительных решений уравнения (3.2), равным 4 и 2, где существуют 16 и 8 равновесных ориентаций системы двух связанных тел соответственно. Границы этих областей задаются уравнением  $P_8(d_{01}, d_{02}) = 0$ . Кривые границ областей на фиг. 2 построены с использованием функции *ContourPlot* в системе *Wolfram Mathematica*.

Таким образом, для случая 1  $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = a$  существуют только 16 и 8 равновесных ориентаций системы спутник-стабилизатор в орбитальной системе координат в плоскости орбиты.

**Случай 2:**  $a_1 \neq 0; a_2 \neq 0; c_1 \neq 0; c_2 = 0$ . В этом случае уравнения (2.1) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} (d_1 - a_1^2 + c_1^2) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + a_1c_1(\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1) + a_2(a_1 \cos \alpha_1 + c_1 \sin \alpha_1) \sin \alpha_2 &= 0, \\ \cos \alpha_2 [(d_2 - a_2^2) \sin \alpha_2 + a_2(a_1 \sin \alpha_1 - c_1 \cos \alpha_1)] &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

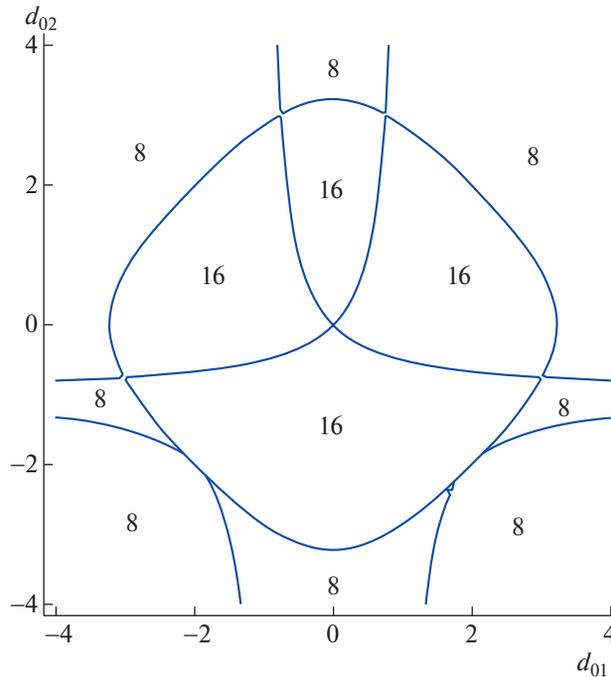
Из второго уравнения (3.5) следуют два случая:

$$\cos \alpha_2 = 0 \quad (\sin^2 \alpha_2 = 1), \tag{3.6}$$

$$\sin \alpha_2 = -\frac{a_2}{(d_2 - a_2^2)}(a_1 \sin \alpha_1 - c_1 \cos \alpha_1) \quad (\text{при } d_2 \neq a_2^2). \tag{3.7}$$

В случае (3.6) первое уравнение перепишем в виде

$$(d_1 - a_1^2 + c_1^2) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + a_1c_1(\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1) = \mp a_2(a_1 \cos \alpha_1 + c_1 \sin \alpha_1),$$



Фиг. 2. Области с равным числом положений равновесия в плоскости орбиты.

после чего, проведя универсальную замену (2.2) синуса и косинуса угла  $\alpha_1$  через тангенс, получим алгебраическое уравнение 4 порядка относительно  $t_1 = \text{tg}\alpha_1$

$$P_9(t_1) = c_1^2(a_1^2 - a_2^2)t_1^4 - 2a_1c_1(a_2^2 - a_1^2 + c_1^2 + d_1)t_1^3 + ((c_1^2 - a_1^2 + d_1)^2 - a_1^2a_2^2 - 2a_1^2c_1^2 - a_2^2c_1^2)t_1^2 - 2a_1c_1(a_1^2 + a_2^2 - c_1^2 - d_1)t_1 + a_1^2(c_1^2 - a_2^2) = 0. \quad (3.8)$$

Из вида уравнения (3.8) следует, что число его действительных корней не превышает 4, а следовательно, число различных положений равновесия системы двух связанных тел не превышает, как и в предыдущем случае 16.

Рассмотрим теперь случай (3.7). Подставляя значения  $\sin \alpha_2$  из (3.7) в первое уравнение системы (3.5) получим однородное тригонометрическое уравнение, которое преобразуется в квадратное относительно  $\text{tg} \alpha_1$ , с учетом того, что  $\cos \alpha_2 \neq 0$

$$a_1c_1d_2 \text{tg}^2 \alpha_1 + [a_1^2d_2 + a_2^2d_1 - (d_1 + c_1^2)d_2] \text{tg} \alpha_1 - a_1c_1d_2 = 0. \quad (3.9)$$

Из вида коэффициентов уравнения (3.9) следует, что дискриминант этого уравнения представляет собой сумму квадратов двух величин и не отрицателен при допустимых для случая (3.7) значениях параметров задачи ( $d_2 \neq a_2^2$ ). Отсюда получается, что уравнение (3.9) имеет два действительных корня, а следовательно, для случая (3.7) существует 8 различных положений равновесия системы двух связанных тел.

Другие 3 случая, когда один из параметров  $a_1$ ,  $a_2$  или  $c_1$  равны нулю, рассматриваются аналогично случаю 2 и подробно будут исследованы в отдельной статье.

**Случай 3.**  $a_1 \neq 0$ ;  $a_2 \neq 0$ ;  $c_1 = 0$ ;  $c_2 = 0$ . Уравнения (2.1) в этом случае упрощаются и их можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 [((A_1 - C_1)/M) - a_1^2] \sin \alpha_1 + a_1 a_2 \sin \alpha_2 &= 0, \\ \cos \alpha_2 [((A_2 - C_2)/M) - a_2^2] \sin \alpha_2 + a_1 a_2 \sin \alpha_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.10) определяют равновесные ориентации системы двух связанных тел в плоскости орбиты, когда сферический шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции спутника и стабилизатора.

Если уравнения (3.10) переписать с учетом введения новых параметров  $m_1 = a_1 a_2 / [(A_1 - C_1)/M - a_1^2]$  и  $m_2 = a_1 a_2 / [(A_2 - C_2)/M - a_2^2]$ , то в результате можно получить, что система (3.10) имеет следующие 4 типа решений:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 = 0, \quad \sin \alpha_2 = 0, \quad \cos \alpha_1 = 0, \quad \cos \alpha_2 = 0, \\ \cos \alpha_1 = 0, \quad (\sin \alpha_1 + m_2 \sin \alpha_2) = 0, \quad \cos \alpha_2 = 0, \quad (m_1 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решения (3.11) при  $|m_1| < 1$ ,  $|m_2| < 1$ ,  $m_1 m_2 \neq 1$  в зависимости от знаков параметров определяют в каждом случае 16 различных положений равновесия системы двух связанных тел. В работе [6] были определены все положения равновесия, которые задаются уравнениями (3.10). С использованием интеграла энергии в качестве функции Ляпунова получены достаточные условия устойчивости положений равновесия. Рассмотрена возможность обеспечения асимптотической устойчивости положений равновесия при наличии диссипации.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование движения системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, движущихся по круговой орбите под действием гравитационного момента.

Главное внимание уделено изучению равновесных ориентаций системы двух тел в плоскости круговой орбиты. Предложен алгебраический метод определения положений равновесия системы двух тел в орбитальной системе координат при условии, когда сферический шарнир расположен на линии пересечения двух плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника и стабилизатора.

Полученные результаты могут быть использованы на этапе предварительного проектирования гравитационных систем управления ориентацией искусственных спутников Земли.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978.
2. Гутник С.А., Сарычев В.А. Исследование стационарных движений системы двух связанных тел на круговой орбите с применением методов компьютерной алгебры // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 80–87.
3. Гутник С.А., Сарычев В.А. Применение методов компьютерной алгебры для исследования динамики системы двух связанных тел на круговой орбите // Программирование. 2019. Т. 45. № 2. С. 32–40.
4. Gutnik S.A., Sarychev V.A. Symbolic computations of the equilibrium orientations of a system of two connected bodies moving on a circular orbit around the Earth // Math. in Comput. Sci. 2021. V. 15. № 3. P. 407–417.
5. Сарычев В.А. Положения равновесия системы двух соединенных сферическим шарниром осесимметричных тел на круговой орбите // Космические исследования. 1999. Т. 37. № 2. С. 176–181.
6. Сарычев В.А. Положения относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите // Космические исследования. 1967. Т. 5. № 3. С. 360–364.
7. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников // Космические исследования. 1976. Т. 14. № 2. С. 198–208.
8. Сарычев В.А., Мирер С.А. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник–стабилизатор // Космические исследования. 1976. Т. 14. № 2. С. 209–219.
9. Sarychev V.A., Mirer S.A., Sazonov V.V. Plane oscillations of a gravitational system satellite-stabilizer with maximal speed of response // Acta Astronautica. 1976. V. 3. № 9–10. P. 651–669.
10. Gutnik S.A., Sarychev V.A. Symbolic investigation of the dynamics of a system of two connected bodies moving along a circular orbit // In: England M., Koepf W., Sadykov T.M., Seiler W.M., Vorozhtsov E.V. Eds. CASC 2019. LNCS. Springer, Cham, 2019. V. 11661. P. 164–178.
11. Гутник С.А., Сарычев В.А. Символьные методы вычисления положений равновесия системы двух связанных тел на круговой орбите // Программирование. 2022. Т. 48. № 2. С. 16–22.
12. Wolfram Mathematica website. <http://www.wolfram.com/mathematica>
13. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 432 с.
14. Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.
15. Батхин А.Б. Параметризация дискриминантного множества многочлена // Программирование. 2016. № 2. С. 8–21.
16. Батхин А.Б. Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена // Программирование. 2018. № 2. С. 5–17.