

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 533.6.011

КОЭФФИЦИЕНТ АНАЛОГИИ РЕЙНОЛЬДСА
В ПРОДОЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ КУЭТТА:
ОТ РЕЖИМА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ
ДО СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОГО© 2023 г. А. А. Абрамов¹, В. Ю. Александров¹, А. В. Бутковский^{1,*}¹ 140180 Жуковский, М.о., ул. Жуковского, 1, ЦАГИ, Россия

*e-mail: albutkov@mail.ru

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.
Переработанный вариант 26.07.2022 г.
Принята к публикации 10.10.2022 г.

Рассмотрено течение Куэтта газа для цилиндрической геометрии ограничивающих поверхностей, движущихся в продольном направлении относительно их оси симметрии. Для одноатомного газа исследована связь (аналогия Рейнольдса) между напряжением трения и потоком энергии, передаваемым обтекаемой поверхностью. В случае течения сплошной среды и в случае свободномолекулярного течения в явном виде получены простые аналитические выражения для коэффициента аналогии Рейнольдса, зависящие только от числа Эккерта и не зависящие от отношения радиусов цилиндров. Для различных значений числа Кнудсена с помощью метода прямого статистического моделирования (DSMC) изучен переходный режим течения. Показано, что в этом случае коэффициент аналогии Рейнольдса при фиксированных значениях отношения радиусов и числа Кнудсена зависит от относительной скорости и температур поверхностей главным образом через число Эккерта. Найдено соотношение между погонными потоками энергии, передаваемой цилиндрическим поверхностям. Библ. 17. Фиг. 7.

Ключевые слова: аналогия Рейнольдса, продольное цилиндрическое течение Куэтта, число Эккерта, число Кнудсена, прямое статистическое моделирование.

DOI: 10.31857/S0044466923020023, EDN: BRDVJQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Для плоского течения Куэтта, описываемого в рамках уравнений Навье–Стокса, связь между напряжением трения и потоком энергии, передаваемых пластине (аналогия Рейнольдса) хорошо известна при любом соотношении температур пластин [1], [2]. В случае одинаковых температур пластин этот результат означает, что потоки энергии, передаваемые пластинам, равны друг другу и равны половине произведения напряжения сдвига и относительной скорости пластин [1–3]. В настоящее время с развитием нанотехнологий возрастает интерес к передаче тепла в микроканалах [4–7]. В этой связи представляют интерес и исследования аналогии Рейнольдса для течений разреженного газа. Аналогия Рейнольдса при сверхзвуковом обтекании пластины потоком разреженного газа рассматривалась в [8], [9], а при обтекании затупленного тела в [10]. Аналогия Рейнольдса для течения Рэлея разреженного газа исследовалась в [11]. Плоское течение Куэтта разреженного газа рассматривалось в работе [12], в которой численно (с точностью до статистической флуктуации) показано, что единственными параметрами подобия для коэффициента аналогии Рейнольдса во всех рассмотренных случаях являются числа Эккерта Ec и Кнудсена Kn . В данной работе анализируются различные режимы течения продольного цилиндрического течения Куэтта. Целью статьи является исследование свойств аналогии Рейнольдса и свойств отношений величин погонных потоков энергий, передаваемых граничным поверхностям.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается установившееся течение Куэтта разреженного одноатомного газа между двумя соосными цилиндрами. Внутренний цилиндр радиуса r_1 и температуры T_1 находится в по-

кое. Внешний цилиндр радиуса r_2 и температуры T_2 движется со скоростью u_{rel} параллельной оси z . Средняя плотность газа и средняя числовая плотность газа равны соответственно ρ_{av} и n_{av} .

Для рассматриваемой конфигурации течение газа описывается уравнением Больцмана для функции распределения молекул по скоростям f , записанным в цилиндрической системе координат (r, φ, z) :

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = J(f, f'), \quad (1)$$

где r – расстояние от оси z , φ – азимутальная координата, а z -ось цилиндрической системы координат совпадает с общей осью цилиндров. Считаем, что молекулы отражаются от поверхностей диффузно с температурой, равной температуре поверхности:

$$f = f_1 = n_1 (2\pi R_{gas} T_1)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}{2R_{gas} T_1} \right], \quad v_r > 0, \quad r = r_1, \quad (2)$$

$$f = f_2 = n_2 (2\pi R_{gas} T_2)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_r^2 + v_\varphi^2 + (v_z - u_{rel})^2}{2R_{gas} T_2} \right], \quad v_r < 0, \quad r = r_2. \quad (3)$$

Здесь $J(f, f')$ – интеграл столкновений молекул [13]; v_r, v_φ , и v_z – компоненты скоростей молекул в цилиндрической системе координат; R_{gas} – газовая постоянная, параметры функции распределения n_1 и n_2 находятся из условий баланса между падающими и отраженными молекулами. Используется молекулярная модель “твердые сферы”. Для этой модели средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = (\sqrt{2} n_{av} \sigma_{sp})^{-1}$, где σ_{sp} – сечение столкновения. Изучается поведение напряжения трения и потока энергии $P_{zr}(r), E(r)$:

$$P_{zr}(r) = \int m v_z v_r f(\mathbf{v}, r) d\mathbf{v}, \quad E(r) = \int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r) d\mathbf{v},$$

где $d\mathbf{v} = dv_r dv_\varphi dv_z$, m – масса молекулы.

3. ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Напряжения сдвига $P_{zn1}(r), P_{zn2}(r)$ и потоки энергии, передаваемые цилиндрам E_1, E_2 равны:

$$P_{zn1} = -P_{zr}(r_1), \quad P_{zn2} = P_{zr}(r_2), \quad (4)$$

$$E_1 = -E(r_1), \quad E_2 = \int v_r \frac{m[v_r^2 + v_\varphi^2 + (v_z - u_{rel})^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v}. \quad (5)$$

Величина потока энергии зависит от выбора системы координат. Здесь и далее под “потоком энергии, передаваемым цилиндру”, как и в [14], понимается поток энергии в системе координат, связанной с цилиндром. Это значение совпадает со скоростью изменения внутренней энергии цилиндра на единицу площади, если другая сторона поверхности цилиндра термически изолирована.

Взяв моменты в уравнении Больцмана, можно получить уравнения баланса для продольного импульса и энергии:

$$\frac{d}{dr} (r P_{rz}(r)) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dr} (r E) = 0. \quad (7)$$

Интегрируя (6), находим с учетом (4), что напряжение сдвига на внешнем цилиндре пропорционально напряжению сдвига на внутреннем цилиндре:

$$P_{zn2} = -P_{zn1}/\beta, \quad (8)$$

где $\beta = r_2/r_1$.

Используя условие непроницаемости, легко убедиться, что

$$\int_{V_r} \frac{m[v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} = \int_{V_r} \frac{m[v_r^2 + v_\phi^2 + (v_z - u_{rel})^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} + u_{rel} \int m v_r v_z f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} - m u_2^2 \int_{V_r} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} = E_2 + P_{nz2} u_{rel}.$$

Интегрируя (7), находим, что

$$\int_{V_r} \frac{m[v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} = \beta \int_{V_r} \frac{m(v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v}.$$

Таким образом, с учетом (5) получаем

$$E_2 = -\frac{E_1}{\beta} + \frac{P_{zn1}}{\beta} u_{rel}. \tag{9}$$

Далее исследуется коэффициент аналогии Рейнольдса для внутреннего цилиндра, определяемый по формуле:

$$R = \frac{E_1}{P_{zn1} u_{rel}}.$$

Используя соотношения (8) и (9), можно легко выразить через R аналогичный коэффициент аналогии Рейнольдса для внешнего цилиндра.

4. РЕЖИМ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНЫЙ РЕЖИМ

В режиме сплошной среды ($Kn \rightarrow 0$) краевая задача для уравнения Больцмана (1)–(3) сводится к краевой задаче для уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{dp}{dr} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \mu \frac{du}{dr} \right) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r k \frac{dT}{dr} + r \mu \frac{du}{dr} \right) = 0 \tag{12}$$

с граничными условиями прилипания на цилиндрах

$$u(r_1) = 0; \quad u(r_2) = u_{rel}. \tag{13}$$

Здесь u , p и T – скорость, давление и температура газа соответственно; μ – коэффициент динамической вязкости, k – коэффициент теплопроводности.

Коэффициент аналогии Рейнольдса для плоского течения Куэтта получен в [1], [2]. После несложных преобразований соответствующее соотношение из [1], [2] принимает вид

$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{Pr Ec}.$$

Здесь $Pr = \mu c_p / k$ – число Прандтля; c_p – теплоемкость при постоянном давлении. Для одноатомного газа $c_p = 5R/2$, $Pr = 0.661$; $Ec = u_{rel}^2 / [c_p (T_1 - T_2)]$ – число Эккерта.

Результаты [1], [2] легко обобщаются на случай продольного цилиндрического течения Куэтта. Действительно, из (12), (13) следует, что

$$k \frac{dT}{dr} + \mu u \frac{du}{dr} = \frac{r_1 E_1}{r}. \tag{14}$$

Так как число Прандтля постоянно, из (14) следует, что

$$k \frac{dT}{dr} + \mu u \frac{du}{dr} = \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{c_p T}{Pr} + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{r_1 E_1}{r}. \tag{15}$$

Интегрируя (15) по радиусу от r_1 до r_2 , получаем

$$c_p (T_2 - T_1) + \frac{\text{Pr } u_{\text{rel}}^2}{2} = \text{Pr } r_1 E_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\mu(T(r))r}.$$

Принимая во внимание, что

$$u_{\text{rel}} = r_1 P_{\text{znl}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\mu(T(r))r},$$

находим

$$c_p (T_2 - T_1) + \frac{\text{Pr } u_{\text{rel}}^2}{2} = \frac{\text{Pr } u_{\text{rel}} E_1}{P_{\text{znl}}}.$$

В результате получаем, что:

$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{\text{Pr } E_c}. \quad (16)$$

Свободномолекулярное продольное цилиндрическое течение Куэтта изучалось в [15]. Из результатов [15], для коэффициента аналогии Рейнольдса следует формула:

$$R = \frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{E_c}, \quad (17)$$

где κ – показатель адиабаты. Для одноатомного газа $\kappa = 5/3$.

Таким образом, для продольного цилиндрического течения Куэтта коэффициент аналогии Рейнольдса, как в режиме сплошной среды, так и в свободномолекулярном режиме, не зависит от величины отношения радиусов цилиндров β и совпадает с соответствующим значением коэффициента аналогии Рейнольдса для плоского течения Куэтта.

5. ПЕРЕХОДНЫЙ РЕЖИМ

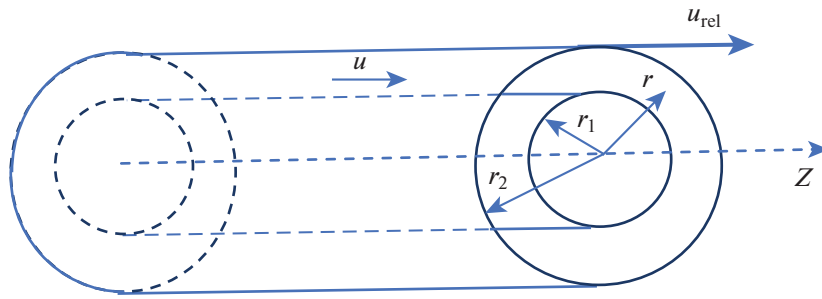
Из анализа размерностей следует, что коэффициент аналогии Рейнольдса зависит не более чем от трех безразмерных переменных:

$$t = \frac{T_1}{T_2}, \quad U = \frac{u_{\text{rel}}}{c}, \quad \text{Kn} = \frac{\lambda}{L}, \quad \text{где } c = \sqrt{2R_{\text{gas}} T_2}, \quad L = r_2 - r_1.$$

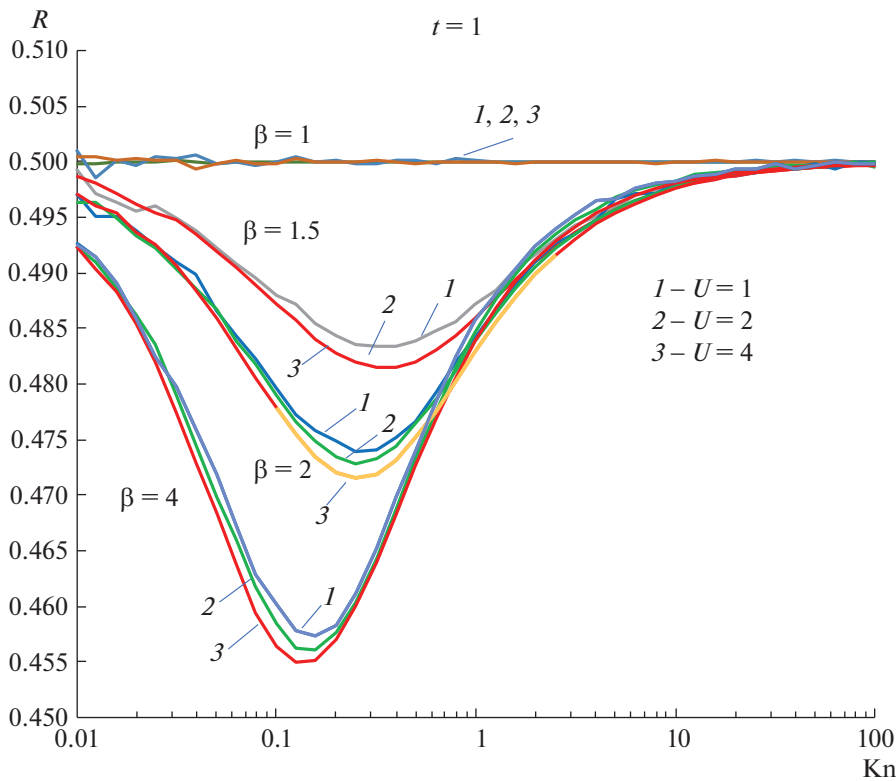
Как показано в разд. 4, в режиме сплошной среды и свободномолекулярном режиме T_1 , T_2 и u_{rel} влияют на коэффициент аналогии Рейнольдса только через число Эккерта. В [12] численно показано, что это же свойство справедливо (с точностью до статистических флуктуаций) и во всех рассмотренных в [12] случаях переходного режима плоского течения Куэтта. Выясним, в какой мере обладает этим свойством продольное цилиндрическое течение Куэтта.

Для этого численно методом прямого статистического моделирования [14] решим задачу Куэтта (1)–(3) при разных значениях T_1 , T_2 , u_{rel} , но при одних и тех же числах Эккерта. Мы используем схему Берда [14], [16]. Пространство между цилиндрическими поверхностями разбивается на ячейки. Размер ячеек варьируется от $\lambda t / (6U)$ для $U > 1$, $t < 1$, до $\lambda/6$ при $U \leq 1$, $t \geq 1$. Число моделирующих молекул в ячейке варьируется от 100 до 1000. Шаг по времени варьируется от $\lambda t / (6Uc)$ для $U > 1$, $t < 1$ до $\lambda / (6c)$ при $U \leq 1$, $t \geq 1$. Количество отражений молекул от внутреннего цилиндра составляет 64000000. Погрешность вычислений в основном менее 1%. Расчеты проводились на персональном компьютере Intel Core i7, 3.5 ГГц. Время расчета зависит от местного числа Кнудсена вблизи внешнего цилиндра и обычно варьируется от получаса до суток.

Рассмотрим вначале важный случай равных температур, т.е. $T_1 = T_2$. Как видно из (16) и (17), в свободномолекулярном пределе, также как и в навье-стоксовом $R = 1/2$, при любом β . Зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Кнудсена в диапазоне от 0.01 до 100 для $t = 1$ и различных U и β приведены на фиг. 2. Аналогия Рейнольдса близка к 1/2 для всех рассмотренных β , но, в отличие от плоского случая ($\beta = 1$), она не равна 1/2. По мере увеличения β значение R уменьшается.



Фиг. 1. Схема продольного цилиндрического течения Куэтта.

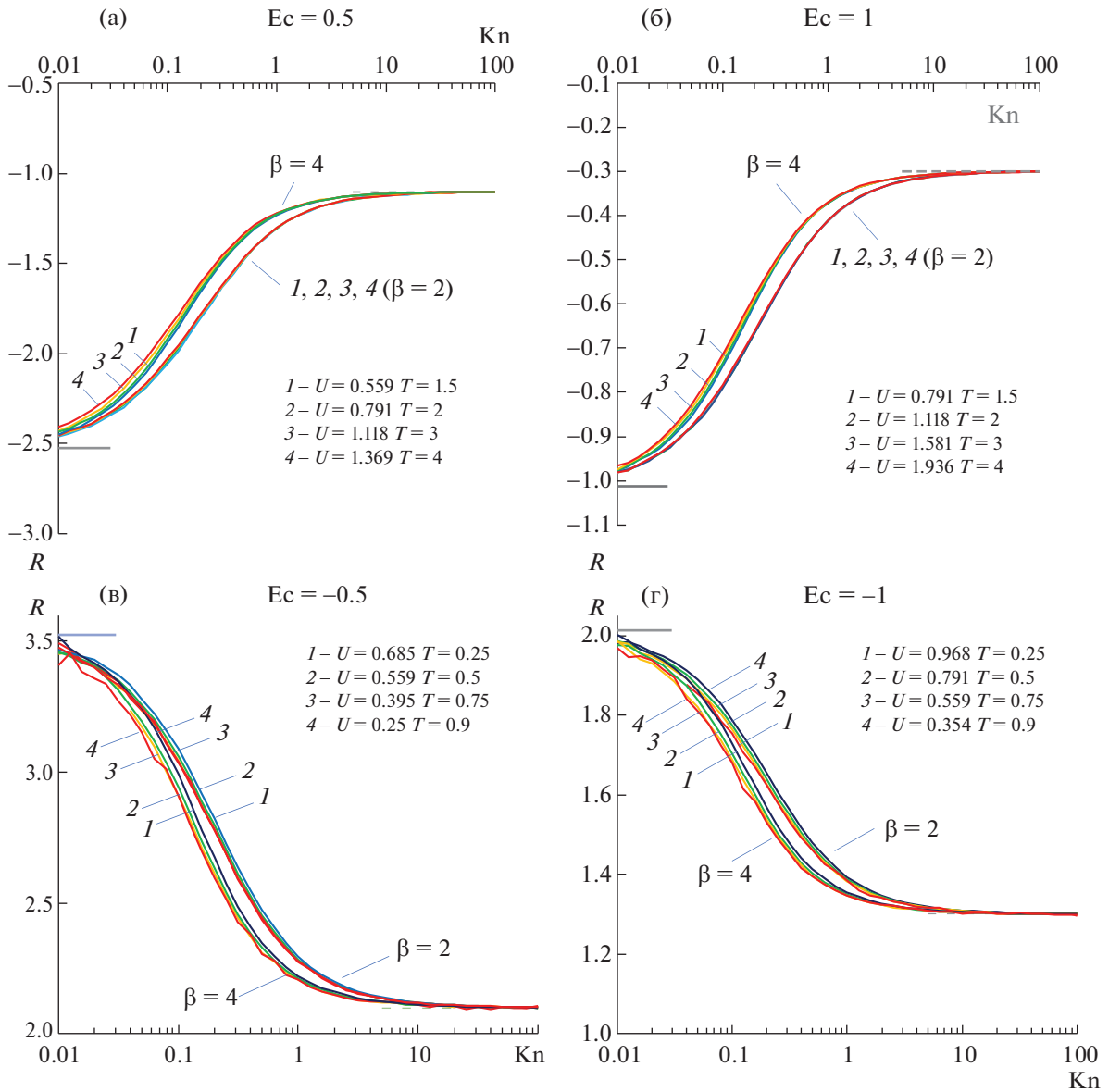


Фиг. 2. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса R от числа Кнудсена в случае одинаковых температур цилиндрических поверхностей для различных значений скорости U и отношения радиусов β .

Зависимости R от Kn показаны на фиг. 3, 4 для различных значений U и t . Величины R для одноатомного газа описываемого уравнениями Навье-Стокса показаны отрезками сплошной линии. Штриховые отрезки соответствуют значениям R для свободномолекулярного течения. Коэффициент аналогии Рейнольдса R может быть положительным при всех Kn , отрицательным при всех Kn , или даже, как функция Kn , может менять знак при некоторых значениях Kn (см. фиг. 4). Последнее обусловлено эффектом перемены знака потока энергии в течении Куэтта разреженного газа [17].

Из фиг. 2–4 видно, что во всех рассмотренных случаях относительная скорость и температуры поверхностей влияют на коэффициент аналогии Рейнольдса в основном через число Эккерта. Поэтому естественно сделать предположение, что коэффициент аналогии Рейнольдса является функцией, главным образом, трех независимых параметров (β , Kn , Ec), а не четырех (β , Kn , t , U).

Исходя из результатов расчетов, представленных на фиг. 2, 4, можно заключить, что отношение радиусов цилиндров, число Эккерта и число Кнудсена являются основными независимыми



Фиг. 3. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса R от числа Кнудсена при различных температурах и скоростях для $|Ec| = 0.5$ и $|Ec| = 1$.

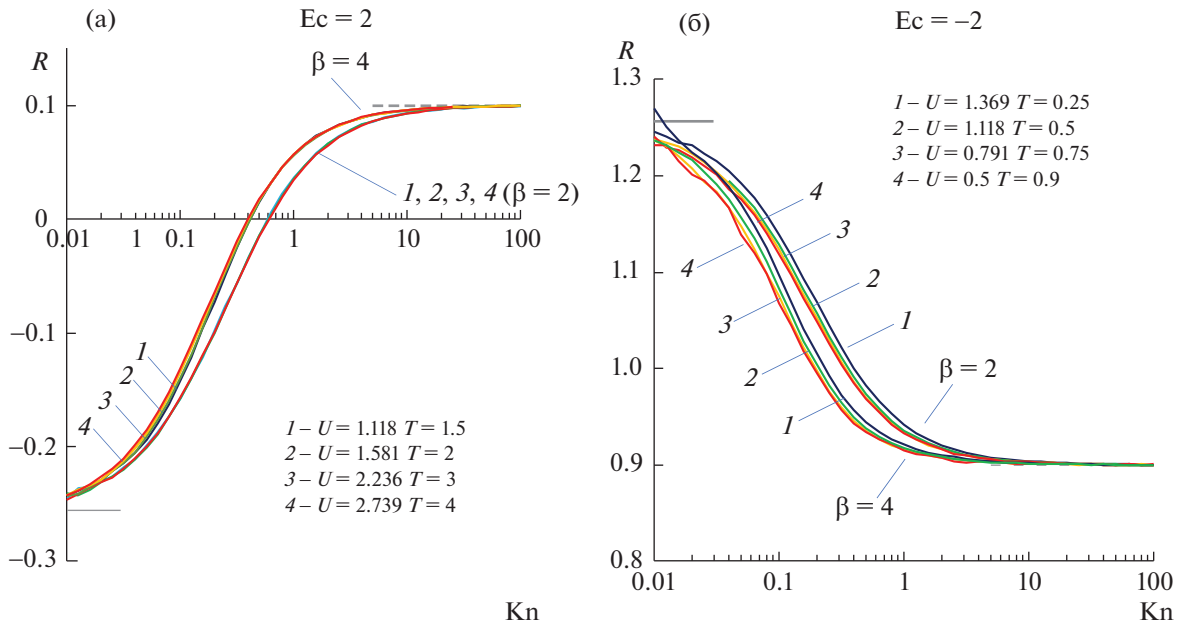
параметрами подбора для коэффициента аналогии Рейнольдса в продольной цилиндрической задаче Куэтта.

Из данных на фиг. 3, 4 видно, что для всех рассмотренных параметров коэффициент аналогии Рейнольдса находится между его свободномолекулярным и его навье-стоксовым значением:

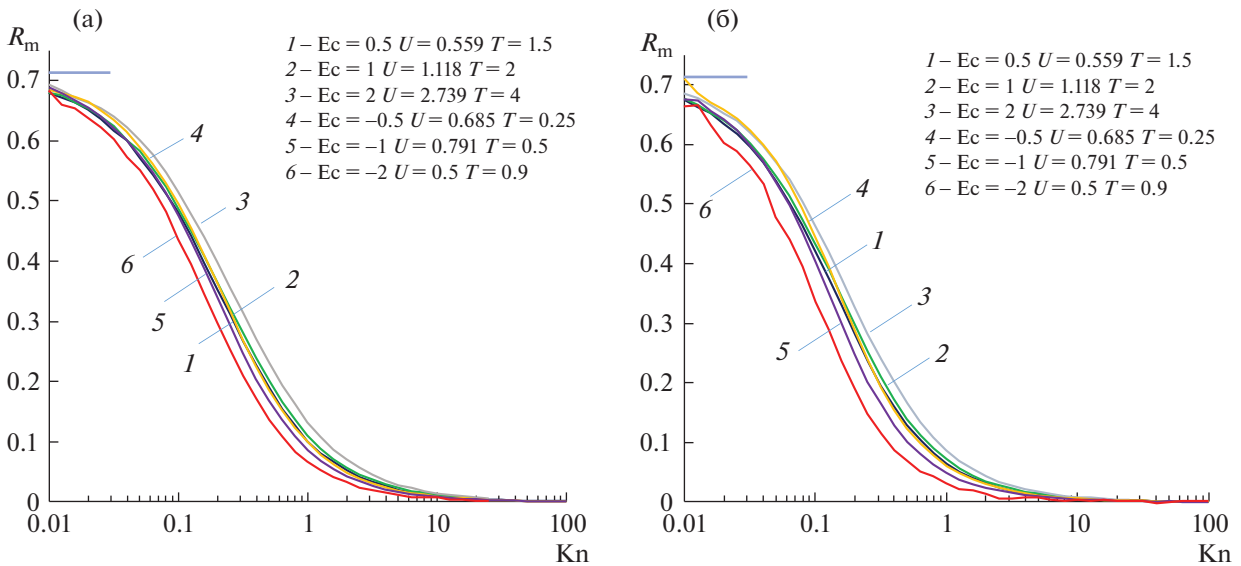
$$\min \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{Pr Ec} \right), \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} \right) \right] < R < \max \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{Pr Ec} \right), \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} \right) \right].$$

Результаты, представленные на фиг. 2–4, позволяют модифицировать коэффициент аналогии Рейнольдса R путем его нормализации, введя величину

$$R_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} - \frac{E_1}{p_{zn} u_{rel}} \right) Ec.$$



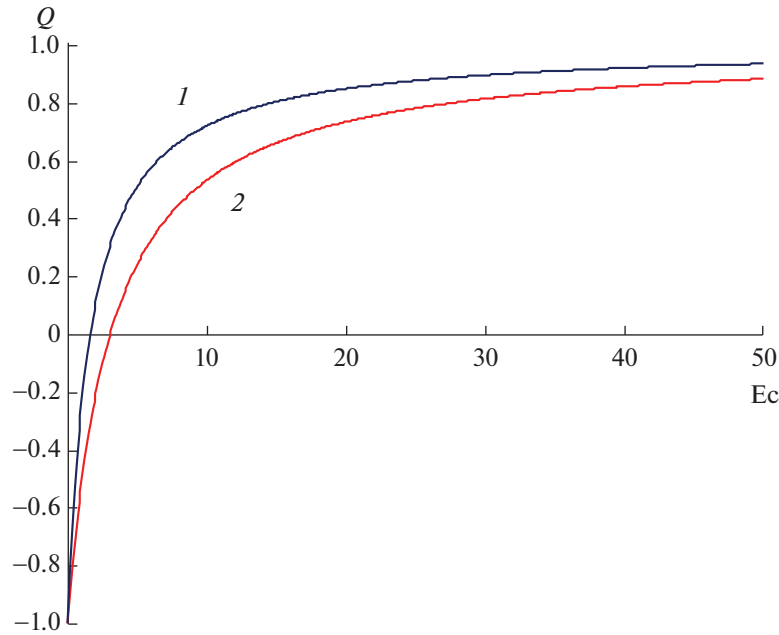
Фиг. 4. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса R от числа Кнудсена при различных температурах и скоростях для $|Ec| = 2$.



Фиг. 5. Зависимость модифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса R_m от числа Кнудсена при различных значениях числа Эккерта и различных отношениях радиусов: а – для $\beta = 2$; б – для $\beta = 4$.

В дальнейшем R_m будем называть *модифицированным коэффициентом* аналогии Рейнольдса. Зависимости R_m от Kn показаны на фиг. 5 для различных значений Ec и β .

Как видно из фиг. 5, модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса зависит в основном от величин β и Kn для всех рассмотренных чисел Эккерта. Естественно предположить, что отношение радиусов и число Кнудсена являются основными параметрами подобия для мо-



Фиг. 6. Зависимость отношения величин погонных потоков энергий, передаваемых цилиндрическим поверхностям, от числа Эккерта $Ec > 0$ для свободномолекулярного течения (1) и течения сплошной среды (2).

дифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса для продольной цилиндрической задачи Куэтта. В силу вышесказанного, для всех рассмотренных значений U , t и Kn

$$\frac{E_l}{p_{zm} U_r} \approx \frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} - \frac{R_m(Kn, \beta)}{Ec}. \quad (18)$$

Таким образом, введение модифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса позволяет разделить влияние числа Эккерта и числа Кнудсена на коэффициент аналогии Рейнольдса при заданном отношении радиусов цилиндров.

Из (18) получаем еще одно свойство коэффициента аналогии Рейнольдса для течения Куэтта:

$$R(Ec, Kn, \beta) + R(-Ec, Kn, \beta) \approx 1. \quad (19)$$

6. ОТНОШЕНИЕ ПОГОННЫХ ПОТОКОВ ЭНЕРГИЙ

Отношение значений погонных потоков энергий, передаваемых поверхностям, дается выражением $Q = E_2 \beta / E_1$. Погонный поток энергии – это количество энергии, подводимой к поверхности цилиндра в единицу времени на единицу длины в продольном направлении.

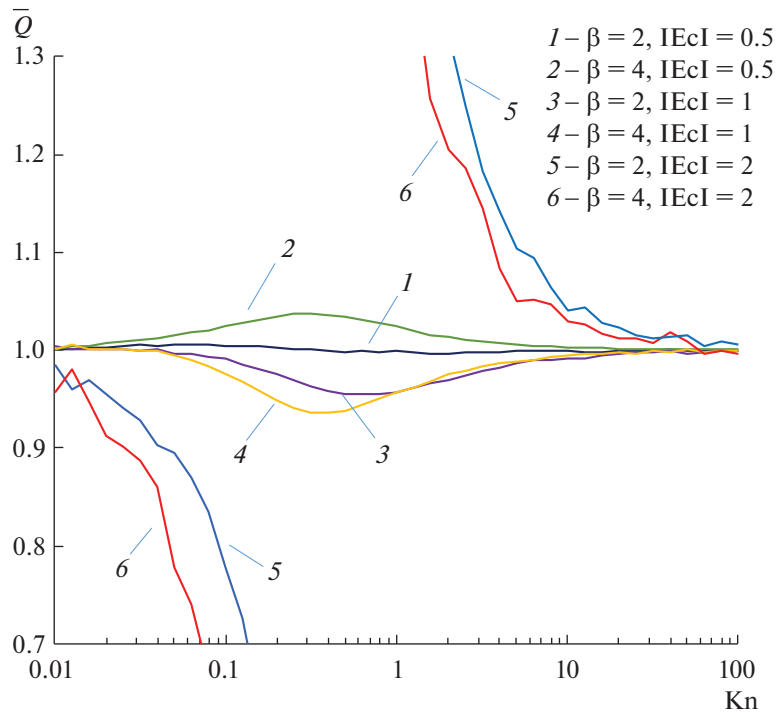
Легко убедиться, что в свободномолекулярном режиме

$$Q(Ec) = -1 + \frac{2Ec}{1 + \kappa^{-1} + Ec}, \quad (20)$$

а в режиме сплошной среды имеем

$$Q(Ec) = -1 + \frac{2Ec}{2Pr^{-1} + Ec}. \quad (21)$$

Таким образом, отношение погонных потоков энергий, передаваемых поверхностям, как в режиме сплошной среды, так и в свободномолекулярном режиме продольного цилиндрического течения Куэтта зависит только от числа Эккерта (Pr и κ фиксированы) и совпадает с отношением потоков энергии, передаваемых пластинам в соответствующей плоской задаче Куэтта. По мере увеличения числа $Ec \geq 0$, отношения (20) и (21) монотонно изменяются от -1 ($Ec=0$ (случай неподвижных цилиндров)) до 1 ($Ec \rightarrow \infty$ (случай равных температур)), см. фиг. 6.



Фиг. 7. Зависимость произведения отношений погонных потоков энергий для двух течений с одинаковыми по модулю, но различными по знаку числами Эккерта от числа Кнудсена Kn .

Из (9) следует, что

$$Q(Ec, Kn, \beta) = \frac{1 - R(Ec, Kn, \beta)}{R(Ec, Kn, \beta)}.$$

Принимая во внимание (19), находим, что

$$Q(-Ec, Kn, \beta) \approx \frac{R(Ec, Kn, \beta)}{1 - R(Ec, Kn, \beta)}.$$

Отсюда за исключением случаев $R \ll 1$ и $R \approx 1$ получаем

$$Q(Ec, Kn, \beta)Q(-Ec, Kn, \beta) \approx 1. \quad (22)$$

Для режима сплошной среды и свободномолекулярного режима, соотношения (18), (19), (22) выполняются точно ($R \neq 1$ и $R \neq 0$). Для переходного режима при $\beta = 1$ и любых Kn они выполняются точно в случае, если u_{rel} одно и то же ($R \neq 1$ и $R \neq 0$), а также в случае $T_1 = T_2$. Функция $\bar{Q}(|Ec|, Kn, \beta) = Q(Ec, Kn, \beta)Q(-Ec, Kn, \beta)$ для различных значений Ec и β изображена на фиг. 7. Как видно из приведенных данных, соотношение (22) выполняется с точностью до 4% для $|Ec| = 0.5$ и до 6% для $|Ec| = 1$. Однако, для $|Ec| = 2$, соотношение (22) нарушается для чисел Кнудсена, соответствующих переходному режиму, потому что в этом случае мы имеем $R \ll 1$ или $R \approx 1$, см. фиг. 4.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено продольное цилиндрическое течение Куэтта одноатомного газа. Исследована связь между потоком энергии, передаваемой цилиндрической поверхности, и напряжением трения на ней (аналогия Рейнольдса). Для режима сплошной среды и свободномолекулярного режима аналитически показано, что коэффициент аналогии Рейнольдса не зависит от отношения радиусов цилиндров, а зависит только от числа Эккерта. Таким образом, коэффициент аналогии Рейнольдса для продольного цилиндрического течения Куэтта совпадает в этих случаях с коэффициентом аналогии Рейнольдса для плоского течения Куэтта [1], [2], [12]. Методом DSMC по-

казано, что в переходном режиме, в отличие от случая сплошной среды и свободномолекулярного течения, отношение радиусов влияет на коэффициент аналогии Рейнольдса. Обнаружено, что во всех рассмотренных случаях коэффициент аналогии Рейнольдса для одноатомного газа зависит от относительных скоростей и температур поверхностей, главным образом, через число Эккерта. Для разделения влияния числа Эккерта и числа Кнудсена на коэффициент аналогии Рейнольдса введен модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса. Для всех рассмотренных чисел Эккерта модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса зависит, главным образом, от числа Кнудсена и от отношения радиусов. На основе полученных численных результатов предложена приближенная формула для коэффициента аналогии Рейнольдса, в которую входят число Эккерта и модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса. Отношение погонных потоков энергий, передаваемых граничным поверхностям, выражается через коэффициент аналогии Рейнольдса и имеет те же параметры подобия, что и коэффициент аналогии Рейнольдса. Используя свойства коэффициента аналогии Рейнольдса, показано, что произведение отношений погонных потоков энергий, переданных граничным поверхностям, для двух разных течений Куэтта с одинаковыми по модулю, но различными по знаку числами Эккерта приблизительно, а в некоторых случаях, точно равно единице.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liepmann H.W., Roshko A.* Elements of Gasdynamics. New York: Willey, 1957. Перевод Липман Г.В., Рожко А. Элементы газовой динамики. М.: Иностран. лит., 1960.
2. *Illingworth C.R.* Some solutions of the equations of flow of a viscous compressible fluid // Math. Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1950. V. 46. P. 469.
3. *Perlmutter M.* Analysis of Couette flow and heat transfer between parallel plates enclosing rarefied gas by Monte Carlo // Proc. of 5th Internat. Symposium on Rarefied Gas Dynamics, edited by C. L. Brundin. New York: Academic Press, 1967. V. 1. P. 455.
4. *Sharipov F., Kalempa D.* Oscillatory Couette flow at arbitrary oscillation frequency over the whole range of the Knudsen number // Microfluid Nanofluid. 2008. V. 4. P. 363.
5. *Roy S., Chakraborty S.* Near-wall effects in micro scale Couette flow and heat transfer in the Maxwell-slip regimes // Microfluid and Nanofluid. 2007. V. 3. P. 437.
6. *Zahid W.A., Yin Y., Zhu K.Q.* Couette–Poiseuille flow of a gas in long microchannels // Microfluidics and Nanofluidics. 2007. V. 3. P. 55.
7. *Deng Z., Chen Y., Shao C.* Gas flow through rough microchannels in the transition flow regime / Phys. Rev. E. 2016. V. 93. P. 013128-1.
8. *Chen X.X., Wang Z.H., Yu Y.L.* “Nonlinear Shear and Heat Transfer in Hypersonic Rarefied Flows Past Flat Plates // AIAA Journal. 2015. V. 53. P. 413.
9. *Abramov A.A., Butkovskii A.V.* Reynolds analogy for the fluid flow past a flat plate at different regimes // Phys. Fluids. 2021. V. 33. P. 017101-1.
10. *Chen X.X., Wang Z.H., Yu Y.L.* General Reynolds analogy for blunt-nosed bodies in hypersonic flows // AIAA J. 2015. V. 53. P. 2410.
11. *Abramov A., Butkovskii A.* Extended Reynolds analogy for the rarefied Rayleigh problem: Similarity parameters // 31st Internat. Symposium on Rarefied Gas Dynamics, AIP Conf. Proc. 2019. V. 2132. 180013-1.
12. *Abramov A.A., Butkovskii A.V.* The extended Reynolds analogy for the Couette problem: Similarity parameters // Internat. J. Heat Mass Transf. 2018. V. 117. P. 313.
13. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1969.
14. *Bird G.A.* Molecular Gas Dynamics. Oxford, Clarendon Press, 1976. Перевод: Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981.
15. *Abramov A.A., Alexandrov V.Yu., Butkovskii A.V.* The longitudinal cylindrical Couette problem for rarefied gas: Energy fluxes maximums // Internat. J. Heat Mass Transf. 2017. V. 111. P. 608.
16. *Bird G.A.* Molecular Gas Dynamics and Direct Simulation of Gas Flows. Oxford, Oxford University Press, 1994.
17. *Abramov A.A., Butkovskii A.V.* The sign change effect of the energy flux and other effects in the transitional regime for the Couette problem // AIP Conf. Proc. 2012. V. 1501. P. 123.