

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

© 2023 г. А. Т. Ибраимова^{1,2,*}, М. Дж. Минглибаев^{1,2,**}, А. Н. Прокопеня^{3,***}

¹ 050040 Алматы, пр-т аль-Фараби, 71, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан

² 050020 Алматы, Обсерватория, 23, Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Казахстан

³ 02-776 SGGW Варшава, ул. Новоурсыновска, 159, Варшавский университет естественных наук, Польша

*e-mail: ibraimova@aphi.kz

**e-mail: minglibayev@gmail.com

***e-mail: alexander_prokopenya@sggw.edu.pl

Поступила в редакцию 04.08.2022 г.
Переработанный вариант 04.08.2022 г.
Принята к публикации 10.09.2022 г.

Рассматривается нестационарная ограниченная задача трех тел переменной массы с учетом реактивных сил, возникающих при неизотропном изменении масс тел. Предполагается, что тела являются сферически симметричными и взаимодействуют между собой в соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона. На основе уравнений движения тел в относительной системе координат получены дифференциальные уравнения в оскулирующих элементах аперриодического движения по квазиконическим сечениям. В случае малых эксцентриситетов и наклонов орбит получены уравнения, определяющие вековые возмущения орбитальных элементов. Все необходимые символьные вычисления выполнены с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Библ. 21.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, переменная масса, уравнения движения, вековые возмущения.

DOI: 10.31857/S004446692301009X, **EDN:** LMGDHY

1. ВВЕДЕНИЕ

Наблюдения за движением небесных тел показывают, что реальные космические системы являются нестационарными, их массы, размеры, форма и ряд других физических характеристик изменяются с течением времени в процессе эволюции (см. [1]–[6]). Учет нестационарности небесных тел приводит к существенному усложнению математических моделей их движения, что требует разработки новых алгоритмов символьных вычислений для их исследования.

Целью настоящей работы является получение дифференциальных уравнений, определяющих вековые возмущения орбитальных элементов двух тел P_1 , P_2 переменной массы $m_1 = m_1(t)$, $m_2 = m_2(t)$, движущихся вокруг нестационарного центрального тела P_0 массой $m_0 = m_0(t)$, в рамках ограниченной задачи трех тел. Предполагается, что движение двух массивных тел P_0 , P_1 определяется их взаимным гравитационным притяжением, а также реактивными силами, которые возникают при неизотропном изменении их масс. Третье тело P_2 пренебрежимо малой массы ($m_2 \ll m_0, m_1$) не влияет на движение двух массивных тел и движется в их гравитационном поле. Хотя масса третьего тела предполагается малой, ее изменение также приводит к возникновению реактивных сил и возмущению его движения. Исследование этой проблемы связано с довольно громоздкими символьными вычислениями, которые лучше всего выполнять с применением систем компьютерной алгебры (см. [7]–[11]). В данной работе все необходимые вычисления выполнены с помощью системы Wolfram Mathematica (см. [12], [13]).

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Движение тел P_1, P_2 удобно рассматривать в относительной системе координат $Oxuz$, начало которой связано с центром масс тела P_0 , а оси параллельны осям абсолютной инерциальной системы координат. Обозначая радиус-векторы тел через $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$, $j = 1, 2$, и используя второй закон Ньютона, уравнения движения можно записать в виде (см. [6], [9], [14])

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + G(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} \frac{\mathbf{r}_1}{\gamma_1} = \mathbf{F}_1, \tag{1}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} + Gm_0 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} - \frac{d^2 \gamma_2}{dt^2} \frac{\mathbf{r}_2}{\gamma_2} = \mathbf{F}_2. \tag{2}$$

Здесь G – гравитационная постоянная, дважды непрерывно дифференцируемые функции $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ определяются соотношениями

$$\gamma_1(t) = \frac{m_{00} + m_{10}}{m_0(t) + m_1(t)}, \quad \gamma_2(t) = \frac{m_{00}}{m_0(t)},$$

где $m_{00} = m_0(t_0)$, $m_{10} = m_1(t_0)$ – значения масс тел в начальный момент времени. Силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ в правых частях уравнений (1), (2) можно представить в виде

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1^{(r)} - \frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{F}_2 = Gm_1 \left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_{12}^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) + \mathbf{F}_2^{(r)} - \frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2} \mathbf{r}_2, \tag{3}$$

где

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

а реактивные силы $\mathbf{F}_1^{(r)}, \mathbf{F}_2^{(r)}$ определяются выражениями (см. [15])

$$\mathbf{F}_1^{(r)} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} \mathbf{V}_1 - \frac{\dot{m}_0}{m_0} \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{F}_2^{(r)} = \frac{\dot{m}_2}{m_2} \mathbf{V}_2 - \frac{\dot{m}_0}{m_0} \mathbf{V}_0. \tag{4}$$

Точка над символом в выражениях (3), (4) означает полную производную соответствующей функции по времени, а \mathbf{V}_j , $j = 0, 1, 2$, – относительные скорости частиц, покидающих тело P_j или осаждающихся на нем, которые являются заданными функциями времени. Следует отметить,

что слагаемые $\frac{d^2 \gamma_i}{dt^2} \frac{\mathbf{r}_i}{\gamma_i}$ в левой части уравнений (1), (2), а также в выражениях (3) для сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$, вво-

дятся для того, чтобы получаемые при $\mathbf{F}_1 = 0, \mathbf{F}_2 = 0$ уравнения были интегрируемы и можно было записать их общее решение при произвольных законах изменения масс тел. Такое решение далее используется в качестве первого приближения при построении возмущенных решений уравнений (1), (2). Законы изменения масс тел во времени $m_j(t)$ определяются на основе наблюдений и также считаются известными, причем в общем случае массы изменяются в различных темпах, т.е. справедливо соотношение

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}.$$

Поэтому далее будем считать, что реактивные силы $\mathbf{F}_1^{(r)}, \mathbf{F}_2^{(r)}$ являются заданными функциями времени.

Поскольку получить общее решение уравнений (1), (2) не представляется возможным даже в случае постоянных масс, воспользуемся теорией возмущений. Заметим, что при $\mathbf{F}_1 = 0, \mathbf{F}_2 = 0$ уравнения (1), (2) являются независимыми, причем каждое из них имеет точное решение, которое описывает аperiодическое движение по квазиконическому сечению и может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} x_j &= \gamma_j \rho_j (\cos(v_j + \omega_j) \cos \Omega_j - \sin(v_j + \omega_j) \sin \Omega_j \cos i_j), \\ y_j &= \gamma_j \rho_j (\cos(v_j + \omega_j) \sin \Omega_j + \sin(v_j + \omega_j) \cos \Omega_j \cos i_j), \end{aligned} \tag{5}$$

$$z_j = \gamma_j \rho_j \sin(v_j + \omega_j) \sin i_j, \quad j = 1, 2,$$

где v_j — истинная аномалия,

$$\rho_j = \frac{a_j(1 - e_j^2)}{1 + e_j \cos v_j}. \quad (6)$$

Постоянные $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j$ в (5), (6) являются аналогами известных кеплеровских орбитальных элементов (см. [6]). Введение аналога эксцентрической аномалии E_j согласно соотношению

$$\operatorname{tg} \frac{v_j}{2} = \sqrt{\frac{1 + e_j}{1 - e_j}} \operatorname{tg} \frac{E_j}{2} \quad (7)$$

приводит к известному уравнению Кеплера

$$E_j - e_j \sin E_j = M_j. \quad (8)$$

При этом зависимости эксцентрической E_j и средней M_j аномалий в (8) от времени

$$E_j = E_j(t), \quad M_j = \frac{\sqrt{\kappa_j}}{a_j^{3/2}} (\phi_j(t) - \phi_j(\tau_j)), \quad \kappa_1 = G(m_{00} + m_{10}), \quad \kappa_2 = Gm_{00} \quad (9)$$

определяются законами изменения масс тел, поскольку функции $\phi_j(t)$ в (9) имеют вид

$$\phi_j(t) = \int_{\tau_j}^t \frac{dt}{\gamma_j^2(t)}. \quad (10)$$

Через τ_j в (9) обозначен аналог времени прохождения тела P_j через перигеум.

Отметим, что при заданных орбитальных параметрах $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \tau_j$ каждого из тел P_1, P_2 , а также известных функциях $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$, которые определяются законами изменения масс всех трех тел, уравнения (9), (10) позволяют найти средние аномалии M_j как функции времени. Решая затем уравнение Кеплера (8), находим эксцентрические аномалии E_j и, используя соотношение (7), вычисляем истинные аномалии v_j и декартовы координаты тел (5). Таким образом, соотношения (5)–(10) позволяют вычислить относительные декартовы координаты тел P_1, P_2 в любой момент времени и полностью описать их невозмущенное движение. Отметим также, что при постоянных массах тел ($\gamma_1(t) = \gamma_2(t) \equiv 1$) решения (5), (6) сводятся к хорошо известным решениям задачи двух тел (см. [16], [17]).

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Как и в случае постоянных масс, гравитационное взаимодействие тел P_1 и P_2 приводит к возмущению траектории тела P_2 пренебрежимо малой массы. В отличие от классической ограниченной задачи трех тел (см. [18]), в рассматриваемом случае переменных масс учет реактивных сил приводит не только к дополнительному возмущению траектории тела P_2 , но и к возмущению траектории массивного тела P_1 . Это означает, что учет сил $\vec{F}_1 \neq 0, \vec{F}_2 \neq 0$ в правых частях уравнений (1), (2) приводит к зависимости орбитальных параметров $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \tau_j$ от времени. Используя метод вариации постоянных, решения уравнений движения (1), (2) можно представить в общем виде

$$\begin{aligned} x_j &= x_j(a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, M_j(a_j, e_j, \tau_j), t), \\ y_j &= y_j(a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, M_j(a_j, e_j, \tau_j), t), \\ z_j &= z_j(a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, M_j(a_j, e_j, \tau_j), t), \end{aligned} \quad (11)$$

где функции в правых частях определяются выражениями (5), в которых вместо истинных аномалий v_j используются средние аномалии M_j , а орбитальные параметры $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \tau_j$

($j = 1, 2$) каждого из тел P_1, P_2 являются функциями времени, причем соотношения (8), (9) определяют неявную зависимость средних аномалий M_j от параметров a_j, e_j, τ_j .

Частные производные функций (11) по времени совпадают с производными по времени функций (5) в отсутствие возмущений ($F_1 \neq 0, F_2 \neq 0$) и определяют скорости их изменения. Используя уравнения (5)–(10), получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \left(\frac{\dot{\gamma}_j}{\gamma_j} + \frac{\dot{\rho}_j}{\rho_j} \right) x_j - \gamma_j \rho_j \dot{v}_j (\sin(v_j + \omega_j) \cos \Omega_j + \cos(v_j + \omega_j) \sin \Omega_j \cos i_j), \\ \dot{y}_j &= \left(\frac{\dot{\gamma}_j}{\gamma_j} + \frac{\dot{\rho}_j}{\rho_j} \right) y_j - \gamma_j \rho_j \dot{v}_j (\sin(v_j + \omega_j) \sin \Omega_j - \cos(v_j + \omega_j) \cos \Omega_j \cos i_j), \\ \dot{z}_j &= \left(\frac{\dot{\gamma}_j}{\gamma_j} + \frac{\dot{\rho}_j}{\rho_j} \right) z_j + \gamma_j \rho_j \dot{v}_j \cos(v_j + \omega_j) \sin i_j, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\dot{v}_j = \frac{\sqrt{\kappa_j}}{a_j^{3/2} (1 - e_j^2)^{3/2}} \frac{(1 + e_j \cos v_j)^2}{\gamma_j^2(t)}.$$

При наличии возмущений орбитальные параметры $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \tau_j$ ($j = 1, 2$) каждого из тел P_1, P_2 в выражениях для производных (12) также являются функциями времени, формально их можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \dot{x}_j(a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, M_j(a_j, e_j, \tau_j), t), \\ \dot{y}_j &= \dot{y}_j(a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, M_j(a_j, e_j, \tau_j), t), \\ \dot{z}_j &= \dot{z}_j(a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, M_j(a_j, e_j, \tau_j), t), \end{aligned} \quad (13)$$

где функции в правых частях определяются выражениями (12).

Для получения дифференциальных уравнений, определяющих зависимость орбитальных параметров от времени, следует подставить выражения (11), (13) в уравнения (1), (2), что приводит к шести уравнениям второго порядка относительно 12 искомым функций $a_j(t), e_j(t), i_j(t), \Omega_j(t), \omega_j(t), \tau_j(t)$ ($j = 1, 2$). Поскольку такая система имеет бесконечное число решений, требуется ввести дополнительные шесть уравнений для переменных $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \tau_j$ ($j = 1, 2$). Для получения таких уравнений естественным с физической точки зрения является условие равенства частных производных функций (11) по времени скоростям изменения возмущенных координат $\dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j$ (см. [17], [19]). Это условие означает, что в каждый момент времени выражения для координат (11) и скоростей (13) определяются точными решениями (5), (12) задачи двух тел с переменными массами, в которых орбитальные параметры являются функциями времени. В результате получаются шесть уравнений вида (ниже мы приводим только уравнения, записанные для функций x_j , заданных уравнениями (11); уравнения для функций y_j, z_j записываются аналогичным образом)

$$\frac{\partial x_j}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial e_j} \frac{de_j}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial i_j} \frac{di_j}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial \Omega_j} \frac{d\Omega_j}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial \omega_j} \frac{d\omega_j}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial \tau_j} \frac{d\tau_j}{dt} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Еще шесть уравнений получаем при подстановке решений (11) и (13) в уравнения движения (1), (2). Соответствующее уравнение для функций \dot{x}_j , заданных уравнениями (13), имеет вид (уравнения для функций \dot{y}_j, \dot{z}_j записываются аналогичным образом)

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial e_j} \frac{de_j}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial i_j} \frac{di_j}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \Omega_j} \frac{d\Omega_j}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \omega_j} \frac{d\omega_j}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \tau_j} \frac{d\tau_j}{dt} = F_{jx}, \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

Решение системы (14), (15) позволяет найти выражения для производных орбитальных параметров $\frac{da_j}{dt}$, $\frac{de_j}{dt}$, $\frac{di_j}{dt}$, $\frac{d\Omega_j}{dt}$, $\frac{d\omega_j}{dt}$, $\frac{d\tau_j}{dt}$ для каждого из тел P_1 , P_2 . Отметим, что реализация описанной процедуры получения дифференциальных уравнений для орбитальных параметров требует выполнения довольно громоздких символьных вычислений. Такие вычисления можно реализовать, используя, например, систему компьютерной алгебры Wolfram Mathematica (см. [12]) и ее встроенные функции для дифференцирования выражений, преобразования тригонометрических функций, решения алгебраических уравнений и упрощения символьных выражений. Выполняя соответствующие вычисления и преобразования, в результате получаем систему дифференциальных уравнений для определения зависимости орбитальных параметров от времени (для дальнейших вычислений вместо параметра τ_j более удобно использовать среднюю аномалию M_j):

$$\frac{da_j}{dt} = \frac{2a_j^{3/2}}{\sqrt{\kappa_j}} \frac{\gamma_j(t)}{1 - e_j \cos E_j} \left(\sqrt{1 - e_j^2} F_{\psi} + e_j \sin E_j F_{rj} \right), \quad (16)$$

$$\frac{de_j}{dt} = \frac{\sqrt{a_j(1 - e_j^2)}}{\sqrt{\kappa_j}} \frac{\gamma_j(t)}{1 - e_j \cos E_j} \left(F_{\psi} (2 \cos E_j - e_j - e_j \cos^2 E_j) + \sqrt{1 - e_j^2} \sin E_j F_{rj} \right), \quad (17)$$

$$\frac{di_j}{dt} = \frac{\sqrt{a_j} \gamma_j(t)}{\sqrt{\kappa_j} (1 - e_j^2)} F_{nj} \left((\cos E_j - e_j) \cos \omega_j - \sqrt{1 - e_j^2} \sin E_j \sin \omega_j \right), \quad (18)$$

$$\frac{d\Omega_j}{dt} = \frac{\sqrt{a_j} \gamma_j(t)}{\sqrt{\kappa_j} (1 - e_j^2) \sin i_j} F_{nj} \left((\cos E_j - e_j) \sin \omega_j + \sqrt{1 - e_j^2} \sin E_j \cos \omega_j \right), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_j}{dt} = & \frac{\sqrt{a_j}}{e_j \sqrt{\kappa_j} (1 - e_j \cos E_j)} \frac{\gamma_j(t)}{1 - e_j \cos E_j} \left((2 - e_j^2 - e_j \cos E_j) \sin E_j F_{\psi} - \sqrt{1 - e_j^2} (\cos E_j - e_j) F_{rj} \right) - \\ & - \frac{\sqrt{a_j} \gamma_j(t) \cot i_j}{\sqrt{\kappa_j} (1 - e_j^2)} F_{nj} \left((\cos E_j - e_j) \sin \omega_j + \sqrt{1 - e_j^2} \sin E_j \cos \omega_j \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_j}{dt} = & \frac{\sqrt{\kappa_j}}{a_j^{3/2} \gamma_j^2(t)} + \frac{\sqrt{a_j}}{e_j \sqrt{\kappa_j} (1 - e_j \cos E_j)} \frac{\gamma_j(t)}{1 - e_j \cos E_j} \left(\sqrt{1 - e_j^2} F_{\psi} \sin E_j (-2 + e_j^2 + e_j \cos E_j) + \right. \\ & \left. + F_{rj} \left((1 + 3e_j^2) \cos E_j - e_j (3 + e_j^2 \cos 2E_j) \right) \right), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (21)$$

Силы F_{rj} , F_{ψ} , F_{nj} в правых частях уравнений (16)–(21) представляют собой соответственно радиальные, трансверсальные и нормальные составляющие сил \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , определяемых выражениями (3). Использование орбитальных систем координат тел P_1 , P_2 связано с тем, что реактивные силы $\mathbf{F}_1^{(r)}$, $\mathbf{F}_2^{(r)}$ обычно определяются именно в этих системах, а направляющие косинусы единичных векторов $\mathbf{e}_{rj} = (e_{xj}, e_{yj}, e_{zj})$, $\mathbf{e}_{\psi} = (\tau_{xj}, \tau_{yj}, \tau_{zj})$, $\mathbf{e}_{nj} = (n_{xj}, n_{yj}, n_{zj})$ вдоль радиального, трансверсального и нормального направлений соответственно можно легко записать на основе решений (5):

$$\begin{aligned} e_{xj} &= \cos(v_j + \omega_j) \cos \Omega_j - \sin(v_j + \omega_j) \sin \Omega_j \cos i_j, \\ e_{yj} &= \cos(v_j + \omega_j) \sin \Omega_j + \sin(v_j + \omega_j) \cos \Omega_j \cos i_j, \end{aligned} \quad (22)$$

$$e_{zj} = \sin(v_j + \omega_j) \sin i_j,$$

$$\begin{aligned} \tau_{xj} &= -\sin(v_j + \omega_j) \cos \Omega_j - \cos(v_j + \omega_j) \sin \Omega_j \cos i_j, \\ \tau_{yj} &= -\sin(v_j + \omega_j) \sin \Omega_j + \cos(v_j + \omega_j) \cos \Omega_j \cos i_j, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\tau_{zj} = \cos(v_j + \omega_j) \sin i_j,$$

$$n_{xj} = \sin \Omega_j \sin i_j,$$

$$n_{yj} = -\cos \Omega_j \sin i_j, \quad (24)$$

$$n_{-j} = \cos i_j, \quad j = 1, 2.$$

Используя (3), (22)–(24), получаем для первого тела

$$F_{r1} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} V_{r1} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} V_{r0} - \frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1} r_1, \quad F_{\tau 1} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} V_{\tau 1} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} V_{\tau 0}, \quad F_{n1} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} V_{n1} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} V_{n0}, \quad (25)$$

где $V_{r1}, V_{r0}, V_{\tau 1}, V_{\tau 0}, V_{n1}, V_{n0}$ – составляющие относительных скоростей частиц, покидающих тела P_1 и P_0 или осаждающихся на них, вдоль радиального, трансверсального и нормального направлений в орбитальной системе координат, связанной с телом P_1 . Аналогично определяем составляющие относительных скоростей частиц, покидающих тело P_2 или осаждающихся на нем, вдоль радиального, трансверсального и нормального направлений $V_{r2}, V_{\tau 2}, V_{n2}$ в орбитальной системе координат, связанной с телом P_2 . В результате радиальная, трансверсальная и нормальная составляющие силы \vec{F}_2 принимают вид

$$\begin{aligned} F_{r2} &= -Gm_1 \frac{r_2}{r_{12}^3} + Gm_1 \left(\frac{r_1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_1^2} \right) (\mathbf{e}_{r1} \cdot \mathbf{e}_{r2}) - \frac{\dot{\gamma}_2}{\gamma_2} r_2 + Q_{r2}, \\ F_{\tau 2} &= Gm_1 \left(\frac{r_1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_1^2} \right) (\mathbf{e}_{r1} \cdot \mathbf{e}_{\tau 2}) + Q_{\tau 2}, \\ F_{n2} &= Gm_1 \left(\frac{r_1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_1^2} \right) (\mathbf{e}_{r1} \cdot \mathbf{e}_{n2}) + Q_{n2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку относительные скорости $V_{r0}, V_{\tau 0}, V_{n0}$ заданы в орбитальной системе координат, связанной с телом P_1 , реактивные силы, действующие на тело P_2 , принимают вид

$$\begin{aligned} Q_{r2} &= \frac{\dot{m}_2}{m_2} V_{r2} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} (V_{r0} (\mathbf{e}_{r1} \cdot \mathbf{e}_{r2}) + V_{\tau 0} (\mathbf{e}_{\tau 1} \cdot \mathbf{e}_{r2}) + V_{n0} (\mathbf{e}_{n1} \cdot \mathbf{e}_{r2})), \\ Q_{\tau 2} &= \frac{\dot{m}_2}{m_2} V_{\tau 2} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} (V_{r0} (\mathbf{e}_{r1} \cdot \mathbf{e}_{\tau 2}) + V_{\tau 0} (\mathbf{e}_{\tau 1} \cdot \mathbf{e}_{\tau 2}) + V_{n0} (\mathbf{e}_{n1} \cdot \mathbf{e}_{\tau 2})), \\ Q_{n2} &= \frac{\dot{m}_2}{m_2} V_{n2} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} (V_{r0} (\mathbf{e}_{r1} \cdot \mathbf{e}_{n2}) + V_{\tau 0} (\mathbf{e}_{\tau 1} \cdot \mathbf{e}_{n2}) + V_{n0} (\mathbf{e}_{n1} \cdot \mathbf{e}_{n2})). \end{aligned} \quad (27)$$

При заданных реактивных силах и законах изменения масс тел уравнения (16)–(27) полностью определяют возмущенное движение тел P_1, P_2 .

4. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Уравнения возмущенного движения (16)–(21) показывают, что при условиях $\mathbf{F}_1 = 0, \mathbf{F}_2 = 0$ орбитальные элементы $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j$ остаются постоянными, а средние аномалии M_j являются возрастающими функциями времени. При наличии возмущений орбитальные параметры изменяются с течением времени, но получить точные решения дифференциальных уравнений (16)–(21), определяющих эти изменения, не представляется возможным. Поскольку во многих практически важных случаях эксцентриситеты e_j и наклоны i_j орбит являются малыми величинами ($e_j \ll 1, i_j \ll 1$), уравнения (16)–(21) можно упростить, заменяя их правые части соответствующими разложениями в ряды по малым параметрам. Получаемые при этом уравнения описывают динамику исследуемых систем на длительных временных интервалах и позволяют моделировать движение тел с требуемой точностью (см. [16]–[19]). Далее рассмотрим случай малых эксцентриситетов $e_j \ll 1$ и наклонов $i_j \ll 1$ и разложим правые части уравнений (16)–(21) в ряды по этим параметрам с точностью до второго порядка. Хотя такие разложения требуют выполнения довольно громоздких символьных вычислений, использование систем компьютерной алгебры позволяет весьма эффективно решать эту задачу.

При $e_j \ll 1$ уравнение Кеплера (8) позволяет получить выражение для эксцентрисической аномалии в виде сходящегося степенного ряда по e_j (см. [17])

$$E_j = M_j + e_j \sin M_j + \frac{1}{2} e_j^2 \sin(2M_j) + \dots$$

Используя это разложение и встроенную функцию Series (см. [12]), получаем

$$\begin{aligned} \cos E_j &= \cos M_j + \frac{1}{2} e_j (\cos(2M_j) - 1) + \frac{3}{8} e_j^2 (\cos(3M_j) - \cos M_j) + \dots, \\ \sin E_j &= \sin M_j + \frac{1}{2} e_j \sin(2M_j) + \frac{1}{8} e_j^2 (3 \sin(3M_j) - \sin M_j) + \dots. \end{aligned} \quad (28)$$

Разлагая в ряды по малым параметрам решения (5) с учетом (28), получаем

$$\begin{aligned} x_j &= \gamma_j a_j \left(\cos(M_j + \omega_j + \Omega_j) + \frac{1}{2} e_j (\cos(2M_j + \omega_j + \Omega_j) - 3 \cos(\omega_j + \Omega_j)) + \right. \\ &+ \frac{1}{8} e_j^2 (\cos(M_j - \omega_j - \Omega_j) - 4 \cos(M_j + \omega_j + \Omega_j) + 3 \cos(3M_j + \omega_j + \Omega_j)) + \\ &\left. + s_j^2 (\cos(M_j + \omega_j - \Omega_j) - \cos(M_j + \omega_j + \Omega_j)) \right), \\ y_j &= \gamma_j a_j \left(\sin(M_j + \omega_j + \Omega_j) + \frac{1}{2} e_j (\sin(2M_j + \omega_j + \Omega_j) - 3 \sin(\omega_j + \Omega_j)) - \right. \\ &- \frac{1}{8} e_j^2 (\sin(M_j - \omega_j - \Omega_j) + 4 \sin(M_j + \omega_j + \Omega_j) - 3 \sin(3M_j + \omega_j + \Omega_j)) - \\ &\left. - s_j^2 (\sin(M_j + \omega_j - \Omega_j) + \sin(M_j + \omega_j + \Omega_j)) \right), \\ z_j &= \gamma_j \rho_j s_j (2 \sin(M_j + \omega_j) + e_j (\sin(2M_j + \omega_j) - 3 \sin \omega_j)), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (29)$$

где введенный для удобства вычислений параметр $s_j = \sin \frac{i_j}{2}$ является малым, так как наклонения $i_j \ll 1$. Используя (29), находим

$$r_j = \gamma_j \rho_j (1 - e_j \cos M_j + e_j^2 \sin^2 M_j), \quad j = 1, 2. \quad (30)$$

Далее вычисляем разложение выражения для $r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$, которое определяет силу \mathbf{F}_2 :

$$\begin{aligned} r_{12}^2 &= a_1^2 \gamma_1^2 + a_2^2 \gamma_2^2 - 2a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + e_1 (-2a_1^2 \gamma_1^2 \cos(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) - \\ &- a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos(2\lambda_1 - \lambda_2 - \omega_1 - \Omega_1) + 3a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos(\lambda_2 - \omega_1 - \Omega_1)) + \\ &+ e_2 (3a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos(\lambda_1 - \omega_2 - \Omega_2) - a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2) - \\ &- 2a_2^2 \gamma_2^2 \cos(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2)) + \frac{e_1^2}{4} (2a_1^2 \gamma_1^2 (3 - \cos(2\lambda_1 - 2\omega_1 - 2\Omega_1)) + \\ &+ a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 (4 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) - 3 \cos(3\lambda_1 - \lambda_2 - 2\omega_1 - 2\Omega_1) - \\ &- \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\omega_1 - 2\Omega_1))) + \frac{e_2^2}{4} (2a_2^2 \gamma_2^2 (3 - \cos(2\lambda_2 - 2\omega_2 - 2\Omega_2)) + \\ &+ a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 (4 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) - 3 \cos(\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\omega_2 + 2\Omega_2) - \\ &- \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\omega_2 - 2\Omega_2))) - \frac{e_1 e_2}{2} a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 (9 \cos(\omega_1 - \omega_2 + \Omega_1 - \Omega_2) + \\ &+ \cos(2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \omega_1 - \Omega_1 + \omega_2 + \Omega_2) - 3 \cos(2\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1 - \omega_2 - \Omega_2) - \\ &- 3 \cos(2\lambda_2 - \omega_1 - \Omega_1 - \omega_2 - \Omega_2)) + a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 (s_1^2 (2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) - \end{aligned} \quad (31)$$

$$- \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Omega_1)) + s_2^2 (2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) - \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Omega_2)) + 4s_1s_2 (4 \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - \Omega_1 - \Omega_2) - \cos(\lambda_1 - \lambda_2 - \Omega_1 + \Omega_2)),$$

где для удобства дальнейших вычислений вместо средней аномалии M_j введена средняя долгота $\lambda_j = M_j + \omega_j + \Omega_j$ (см. [16–19]). Используя разложения (29), (30) и выражения для направляющих косинусов (22)–(24), находим скалярные произведения единичных векторов, входящих в выражения для составляющих силы \vec{F}_2 вдоль радиального, трансверсального и нормального направлений (см. (26), (27)). Например,

$$(\mathbf{e}_{r1} \cdot \mathbf{e}_{r2}) = \cos(\lambda_1 - \lambda_2) - 2e_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 2e_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + \frac{e_1^2}{4} \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) (\sin(\lambda_2 - \omega_1 - \Omega_1) - 9 \sin(2\lambda_1 - \lambda_2 - \omega_1 - \Omega_1)) + \frac{e_2^2}{4} \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) (\sin(\lambda_1 - \omega_2 - \Omega_2) + 9 \sin(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2)) + \tag{32}$$

$$+ 4e_1e_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) + 2s_1^2 \sin(\lambda_1 - \Omega_1) \sin(\lambda_2 - \Omega_1) + 2s_2^2 \sin(\lambda_1 - \Omega_2) \sin(\lambda_2 - \Omega_2) + 4s_1s_2 \sin(\lambda_1 - \Omega_1) \sin(\lambda_2 - \Omega_2),$$

$$(\vec{e}_{t1} \cdot \vec{e}_{r2}) = -\sin(\lambda_1 - \lambda_2) - 2e_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + 2e_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - \frac{e_1^2}{4} \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) (\cos(\lambda_2 - \omega_1 - \Omega_1) + 9 \cos(2\lambda_1 - \lambda_2 - \omega_1 - \Omega_1)) + \frac{e_2^2}{4} \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) (\cos(\lambda_1 - \omega_2 - \Omega_2) + 9 \cos(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \omega_2 + \Omega_2)) - \tag{33}$$

$$- 4e_1e_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) - 2s_1^2 \cos(\lambda_1 - \Omega_1) \sin(\lambda_2 - \Omega_1) - 2s_2^2 \cos(\lambda_1 - \Omega_2) \sin(\lambda_2 - \Omega_2) + 4s_1s_2 \cos(\lambda_1 - \Omega_1) \sin(\lambda_2 - \Omega_2),$$

$$(\mathbf{e}_{n1} \cdot \mathbf{e}_{r2}) = -2s_1 \sin(\lambda_2 - \Omega_1) + 2s_2 \sin(\lambda_2 - \Omega_2) - 4e_2 (s_1 \cos(\lambda_2 - \Omega_1) - s_2 \cos(\lambda_2 - \Omega_2)) \sin(\lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2). \tag{34}$$

Подобным образом вычисляются и остальные скалярные произведения $(\mathbf{e}_{r1} \cdot \mathbf{e}_{t2})$, $(\mathbf{e}_{t1} \cdot \mathbf{e}_{t2})$, $(\mathbf{e}_{n1} \cdot \mathbf{e}_{t2})$, $(\mathbf{e}_{r1} \cdot \mathbf{e}_{n2})$, $(\mathbf{e}_{t1} \cdot \mathbf{e}_{n2})$, $(\mathbf{e}_{n1} \cdot \mathbf{e}_{n2})$. В результате правые части дифференциальных уравнений (16)–(21) можно представить в виде разложений по степеням малых параметров e_1 , e_2 , s_1 , s_2 . Коэффициенты этих разложений являются периодическими функциями средних долгот λ_1 , λ_2 и представляют собой рациональные выражения, в числителях которых содержатся тригонометрические функции $\cos(k\lambda_j)$, $\sin(k\lambda_j)$, $\cos(k\lambda \pm n\lambda_2)$, $\sin(k\lambda \pm n\lambda_2)$ ($k, n = 1, 2, \dots$). Поскольку получаемые выражения весьма громоздки, мы их не приводим. Отметим только, что при разложении выражения r_{12}^{-3} с точностью до второго порядка по малым параметрам появляются рациональные выражения вида $1/\rho_0$, $1/\rho_0^3$, $1/\rho_0^5$, где

$$\rho_0 = (a_1^2 \gamma_1^2 - 2a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + a_2^2 \gamma_2^2)^{1/2}. \tag{35}$$

Так как ρ_0 является периодической функцией переменных λ_1 , λ_2 , выражения $1/\rho_0$, $1/\rho_0^3$, $1/\rho_0^5$ следует заменить их разложениями в ряды Фурье вида

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cos(k(\lambda_1 - \lambda_2)),$$

$$\frac{a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2}{\rho_0^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \cos(k(\lambda_1 - \lambda_2)), \tag{36}$$

$$\frac{a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2}{\rho_0^5} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cos(k(\lambda_1 - \lambda_2)),$$

где A_k, B_k, C_k – коэффициенты Лапласа, удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям (см. [20]):

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2(k-1)}{2k-1} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) A_{k-1} - \frac{2k-3}{2k-1} A_{k-2}, \quad k \geq 2, \\ B_k &= \frac{(2k+1)\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} A_k - 2\alpha^2 \frac{2k+1}{(1-\alpha^2)^2} A_{k+1}, \quad k \geq 0, \\ C_k &= \frac{(2k+3)\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} B_k - 2\alpha^2 \frac{2k-1}{3(1-\alpha^2)^2} B_{k+1}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Все коэффициенты Лапласа можно вычислить, используя приведенные рекуррентные соотношения и следующие выражения для A_0 и A_1 :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\pi a_2 \gamma_2} \int_0^\pi \frac{d\lambda}{(1+\alpha^2 - 2\alpha \cos \lambda)^{1/2}} = \frac{4}{\pi a_2 \gamma_2 (1+\alpha)} K \left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \right), \\ A_1 &= \frac{2}{\pi a_2 \gamma_2} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda d\lambda}{(1+\alpha^2 - 2\alpha \cos \lambda)^{1/2}} = \frac{2}{\pi a_2 \gamma_2 \alpha (1+\alpha)} \left((1+\alpha^2) K \left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \right) - (1+\alpha)^2 E \left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь функции $K \left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \right)$ и $E \left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \right)$ обозначают полный эллиптический интеграл первого и

второго рода соответственно, а параметр $\alpha = \frac{a_1 \gamma_1}{a_2 \gamma_2} < 1$ в случае, если тело P_2 является внешней планетой. Если тело P_2 является внутренней планетой, то $a_1 \gamma_1$ и $a_2 \gamma_2$ в выражениях для A_0 и A_1 нужно поменять местами и параметр α определить как $\alpha = \frac{a_2 \gamma_2}{a_1 \gamma_1} < 1$.

Выполняя описанные выше вычисления, получаем для правых частей уравнений (16)–(21) выражения в виде рядов по малым параметрам e_1, e_2, i_1, i_2 , коэффициенты которых являются периодическими функциями средних долгот λ_1, λ_2 . Наличие таких функций приводит к колебаниям орбитальных параметров и значительно усложняет получение численных решений уравнений (16)–(21) на больших временных интервалах. Поскольку нас интересует поведение орбитальных параметров именно на больших промежутках времени, при отсутствии соизмеримостей средних движений тел правые части уравнений (16)–(21) можно заменить их осредненными выражениями относительно средних долгот λ_1, λ_2 , что приводит к уравнениям, определяющим вековые возмущения орбитальных параметров (см. [16], [19]–[21]).

Напомним, что осреднение функции $W(\lambda_1, \lambda_2)$ по переменным λ_1, λ_2 и переход к вековым возмущениям сводится к вычислению интеграла

$$W^{(\text{sec})} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (37)$$

Поскольку мы рассматриваем ограниченную задачу трех тел, правые части уравнений (16)–(21), записанные для тела P_1 , зависят только от средней долготы λ_1 , поэтому интегрирование по λ_2 в выражении (37) является тривиальным. При подстановке вместо функции $W(\lambda_1, \lambda_2)$ правых ча-

стей уравнений (16)–(21), в которых выполнены разложения по малым параметрам с учетом выражений для сил (25)–(27) и разложений (28)–(36), в случае тела P_1 получаем уравнения

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{a_1^{3/2}\gamma_1(2 - e_1^2)}{\sqrt{\kappa_1}} \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} V_{\tau 1} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} V_{\tau 0} \right), \quad (38)$$

$$\frac{de_1}{dt} = -\frac{3\sqrt{a_1}\gamma_1 e_1}{2\sqrt{\kappa_1}} \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} V_{\tau 1} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} V_{\tau 0} \right), \quad (39)$$

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{3\sqrt{a_1}\gamma_1 e_1 \cos \omega_1}{2\sqrt{\kappa_1}} \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} V_{n1} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} V_{n0} \right), \quad (40)$$

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{3\sqrt{a_1}\gamma_1 e_1 \sin \omega_1}{2i_1\sqrt{\kappa_1}} \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} V_{n1} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} V_{n0} \right), \quad (41)$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{3\sqrt{a_1}\gamma_1 e_1}{2i_1\sqrt{\kappa_1}} \sin \omega_1 \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} V_{n1} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} V_{n0} \right) + \frac{\sqrt{a_1}\gamma_1}{\sqrt{\kappa_1}} \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} V_{r1} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} V_{r0} \right) - \frac{3a_1^{3/2}\gamma_1 \dot{\gamma}_1}{2\sqrt{\kappa_1}}. \quad (42)$$

Следует отметить, что интегрирование уравнений (16)–(21) по средним долготам приводит к утрате информации о положении тел на орбитах и позволяет предсказать только медленные изменения во времени орбитальных параметров a_j , e_j , i_j , Ω_j , ω_j . Поэтому усредненное уравнение (21) мы не приводим.

Получение подобных уравнений для орбитальных элементов тела P_2 требует выполнения существенно более громоздких символьных вычислений. Однако использование системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica позволяет успешно выполнить все вычисления. В результате получаем уравнения для вековых возмущений орбитальных элементов тела P_2 :

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dt} = & -\frac{Gm_1\sqrt{a_2}}{8\sqrt{\kappa_2}}(4B_2 - 3C_1 + 3C_3)i_1i_2 \sin(\Omega_1 - \Omega_2) + \frac{a_2^{3/2}\gamma_2\dot{m}_2}{\sqrt{\kappa_2}m_2}V_{\tau 2}(2 - e_2^2) + \frac{Gm_1\sqrt{a_2}}{32\sqrt{\kappa_2}}e_1e_2 \times \\ & \times \sin(\omega_1 - \omega_2 + \Omega_1 - \Omega_2) \left(6\alpha(4C_0 - 6C_1 + 4C_2 - 10C_3 + 5D_0 - 5D_4) - 24B_0 + 60B_1 + 8B_2 - 60B_3 - \right. \\ & \left. - 42C_0 - 108C_1 + 288C_2 + 12C_3 - 54C_4 - 150D_1 + 165D_3 + \frac{6}{\alpha}(12C_0 - 10C_1 - 4C_2 - 6C_3 + 5D_0 - 5D_4) \right), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_2}{dt} = & \frac{3\sqrt{a_2}\gamma_2}{2\sqrt{\kappa_2}} \frac{\dot{m}_0}{m_0} (V_{\tau 0}e_1 \cos(\omega_1 - \omega_2 + \Omega_1 - \Omega_2) - V_{n0}i_2 \cos \omega_2 + V_{r0}e_1 \sin(\omega_1 - \omega_2 + \Omega_1 - \Omega_2) + \\ & + V_{n0}i_1 \cos(\omega_2 - \Omega_1 + \Omega_2)) - \frac{3\sqrt{a_2}\gamma_2\dot{m}_2}{2\sqrt{\kappa_2}m_2}V_{\tau 2}e_2 + \frac{Gm_1e_1}{16\sqrt{a_2}\kappa_2} \sin(\omega_1 - \omega_2 + \Omega_1 - \Omega_2) \times \\ & \times \left(6\alpha(C_0 + C_1 + C_2 - C_3) - 6B_0 - 10B_1 + 2B_2 - 6B_3 + 3C_0 - 27C_1 + 3C_3 - 3C_4 + \frac{6}{\alpha}(3C_0 - C_2) \right), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{Gm_1s_1}{4\sqrt{a_2}\kappa_2} \left(B_0 + B_2 - \frac{2a_2\gamma_2}{a_1^2\gamma_1^2} \right) \sin(\Omega_1 - \Omega_2) - \frac{3\sqrt{a_2}\gamma_2e_2}{2\sqrt{\kappa_2}} \cos \omega_2 \left(\frac{\dot{m}_2}{m_2} V_{n2} - \frac{\dot{m}_0}{m_0} V_{n0} \right), \quad (45)$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = -\frac{Gm_1}{8\sqrt{a_2}\kappa_2} (B_0 + B_2) \left(1 - \frac{s_1}{s_2} \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dt} = & -\frac{Gm_1}{8\sqrt{a_2}\kappa_2} (B_0 + B_2) \frac{s_1}{s_2} \cos(\Omega_1 - \Omega_2) + \frac{Gm_1}{8\sqrt{a_2}\kappa_2} (B_0 + 4B_1 - 7B_2 + 3C_0 + \\ & + 6C_1 + 3C_2 - 6C_3 - \frac{6}{\alpha}(B_0 + 2C_1) + \frac{6}{\alpha^2}C_0) + \frac{Gm_1e_1}{16\sqrt{a_2}\kappa_2} \left(-6\alpha(C_0 + C_1 + C_2 - C_3) + \right. \\ & \left. + 6B_0 + 10B_1 - 2B_2 + 6B_3 - 3C_0 + 27C_1 - 3C_3 + 3C_4 - \frac{6}{\alpha}(3C_0 - C_2) \right). \end{aligned} \quad (47)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследуется нестационарная ограниченная задача трех тел переменной массы, взаимодействующих между собой в соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона с учетом реактивных сил, возникающих при неизотропном изменении масс тел. Исходные уравнения движения тел в относительной системе координат записаны на основе второго закона Ньютона, что позволяет определить реактивные силы на основе уравнения Мещерского. Используя точные решения нестационарной задачи двух тел (см. [6]) и применяя метод вариации постоянных, мы получили дифференциальные уравнения возмущенного движения в оскулирующих элементах аperiодического движения по квазиконическим сечениям. В случае малых эксцентриситетов и наклонов орбит получены уравнения, определяющие вековые возмущения орбитальных элементов. Следует отметить, что полученные уравнения описывают общий случай, когда массы всех трех тел изменяются анизотропно и возникают реактивные силы. Из этих уравнений можно легко получить уравнения в различных частных случаях, представляющих практический интерес. Например, массы двух массивных тел остаются постоянными, а масса третьего тела изменяется анизотропно и на него действуют реактивные силы. Этот частный случай представляет интерес в динамике искусственных небесных тел. Далее планируется численными методами исследовать полученные эволюционные уравнения при различных законах изменения масс тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Omarov T.B.* (Ed.) *Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy*. N.Y.: Nova Sci. Publ., 2002.
2. *Bekov A.A., Omarov T.B.* The theory of orbits in non-stationary stellar systems // *Astron. Astrophys. Transact.* 2013. V. 22. № 2. P. 145–153.
3. *Черепащук А.М.* Тесные двойные звезды. Ч. II. М.: Физматлит, 2013. 572 с.
4. *Eggleton P.* *Evolutionary processes in binary and multiple stars*. Cambridge Univ. Press, 2006. 332 p.
5. *Luk'yanov L.G.* Dynamical evolution of stellar orbits in close binary systems with conservative mass transfer // *Astron. Rep.* 2008. V. 52. № 8. P. 680–693.
6. *Минглибаев М.Дж.* Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. LAMBERT Acad. Publ., 2012. 229 с.
7. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М.* Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами // *Программирование*. 2014. Т. 40. № 2. С. 51–59.
8. *Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M.* Evolution of the orbital-plane orientations in the two-protoplanet three-body problem with variable masses // *Astron. Rep.* 2014. V. 58. № 9. P. 667–677.
9. *Minglibayev M.Zh., Prokopinya A.N., Mayemerova G.M., Ivanova Zh.U.* Three-body problem with variable masses that change anisotropically at different rates // *Math. Comp. Sci.* 2017. V. 11. № 3–4. P. 383–391.
10. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Шомшекова С.А.* Применение компьютерной алгебры в исследованиях двухпланетной задачи трех тел с переменными массами // *Программирование*. 2019. Т. 45. № 2. С. 58–65.
11. *Minglibayev M., Prokopinya A., Shomsheikova S.* Computing perturbations in the two-planetary three-body problem with masses varying non-isotropically at different rates // *Math. Comp. Sci.* 2020. V. 14. № 2. P. 241–251.
12. *Wolfram S.* *An Elementary Introduction to the Wolfram Language*. Champaign, IL: Wolfram Media, 2015. 324 p.
13. *Прокопеня А.Н.* Решение физических задач с использованием системы Mathematica. Брест: БГТУ, 2005. 260 с.
14. *Minglibayev M.Zh., Omarov Ch.T., Ibrahimova A.T.* New forms of the perturbed motion equation // *Rep. Nation. Acad. Sci. Republ. Kazakhstan*. 2020. V. 2(330). P. 5–13.
15. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. М.: Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры, 1952. 281 с.
16. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 799 с.
17. *Рой А.Э.* Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544 с.
18. *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 656 с.
19. *Brouwer D., Clemence G.M.* *Methods of Celestial Mechanics*. N.Y.: Acad. Press, 1961. 601 p.
20. Шарлье К. Небесная механика. М.: Наука, 1966. 628 с.
21. *Murray C.D., Dermott S.F.* *Solar system dynamics*. Cambridge University Press, New York, 1999. 592 p.