

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.16

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

© 2023 г. В. П. Варин^{1,*}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: varin@keldysh.ru

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.
Переработанный вариант 25.04.2022 г.
Принята к публикации 17.09.2022 г.

Рассматривается способ суммирования рядов, который сводится к решению некоторых линейных функциональных уравнений. Частичные суммы любого числового ряда удовлетворяют очевидному разностному уравнению. Это уравнение преобразуется в функциональное уравнение на интервале $[0, 1]$ для непрерывного аргумента. Далее это уравнение либо решается явно (с точностью до произвольной константы), либо вычисляется асимптотическое разложение решения в нуле. Сумма исходного ряда определяется однозначно как константа, которая необходима для согласования асимптотического разложения решения с частичными суммами исходного ряда. Понятие предела не участвует в данной вычислительной схеме, что позволяет суммировать также расходящиеся ряды. Библ. 16. Фиг. 1.

Ключевые слова: суммирование рядов, функциональные уравнения, расходящиеся ряды.

DOI: 10.31857/S0044466923010131, **EDN:** LDWDNY

1. ВВЕДЕНИЕ

Суммирование рядов является одной из старейших задач математического анализа и берет свое начало в античности. Эта задача всегда имела два аспекта: практический, т.е. вычислительный, и теоретический, т.е. концептуальный. Иными словами, прежде чем вычислять сумму бесконечного ряда, следует условиться, что следует понимать под этой суммой.

Во времена Эйлера понятие суммы ряда не было четко определено, что давало определенный простор в толковании этого понятия и позволило просуммировать многие расходящиеся в обычном понимании ряды.

С появлением строгого понятия предела многие математики отказались от использования расходящихся рядов. Достаточно вспомнить знаменитое высказывание Абеля, который усмотрел в расходящихся рядах происки дьявола.

Однако довольно скоро выяснилось, что без расходящихся рядов никак не обойтись, что привело к созданию теории расходящихся рядов и появлению методов их суммирования (см. [1]).

В настоящее время существует обширный арсенал методов суммирования рядов, многие из которых могут суммировать также и расходящиеся ряды. Однако все эти методы (за исключением формулы Эйлера–Маклорена) сводят так или иначе исходно медленно сходящийся или расходящийся процесс к сходящемуся, предел которого и называется суммой ряда.

Формула Эйлера–Маклорена, а также значительно менее известная формула Эйлера–Буле здесь стоят особняком, так как они сводят (медленно) сходящийся ряд к расходящемуся асимптотическому. То есть эти формулы являются скорее (весьма эффективными) способами вычисления суммы исходно сходящегося ряда.

Таким образом, все существующие способы суммирования рядов, как сходящихся, так и расходящихся, используют понятие предела и определяют сумму ряда как предел некоторого сходящегося процесса, который и является алгоритмом суммирования.

В то же время сумму ряда можно определить так, что понятие предела нигде не будет использовано, что дает возможность суммировать ряды, суммы которых ранее не были определены и для которых существующие методы суммирования неприменимы. Приведем пример такого ряда.

Рассмотрим формальный ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n \tag{1}$$

и определим его сумму при $x = 1$.

При $x = -1$ сумма этого ряда равна константе Эйлера–Гомпертца $\delta = eEi(1,1)$, где $Ei()$ – это интегральная экспонента (см. разд. 5).

Если бы этот ряд сходился при $x < 1$ и $\lim_{x \rightarrow 1} y(x)$ существовал, то это был бы классический способ суммирования Абеля. Однако этот ряд всюду расходится. Причем ни один из существующих способов суммирования рядов, как то ϵ – алгоритм Винна, Паде-аппроксимации, метод Левина и его модификации, итерационный метод Айткена (см. обзор в [2] и ссылки там), а также τ – метод Ланцоша (см. [3]) и т.д., не могут вычислить его сумму.

В то же время функция $y(x)$ (формальный ряд) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x^2 y' - (1 - x)y + 1 = 0,$$

которое интегрируемо. Функция

$$y(x) = \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \left(C - Ei\left(1, -\frac{1}{x}\right)\right),$$

где C – это константа интегрирования, является общим решением этого уравнения с начальным значением $y(0) = 1$, т.е. все решения этого уравнения имеют это начальное значение и одно и то же асимптотическое разложение в нуле (так как $\exp(-1/x)$ является плоской функцией).

Общее решение $y(x)$, вообще говоря, комплекснозначно, причем аргумент функции $Ei()$ при $x \in [0,1]$ расположен в точности на разрезе комплексной плоскости $(-\infty, 0)$, где функция $Ei()$ претерпевает скачок. Константу C можно выбрать, в определенном смысле, единственно возможным разумным образом. Возьмем эту константу чисто мнимой и так, чтобы функция $y(x)$ принимала вещественные значения при $x \in \mathbb{R}_+$, т.е. возьмем в качестве решения функцию

$$y(x) = -\frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \left(i\pi + Ei\left(1, -\frac{1}{x}\right)\right).$$

Тогда в качестве суммы исходного ряда следует принять

$$y(1) = -\exp(-1) \left(i\pi + Ei(1, -1)\right) \approx 0.69717488323505.$$

Заметим, что интегральный метод суммирования Бореля здесь не применим напрямую. Но если его модифицировать и вычислять интеграл в смысле главного значения, то найденная нами константа правильно вычисляется.

Данный метод суммирования, т.е. замена числового ряда на степенной, предъявление дифференциального уравнения для его суммы с последующим интегрированием ОДУ (аналитически либо численно) – является весьма мощным средством суммирования, но имеющим весьма ограниченное применение. Нужное дифференциальное уравнение в общем случае может и не существовать. Но этот пример показывает, что сумму ряда можно, в принципе, определить, не прибегая к понятию предела.

2. СУММА РЯДА КАК КОНСТАНТА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

По аналогии с ОДУ решение разностных уравнений мы будем называть их интегрированием, а общее решение разностного уравнения будем называть первым интегралом разностного уравнения.

Эта аналогия хорошо заметна при построении непрерывных итераций дискретных аналитических отображений (см. [4]), где предъявление первого интеграла отображения эквивалентно построению непрерывных итераций и инвариантных кривых этого отображения (см. [5]).

При суммировании числового ряда его частичные суммы

$$s(n) = \sum_{k=1}^n a(k) \tag{2}$$

удовлетворяют очевидному разностному уравнению

$$s(n) - s(n-1) = a(n), \quad (3)$$

где $a(x)$ — это некоторая аналитическая функция при $x \in \mathbb{R}$, $x > \text{const}$. Это единственное ограничение, которое мы накладываем. При этом ряд может быть и знакопеременным (см. ниже).

Начальный индекс суммирования в (2) не играет никакой роли, но обычно будем брать $k = 1$.

Таким образом, вместо суммы (2), т.е. “интеграла”, предлагается изучать разностное уравнение (3), т.е. “ОДУ”. Аналогия здесь очевидна.

Отмеченная аналогия разностного уравнения и дифференциального на самом деле является весьма глубокой и хорошо изученной. Например, разностное уравнение (3) можно записать как уравнение

$$(\exp(D) - 1)s(n) = a(n+1),$$

где D — это оператор дифференцирования. Если двигаться по этому пути, то мы придем к методу суммирования Эйлера—Маклорена. Но мы сосредоточимся на разностном уравнении (3).

Разностное уравнение (3) иногда можно преобразовать в однородное трехзвенное линейное соотношение. Для линейных разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами существует весьма развитая теория, которая, в частности, позволяет вычислить асимптотику решения при $n \rightarrow \infty$. Но в общем случае проще работать с уравнением (3).

Предположим, что мы нашли какое-то решение $\tilde{s}(n)$ уравнения (3) или, что более реалистично, его асимптотику при $n \rightarrow \infty$. Функция $\tilde{s}(x)$, вообще говоря, определена теперь и при вещественных x , т.е. одновременно решена (по крайней мере локально) задача о непрерывном (либо аналитическом) продолжении дискретного отображения $n \rightarrow s(n)$.

Пусть исходный ряд (2) сходится. Тогда можно считать, что $\tilde{s}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, так как решение уравнения (3) определено лишь с точностью до константы C . В любом случае именно такую асимптотику и предлагается искать.

Таким образом, имеем два решения уравнения (3): одно дискретное (2) и одно непрерывное

$$s(x) = C + \tilde{s}(x),$$

которое, вообще говоря, может быть определено лишь асимптотически при достаточно больших x . Тогда константа интегрирования C (она же сумма ряда (2) при $n \rightarrow \infty$) однозначно восстанавливается условием согласования (т.е. равенства) частичных сумм исходного ряда со значениями функции $s(x)$ в дискретных точках $x = n \in \mathbb{N}$, т.е.

$$C = s(n) - \tilde{s}(n). \quad (4)$$

При этом, очевидно, достаточно установить это равенство только в одной (любой) точке $n = 1, 2, \dots$. Во всех остальных точках это равенство будет выполняться автоматически.

Таким образом, сумма ряда (2) при $n \rightarrow \infty$ определена однозначно, но никакого предела при этом мы не вычисляли. Задача свелась к решению разностного уравнения (3) либо к вычислению асимптотики его решения.

Разумеется, вычисление асимптотики предполагает, строго говоря, вычисление предела на каждом шаге. Но алгоритмически это чаще всего чисто алгебраическая операция.

Возьмем в качестве примера Базельскую проблему, т.е. $a(n) = 1/n^2$. Предположим, что мы ничего не знаем об этой проблеме и не умеем решать разностное уравнение (3). Но мы можем тем не менее вычислить асимптотику его решения $\tilde{s}(n)$ методом неопределенных коэффициентов, что является простой алгебраической задачей. Имеем

$$\tilde{s}(n) = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Заметим теперь, что асимптотические ряды такого рода хорошо изучены. В частности, известно, что величина погрешности при вычислении по таким рядам обычно оценивается последним отброшенным членом (см. [6]). Поэтому они суммируются до наименьшего по модулю члена.

В данном случае, если взять $n = 10$, что эквивалентно суммированию первых 10 членов исходного ряда, а затем учесть найденную асимптотическую поправку, то мы найдем константу

$C = \pi^2/6$ с шестью десятичными знаками (на самом деле, с восемью). Исходная сумма (2) при $n = 10$ дает только два десятичных разряда.

То, что мы получили, весьма напоминает метод суммирования Эйлера–Маклорена, но только без вычисления интеграла.

Другая аналогия, которая также очевидна, — это решение краевых задач методом погранслоя, когда решение получается в результате сращивания двух различных разложений, вычисленных в противоположных концах интервала.

В случае, если ряд (2) расходится в обычном смысле, это означает, что последовательность частичных сумм $\{s(n)\}$ не имеет предела при $n \rightarrow \infty$, либо стремится к бесконечности. Так же ведет себя, очевидно, и решение $\tilde{s}(n)$ уравнения (3). Однако $\tilde{s}(n)$ (вообще говоря) имеет некоторую асимптотику, которую и предлагается вычислять. Иногда можно найти и явное решение. Тогда асимптотика частичных сумм $s(n)$ и асимптотика решения $\tilde{s}(n)$ в уравнении (4) могут сократить друг друга (как разрешение неопределенности $\infty - \infty$) и сумма расходящегося в обычном смысле ряда будет однозначно определена.

Отметим, что смысл указанной операции не столько в назначении числового значения сумме расходящегося в обычном смысле ряда, сколько в установлении связи частичных сумм ряда с их асимптотическим поведением в бесконечности.

Приведем пример суммирования для $a(n) = 1/n$, т.е. для гармонического ряда. Он также не может быть просуммирован обычными средствами.

Разностное уравнение (3) для $a(n) = 1/n$ решается в явном виде. Но мы не будем этим пользоваться, а вычислим асимптотику его решения $\tilde{s}(n)$ методом неопределенных коэффициентов. Имеем

$$\tilde{s}(n) = \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right) = \ln n - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B(k)}{kn^k},$$

где $B(k)$ — это числа Бернулли.

Обозначив константу интегрирования $C = \gamma$, получаем из (4) знаменитое асимптотическое тождество Эйлера

$$\gamma = H(n) - \ln n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B(k)}{kn^k}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где $H(n)$ — это гармоническое число.

Метод суммирования, изложенный в этом разделе, нельзя назвать принципиально новым потому, что подобный подход уже использовался Раманужаном. Хотя Раманужан исходил из формулы Эйлера–Маклорена, но он также пришел к сумме ряда как к “константе Раманужана” (см. [7, pp. ix, 3]).

В следующих разделах мы приведем ряд примеров суммирования рядов, которые (как мы надеемся) покажут преимущества нашего метода. Но сперва преобразуем разностное уравнение (3) к функциональному уравнению на интервале $[0, 1]$ и дадим мотивировку этого преобразования.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СУММЫ РЯДА

Разностное уравнение (3) определено на интервале $[0, \infty]$, что может иметь иногда некоторые преимущества. Однако, как показывает опыт, функциональное уравнение на конечном интервале часто бывает удобнее.

Сделаем замену переменных в уравнении (3), $n = 1/x$, $S(x) = s(1/x)$, $A(x) = a(1/x)$ (“Man muss immer umkehren.” С.Г.Я. Якоби). Тогда получим функциональное уравнение

$$S(x) - S\left(\frac{x}{1-x}\right) = A(x). \tag{6}$$

Например, для Базельской проблемы, т.е. для $A(x) = x^2$, мы получаем уравнение, которое лишь знаком в левой части отличается от уравнения (А.7) в [9, p. 241]. Это последнее приводилось в [9] в качестве примера уравнения, решением которого является обыкновенная производящая функция для чисел Бернулли (помноженная на x).

Уравнение (6) легко преобразуется к функциональному уравнению на интервале $[0, 1]$. Для этого сделаем замену $x \rightarrow x/(1+x)$. Тогда получим уравнение

$$S\left(\frac{x}{1+x}\right) - S(x) = A\left(\frac{x}{1+x}\right). \quad (7)$$

Одно из преимуществ функциональной формы записи разностного уравнения (3) – это возможность использовать развитый аппарат вычисления степенных рядов (и более общих разложений), реализованный в системах компьютерной алгебры (CAS).

Другое не столь очевидное преимущество появляется, если уравнение (7) решать численно, например, спектральным методом. Функцию $S(x)$ можно представить, например, в виде разложения по смещенным полиномам Чебышёва. Так можно, в принципе, решить численно и с контролируемой точностью уравнение (7), т.е. вычислить сумму исходного ряда, даже если функция $A(x)$ устроена весьма сложно.

Численное решение уравнения (7) являлось первоначальной мотивировкой данного исследования. Однако это является отдельной задачей, которой мы намерены посвятить отдельную статью.

Для вычисления асимптотики решения $S(x)$ при $x \rightarrow +0$ (которая может быть весьма сложной) уравнение (7) не имеет никаких преимуществ по сравнению с уравнением (6). Так что это последнее мы и будем далее использовать.

В случае знакопеременного ряда запишем его в виде

$$s(n) = \sum_{k=1}^n a(k) \cos \pi k. \quad (8)$$

Тогда, сделав те же замены, что и ранее, и взяв $S(x) = U(x) \cos \pi/x$, получим уравнение

$$U(x) + U\left(\frac{x}{1-x}\right) = A(x) \quad (9)$$

вместо уравнения (6).

Асимптотическое решение уравнения (9) имеет некоторые незначительные отличия от решения уравнения (6). Это, как мы полагаем, выгодно отличает наш подход от классического, который в случае знакопеременных рядов приводит к (весьма малоизвестной) формуле Эйлера–Буле (см. [8]).

Заметим также, что иногда вместо множителя $\cos \pi k = (-1)^k$ следует брать множитель $\exp(i\pi k)$, который бывает нужен для аналитического продолжения дискретного отображения $n \rightarrow s(n)$.

Разностные уравнения типа (6) и (9) для достаточно простых правых частей $A(x)$ уже встречались в литературе, но в другом контексте. Так, подобные уравнения вводились в [9] комбинаторным путем для обыкновенных производящих функций чисел Бернулли и их обобщений. Многие из таких уравнений решаются в явном виде (см. [10]), хотя в [9] были даны лишь асимптотические разложения решений.

Поскольку эти уравнения линейны, то это дает возможность комбинировать уже известные решения с целью получения новых. Приведем пример суммирования ряда с использованием известных решений уравнения (6). Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(\frac{k}{k-1} \right) \right) = \gamma - 1 \quad (10)$$

и найдем его сумму нашим методом и двумя способами. Для этого ряда уравнение (6) имеет вид

$$S(x) - S\left(\frac{x}{1-x}\right) = x + \ln(1-x). \quad (11)$$

Уравнение (11) лишь знаком левой части отличается от уравнения (A.14) в [9, р. 243], для которого мы нашли явное решение в [10]. Решение уравнения (11) имеет вид

$$S(x) = x + \ln x + \Psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + O(x^6).$$

Комбинируя полученное решение и формулы (4) и (10), получаем тождество

$$\gamma = \frac{n-1}{n} + \ln n - \Psi(n) + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(\frac{k}{k-1} \right) \right) = H(n-1) - \Psi(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

которое является явным решением асимптотического тождества Эйлера (5).

Заметим теперь, что правая часть уравнения (11) записывается как

$$x + \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Решение уравнения (6) с правой частью x^{n+1} , $n \in \mathbb{N}_0$, имеет вид (см. [10])

$$S(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \Psi \left(n, 1 + \frac{1}{x} \right). \quad (13)$$

Комбинируя полученные решения и формулу (4), получаем тождество

$$\gamma = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(\frac{k}{k-1} \right) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Psi(k, n+1)}{(k+1)!}. \quad (14)$$

Используем интегральное представление функции $\Psi()$ в формуле (14):

$$\Psi(n, 1+x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln^n t}{t-1} dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда получим обобщение известной формулы для константы Эйлера:

$$\gamma = H(n) - \ln n + \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln t} + \frac{t}{1-t} \right) t^{n-1} dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что если суммировать не весь ряд (14) этим способом, а только его часть, то получим множество аналогов формулы Эйлера–Маклорена для гармонического ряда с остаточными членами в интегральной форме.

Пользуясь выражением гармонического числа через Ψ -функцию, получим (см. [2])

$$\Psi(n+1) = \frac{1}{n} + \ln n + \Gamma(n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \Gamma(n+k)} \sum_{j=0}^k \frac{S_1(k, j)}{j+1}, \quad \operatorname{Re}(n) > 0,$$

где S_1 – это числа Стирлинга первого рода.

Из этой формулы можно получить бесконечное множество разложений константы Эйлера в (сколь угодно быстро) сходящиеся ряды рациональных чисел (например, подставить $n = 2$, затем $n = 4$ и исключить $\ln 2$).

Если теперь вычесть (12) из (14) и подставить туда $n = x$, то получим тождество

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Psi(n, x+1)}{(n+1)!}, \quad x > 0. \quad (15)$$

Заметим, что ряд Тейлора для логарифма от Гамма функции дает похожее тождество

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi(n, x)}{(n+1)!}, \quad x > 0. \quad (16)$$

Если подставить $x = 1$ в формулы (15) и (16), то получим два известных (еще Эйлеру) представления константы Эйлера

$$\gamma = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1) - 1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \zeta(n+1)}{n+1}, \quad (17)$$

причем первый из этих рядов сходится значительно быстрее.

Подстановка $x = 2, 3, \dots$ в формулы (15) и (16) не дает, как легко проверить, ничего нового, так как все логарифмы $\ln n$, $n > 2$ там сокращаются.

Данный пример показывает, что решения уравнений (6) и (9), пользуясь их линейностью, можно составлять из уже известных решений. В следующем разделе мы приведем сводку формул для некоторых известных решений этих уравнений. Далее мы дадим ряд примеров суммирования рядов с их помощью.

4. РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение уравнений

$$S(x) - S\left(\frac{x}{1-x}\right) = x^{s+1} \quad (18)$$

при $s = n \in \mathbb{N}_0$ мы нашли в [10]. Это решение (13), что легко проверяется. Однако это решение не продолжается на вещественные либо комплексные s .

Уравнение (18) для произвольных s , а также другие подобные уравнения с нестандартными правыми частями можно решать с помощью подходящей замены переменных.

Для уравнения (18) следует сделать замену $S(x) = x^s V(x)$. Тогда для функции $V(x)$ получим уравнение

$$V(x) - (1-x)^{-s} V\left(\frac{x}{1-x}\right) = x,$$

которое не имеет логарифмической особенности в нуле. Для него следует использовать биномиальные тождества.

Пользуясь известным асимптотическим разложением (см., например, [10])

$$\Psi\left(n, 1 + \frac{1}{x}\right) = (-1)^{n+1} (n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} B(k) C(k+n-1, k) x^{n+k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

где $B(n)$ — это числа Бернулли и $C()$ — это биномиальный коэффициент, для произвольного комплексного $s \neq 0$, получим (с помощью аналитического продолжения) асимптотическое решение

$$S(x) = -\frac{x^s}{s} \sum_{n=0}^{\infty} B(n) C(n+s-1, n) x^n. \quad (20)$$

Для отрицательных целых s функция $S(x)$ в (20) выражается через полиномы Бернулли:

$$S(x) = \frac{(-1)^n}{n} B(n, -1/x), \quad n = -s \in \mathbb{N}.$$

Для $s = 0$ асимптотическое разложение (20) непригодно, и его следует заменить на разложение

$$S(x) = \Psi\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n)}{n} x^n. \quad (21)$$

И, наконец, все эти формулы (при $s \neq 0$) объединяет решение

$$S(x) = -\zeta\left(0, s+1, 1 + \frac{1}{x}\right),$$

где $\zeta()$ — это ζ -функция Гурвица в обозначении, принятом в Марле, т.е. где первый аргумент — это номер производной этой функции.

Последняя формула, впрочем, может быть использована скорее для вычисления функции Гурвица с использованием предыдущих формул, чем наоборот.

Перейдем к решению уравнений (9) для знакопеременных рядов.

Решение уравнения

$$U(x) + U\left(\frac{x}{1-x}\right) = x^{s+1} \quad (22)$$

для $s = n \in \mathbb{N}_0$ имеет вид

$$U(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(\Psi \left(n, 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2^n} \Psi \left(n, 1 + \frac{1}{2x} \right) \right) + \begin{cases} \ln 2, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (23)$$

Пользуясь разложением (19), получаем асимптотическое решение уравнения (22) для $s \in \mathbb{N}$, а также (аналитическим продолжением) и для произвольного комплексного $s \neq 0$:

$$U(x) = \frac{x^{-s}}{s} \sum_{n=1}^{\infty} B(n) C(n+s-1, n) (2^n - 1) x^n. \quad (24)$$

Для отрицательных целых s функция $U(x)$ в (24) выражается через полиномы Эйлера:

$$U(x) = \frac{(-1)^n}{2} E(n, -1/x), \quad n = -s - 1 \in \mathbb{N}_0,$$

что соответствует появлению этих полиномов в формуле Эйлера–Буле для знакопеременных рядов (см. [7, р. 135] и [8]).

Для $s = 0$ асимптотическое разложение (24) непригодно, и его следует заменить на разложение

$$U(x) = \ln 2 - \Psi \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \Psi \left(1 + \frac{1}{2x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n)(1 - 2^n)}{n} x^{-n}.$$

И, наконец, все эти формулы (при $s \neq 0$) объединяет решение

$$U(x) = \zeta \left(0, s + 1, 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2^s} \zeta \left(0, s + 1, 1 + \frac{1}{2x} \right).$$

Приведенные формулы позволяют суммировать обычный ряд для ζ -функции Римана во всей комплексной плоскости, кроме особой точки. Сращивая частичные суммы с асимптотическим разложением, по формуле (4) получаем:

$$\zeta(s+1) = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{s+1}} + \frac{1}{sm^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n)C(n+s-1, n)}{m^n}, \quad s \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Данный ряд всюду расходится, но если его суммировать до наименьшего по модулю члена, то функцию Римана можно вычислять по формуле (25) в любой точке $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$ с контролируемой точностью. Причем при выбранном s чем больше m , тем больше членов ряда можно использовать.

Формула (25) аналогична той, которая получается по формуле Эйлера–Маклорена, и которая ранее была основным вычислительным инструментом для функции Римана (см. [11]).

При целых отрицательных s ряд в (25) обрывается, и мы получаем известную формулу

$$\zeta(s+1) = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{s+1}} + B(-s, m+1)/s, \quad -s \in \mathbb{N},$$

которая дает $\zeta(0) = -1/2$, а также рациональные значения функции $\zeta(s+1)$ в точках $s = -2k$ и тривиальные нули в точках $s = -2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

И, наконец, при $s \in \mathbb{N}_0$ формула (25) принимает вид

$$\zeta(s+1) = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{s+1}} - \frac{(-1)^s \Psi(s, 1+m)}{s!}, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

где

$$\zeta(s) = \begin{cases} \gamma, & s = 1, \\ \zeta(s), & s \in \mathbb{N}, \quad s > 1. \end{cases} \quad (26)$$

Расходящийся асимптотический ряд (25) можно преобразовать в сходящийся факториальный ряд, причем двумя способами (см. [2], [10]). Однако, как мы полагаем, факториальные сходящиеся ряды в данном случае не дают никаких преимуществ.

Рассмотрим преобразование степенных рядов, которое (насколько нам известно) не описано в литературе, но может быть полезно для решения разностных уравнений, которые мы рассматриваем.

Асимптотический ряд (19) можно записать следующим образом:

$$\Psi\left(n, 1 + \frac{1}{x}\right) = (-1)^{n+1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{B(k-n)(k-1)!}{(k-n)!} x^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (27)$$

что можно рассматривать как бесконечную треугольную матрицу, преобразующую вектор $\langle x, x^2, \dots \rangle^T$ в вектор функций $\Psi()$. Эта матрица обратима для любого порядка главного минора. Можно проверить, что мы получим сходящиеся ряды

$$x^n = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-n+1)!} \Psi\left(k, 1 + \frac{1}{x}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \quad (28)$$

что, кстати, дает еще одно представление для чисел Бернулли в матричной форме.

Формула (28) позволяет получать необычные разложения. Например,

$$\ln(1+x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \Psi\left(2k-1, 1 + \frac{1}{x}\right), \quad \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k) - 1}{k}.$$

Однако использование формулы (28) в (25) ($x = 1/m$) дает лишь другой асимптотический ряд.

5. ПРИМЕРЫ СУММИРОВАНИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Мы уже привели несколько примеров суммирования для сходящихся и расходящихся знакопостоянных рядов. Дадим примеры суммирования некоторых расходящихся знакопеременных рядов.

Рассмотрим ряд

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n. \quad (29)$$

Суммирование этого ряда приводилось в [12] как демонстрация эффективности предложенного численного алгоритма. Заметим, что Maple также без труда находит численное значение суммы этого ряда, которое оказывается равным

$$g = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 0.225791352644727.$$

Эвристически угадать это значение можно из представления функции Римана

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Если продифференцировать это тождество по s и подставить туда $s = 0$ (что, вообще-то, незаконно), то получим как раз нужное значение. Таким образом, ряд (29) “помнит” о своем происхождении.

Покажем, что ряд (29) суммируется нашим способом в явном виде (чего Maple сделать не может).

Действуя описанным в разд. 3 способом, получаем функциональное уравнение

$$U(x) + U\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\ln x.$$

Сделаем в нем подстановку $U(x) = V(x) + W(x) \ln x$. Тогда получим уравнение

$$V(x) + V\left(\frac{x}{1-x}\right) - W\left(\frac{x}{1-x}\right) \ln(1-x) = -\left(W(x) + W\left(\frac{x}{1-x}\right) + 1\right) \ln x.$$

Правая часть этого уравнения обнуляется при $W(x) \equiv -1/2$. Поэтому получаем уравнение

$$V(x) + V\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\frac{1}{2}\ln(1-x).$$

Заметим теперь, что последнее уравнение мы получили бы описанным в разд. 3 способом из сходящегося ряда. Поэтому

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 - \frac{x}{1+nx}\right).$$

Обычно CAS не может суммировать такие ряды. Поэтому преобразуем его к виду

$$\exp(2V(x)) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + (2n-1)x)^2}{(1 + (2n-2)x)(1 + 2nx)}.$$

Это произведение вычисляется в явном виде. Получаем

$$V(x) = \ln \Gamma\left(\frac{1}{2x}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2}\ln(2x), \quad x > 0.$$

Заметим, что если бы целью являлось численное решение задачи (с неограниченной точностью), то мы могли бы вычислить асимптотическое разложение решения методом неопределенных коэффициентов, т.е.

$$V(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{20}x^5 - \frac{17}{112}x^7 + \frac{31}{36}x^9 - \frac{691}{88}x^{11} + \dots$$

Появление числа 691 в асимптотическом разложении $V(x)$ является явным индикатором того, что в нем присутствуют числа Бернулли и данное разложение расходится. Поэтому другой способ просуммировать такие ряды – это найти достаточно много коэффициентов асимптотического разложения, угадать их явный вид и применить средства CAS. В данном случае

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(2n)(4^n - 1)}{2n(2n-1)} x^{2n-1}.$$

Собирая полученные формулы и применяя формулу (4), получаем сумму ряда (29) g , как и ожидалось.

Однако, как мы отмечали, суммирование расходящегося в обычном смысле ряда имеет вполне прозаический смысл. В данном случае мы нашли частичную сумму ряда (29) в замкнутой форме (чего Maple сделать не может), а также получили аналитическую интерполяцию частичных сумм ряда (29). Эта формула имеет вид

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \ln k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \left(\ln \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n^2}{2}\right)\right) \cos(\pi n).$$

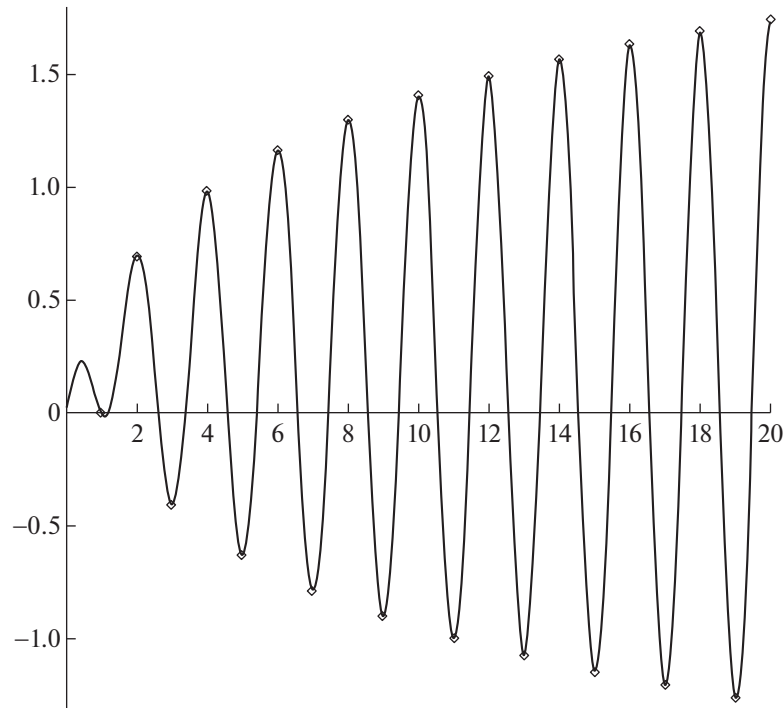
На фиг. 1 показаны график частичных сумм ряда (29) в дискретных точках и график их интерполяции по данной формуле.

В завершение этого примера отметим, что найденная нами функция $V(x)$, которая описывает асимптотическое поведение частичных сумм ряда (29) при $n \rightarrow \infty$, связана с тангенциальными числами следующей формулой:

$$xV'(x) = \frac{1}{2}T\left(\frac{1}{2}x\right),$$

где $T(x)$ – это обыкновенная производящая функция тангенциальных чисел, для которой мы нашли аналитическое представление (см. [10]). Цепная дробь производящей функции тангенциальных чисел дана в [9, р. 257].

Нам удалось просуммировать нашим способом все ряды, приведенные в [12] в качестве примеров применения численного алгоритма в [12]. Если принять в качестве постулата, что суммирование асимптотических рядов следует производить до наименьшего по модулю члена (что требует отдельного исследования в каждом конкретном случае), то наш метод суммирует эти ряды с произвольной точностью и, по сути, алгебраическими средствами, программируемыми в CAS.



Фиг. 1. Частичные суммы ряда (29) и их интерполяция.

Применим наш метод к классическому ряду (1) при $x = -1$, т.е. найдем константу Эйлера–Гомпертца $\delta = e\text{Ei}(1,1)$.

Действуя описанным в разд. 3 способом, получаем функциональное уравнение

$$U(x) + U\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{x}\Gamma\left(\frac{1}{x}\right).$$

Сделаем в нем подстановку $U(x) = \Gamma(1 + 1/x)W(x)$. Тогда для $W(x)$ получим уравнение

$$W(x) + xW\left(\frac{x}{1-x}\right) = 1. \quad (30)$$

Данное уравнение отличается от стандартных функциональных уравнений, которые мы рассматривали, но алгоритмически (и асимптотически) решается тем же способом. Получаем

$$W(x) = 1 - x + x^2 - x^4 - x^5 + 2x^6 + 9x^7 + 9x^8 - 50x^9 - 267x^{10} + O(x^{11}).$$

Последовательность целых коэффициентов этого разложения можно найти в энциклопедии целых последовательностей (см. [13, A000587]). Она связана с числами Белла. С помощью формулы суммирования Бореля получаем

$$W(x) = 1 - x \int_0^{\infty} \exp(-t) \exp(1 - \exp(tx)) dt, \quad x > 0. \quad (31)$$

Фактически мы уже решили задачу. Однако Maple не может вычислить данный интеграл в явном виде при произвольном $x > 0$. Поэтому применим еще один способ решения функционального уравнения (30), который обладает большей универсальностью.

Сделаем в уравнении (30) замены, обратные тем, которые мы применили в начале разд. 3. Тогда получим из (30) полиномиальное разностное уравнение

$$nw(n) + w(n-1) = n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (32)$$

Maple умеет решать такие уравнения в явном виде. Получаем

$$w(n) = \frac{n - 1 + e\text{Ei}(n, 1)}{n} + (-1)^n \frac{e\text{Ei}(1, 1) - 1 + w(0)}{\Gamma(n + 1)},$$

где $w(0)$ – это начальное значение рекурсии (32).

Осциллирующая часть этого выражения удовлетворяет однородному уравнению (32). Но осциллирующей части здесь не должно быть, так как она учтена при выводе уравнения (30). Поэтому необходимо взять $w(0) = 1 - e\text{Ei}(1, 1)$.

Таким образом, имеем еще одно решение уравнения (30):

$$W(x) = 1 - x + xe \text{Ei}\left(\frac{1}{x}, 1\right).$$

Это решение совпадает с предыдущим, т.е. мы вычислили в явном виде преобразование Лапласа в (31) (чего Maple сделать не может). Константа $w(0)$ определилась бы также из совпадения этих решений.

Собирая полученные формулы и применяя формулу (4), получаем интерполяционную формулу для суммы ряда (1) при $x = -1$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k! = \delta + n! \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{e\text{Ei}(n, 1)}{n} \right) \cos(\pi n),$$

где $\delta = e\text{Ei}(1, 1)$ – это принятая сумма данного ряда, т.е. константа Эйлера–Гомпертца.

Таким образом, как мы отмечали, сумма расходящегося ряда – это некоторая однозначно определяемая константа, необходимая для согласования дискретной последовательности частичных сумм ряда с их непрерывной (либо аналитической) интерполяцией в бесконечности. С этой точки зрения никакого различия между сходящимися и расходящимися рядами нет.

6. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА В ВИДЕ СХОДЯЩЕГОСЯ РЯДА

Здесь мы рассмотрим пример суммирования расходящегося знакопостоянного ряда, который приводит к формуле Стирлинга в виде сходящегося ряда полигамма функций.

Рассмотрим ряд

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \ln n. \tag{33}$$

Суммирование этого ряда с помощью формулы Эйлера–Маклорена дает асимптотическую формулу Стирлинга для факториала.

Ряд (33) также “помнит” о своем происхождении, что видно, если продифференцировать ряд для функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > 1,$$

и подставить туда $s = 0$ (что, разумеется, незаконно). Тогда получим

$$h = -\zeta'(0) = \frac{1}{2} \ln(2\pi) \approx 0.918938533204,$$

но мы не будем этим пользоваться.

Действуя описанным в разд. 3 способом, получаем функциональное уравнение

$$S(x) - S\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\ln x.$$

Сделаем в нем подстановку $S(x) = V(x) + W(x) \ln x$. Тогда получим уравнение

$$V(x) - V\left(\frac{x}{1-x}\right) + W\left(\frac{x}{1-x}\right) \ln(1-x) = -\left(W(x) - W\left(\frac{x}{1-x}\right) + 1\right) \ln x.$$

Правая часть этого уравнения обнуляется при $W(x) = -1/x$. Поэтому получаем уравнение

$$V(x) - V\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

Далее мы можем применить асимптотические формулы (20) и (21) и собрать с их помощью асимптотическое решение для функции $V(x)$. Но мы применим формулу (13) и получим функцию $V(x)$ в виде сходящегося ряда.

Комбинируя найденные решения и формулу (4), получаем сумму ряда (33)

$$h = \sum_{k=1}^n \ln k + n(1 - \ln n) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Psi(k, n+1)}{(k+2)!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда, подставив $n = 1, 2, \dots$, можно получить (с помощью Maple) численное значение константы h .

Чтобы получить точное значение, запишем эту формулу в виде

$$h - \ln \Gamma(n+1) - n(1 - \ln n) + \frac{1}{2} \Psi(n+1) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Psi(k, n+1)}{(k+2)!}.$$

Правая часть этого выражения стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, а левая часть имеет асимптотическое разложение

$$h - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{6n} - \frac{1}{24n^2} + \dots,$$

поэтому $h = -\zeta'(0)$, как мы нашли в начале этого раздела.

Таким образом, получаем вариант формулы Стирлинга в виде сходящегося ряда

$$\ln \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \ln(2\pi) - x(1 - \ln x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Psi(k, x+1)}{(k+2)!}, \quad \operatorname{Re}(x) \geq 0. \quad (34)$$

Данная формула справедлива и при $x = 0$, если перейти к пределу. Тогда получим тождество

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)(k+2)}.$$

Этот медленно сходящийся ряд можно ускорить с помощью метода Куммера.

Формулу (34) можно преобразовать в обычный асимптотический ряд Стирлинга с помощью преобразования (27), сделав в нем замену $x \rightarrow 1/x$. Однако существует более общее преобразование, включающее логарифм и функцию $\Psi(0, x) = \Psi(x)$.

Рассмотрим две бесконечные верхне-треугольные матрицы

$$P = \left| \frac{(-1)^k}{(k-n+1)!} \right|_{1 \leq n \leq k}, \quad Q = \left| \frac{(-1)^n B(k-n)}{(k-n)!} \right|_{1 \leq n \leq k}.$$

Тогда можно проверить, что $P = Q^{-1}$ и $Q = P^{-1}$ формально. Причем это справедливо для любого главного минора.

Рассмотрим также два бесконечных вектора

$$X = \left\langle -\ln x, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{2}{x^3}, \dots, \frac{(n-1)!}{x^n}, \dots \right\rangle^T, \quad Y = \langle \Psi(n-1, x+1) \rangle_{1 \leq n}^T.$$

Тогда можно проверить, что $Y = Q \cdot X$ и $X = P \cdot Y$ формально. Причем компоненты Y — это асимптотические ряды, а компоненты X — это сходящиеся ряды. См. формулы (15), (28).

Применив преобразование P к ряду (34), получим (после некоторых преобразований) формулу Стирлинга в асимптотической форме:

$$\ln \Gamma(x + 1) = \frac{1}{2} \ln(2\pi) - x(1 - \ln x) + \frac{1}{2} \ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B(k + 1)}{k(k + 1)x^k}. \quad (35)$$

Мы получили формулу Стирлинга в классической форме. Ей посвящено большое количество исследований. Расходящийся ряд в (35) – это функция Бине (Binet) $J(x)$ (или $\mu(x)$). Она имеет интегральное представление

$$J(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B(k + 1)}{k(k + 1)x^k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \left(\frac{1}{1 - \exp(-2\pi t)} \right) \frac{x dt}{x^2 + t^2}.$$

Другое интегральное представление функции Бине можно получить из формулы (34), заменив полигамма функции на их интегральные представления, как мы делали в разд. 3.

Расходящийся ряд в формуле (35) также можно преобразовать к сходящимся факториальным рядам (см. [2], [10]). Однако это не дает никаких преимуществ, так как в коэффициентах факториальных рядов не удастся выявить никаких закономерностей.

Эта же проблема возникает, если преобразовать ряд в (35) в (сходящуюся) цепную дробь, что делал еще Стилтес (см., например, [14] и ссылки там) и нашел этот процесс “trés rénible”.

Если дифференцировать формулу (35) по x , то мы получим известные асимптотические разложения для полигамма функций. Однако и для них, за исключением $\Psi(1, x + 1)$ и $\Psi(2, x + 1)$, не удастся получить цепные дроби с “квазипериодической” структурой (см. также [2]).

Для факториальных рядов та же картина, за исключением ряда для $\gamma = -\Psi(1)$, который мы нашли в [2] и который имеет хотя и сложную, но предсказуемую структуру.

Если же дифференцировать формулу (34) по x , то мы получим сходящиеся разложения полигамма функций. Поскольку значения этих функций в натуральных аргументах выражаются с помощью ζ -функции Римана, то мы получаем бесконечный набор тождеств для ζ -функции Римана. Введем вектор-функцию

$$W = \langle w(n) \rangle_{1 \leq n}^T, \quad w(n) = \frac{\zeta(n) - 1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\zeta(n)$ определена в (26). Тогда получим $G = A \cdot W$ и $W = A^{-1} \cdot G$, где A и A^{-1} – это бесконечные верхне-треугольные матрицы

$$A = \left| \frac{j!}{(j - i + 1)!} \right|_{1 \leq i \leq j}, \quad A^{-1} = \left| \frac{B(j - i)}{i!(j - i)!} \right|_{1 \leq i \leq j},$$

а вектор G имеет вид

$$G = \langle 0, 1, 1, 2, 6, \dots, (i - 2)!, \dots \rangle^T.$$

Например, первая компонента вектора G даст первую формулу (17), следующие компоненты дадут

$$\sum_{j=2}^{\infty} (\zeta(j) - 1) = 1, \quad \sum_{j=3}^{\infty} (\zeta(j) - 1)(j - 1) = 1, \quad \sum_{j=4}^{\infty} (\zeta(j) - 1)(j - 1)(j - 2) = 2, \dots$$

Эти формулы, вероятно, известны, но мы не смогли найти их в литературе.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили метод суммирования сходящихся и расходящихся рядов, который является аналогом методов Эйлера–Маклорена и Эйлера–Буле, но проще их в реализации и выводе. Метод ориентирован на использование имеющегося весьма развитого инструментария CAS и позволяет в ряде случаев суммировать ряды чисто алгебраическими средствами.

Понятие суммы ряда получило толкование, которое не использует понятие предела, что позволяет рассматривать сходящиеся и расходящиеся (в обычном смысле) ряды с единой позиции.

Основной вычислительной задачей при этом является вычисление асимптотических разложений решений некоторых классов функциональных уравнений. Эта задача в общем случае является весьма сложной и малоисследованной, но во многом аналогична задаче вычисления асимптотических разложений решений ОДУ.

В частности, помимо обычных асимптотических рядов, которые мы получали в данной статье, могут появляться т.н. ψ -ряды (см. [15]), а также более сложные разложения, известные под названием “трансряды” (см. [16]). Развитие этой теории тесно связано с развитием CAS.

Суммирование медленно сходящихся рядов со сложно устроенным общим членом было бы, вероятно, непрактично осуществлять с помощью асимптотических разложений. Однако наш метод суммирования позволяет сделать это численно, путем численного решения соответствующих функциональных уравнений.

К этой теме мы намерены вернуться в одной из следующих публикаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Ленанд, 1951.
2. Варин В.П. Преобразование последовательностей в доказательствах иррациональности некоторых фундаментальных констант // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 9. С. 3–30.
3. Lanczos C. Applied Analysis. Dover Publications. New-York, 1956.
4. Варин В.П. Об интерполяции некоторых рекуррентных последовательностей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 913–925.
5. Варин В.П. Инвариантные кривые некоторых дискретных динамических систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 2. С. 199–216.
6. Olver F.W.J. Asymptotics and special functions. Acad. Press, New-York, 1974.
7. Candelpergher B. Ramanujan Summation of Divergent Series. Lecture Notes in Math., Springer. 2017.
8. Borwein J.M., Calkin N.J., Manna D. Euler–Boole Summation Revisited // The American Mathematical Monthly. 2009. V. 116. № 5. P. 387–412.
9. Arakawa T., Ibukiyama T., Kaneko M. Bernoulli Numbers and Zeta Functions. Springer, Japan. 2014.
10. Варин В.П. Факториальное преобразование некоторых классических комбинаторных последовательностей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 59. № 6. С. 1747–1770.
11. Borwein J.M., Bradley D.M., Crandall R.E. Computational strategies for the Riemann zeta function // J. of Computational and Applied Mathematics. 2000. V. 121. P. 247–296.
12. Cohen H., Villegas F.R., Zagier D. Convergence Acceleration of Alternating Series // Experimental Mathematics. 2000. V. 9. № 1. P. 3–12.
13. Sloane online encyclopedia of integer sequences. (<http://oeis.org>).
14. Char B.W. On Stieltjes’ Continued Fraction for the Gamma Function // MATHEMATICS OF COMPUTATION. 1980. V. 34. № 150. P. 547–551.
15. Hille E. Ordinary differential equations in the complex domain. New-York: John Wiley & Sons. (1976).
16. Edgar G.A. Transseries for beginners // [arxiv:0801.4877v5], (2009). (<http://arxiv.org/abs/0801.4877v5>).