ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 2, с. 245–261

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.624.2

СИНГУЛЯРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ: КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА, АНАЛИЗ И РАСЧЕТЫ

Н. Б. Конюхова[1,*], С. В. Курочкин[1,]**

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: nadja@ccas.ru

**e-mail: kuroch@ccas.ru

Поступила в редакцию 24.06.2022 г.
Переработанный вариант 24.06.2022 г.
Принята к публикации 14.10.2022 г.

Изучается сингулярная начальная задача для нелинейного неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, определенного на полубесконечном интервале и вырождающегося по начальным данным для фазовой переменной. Задача возникает в динамике вязкой несжимаемой жидкости как вспомогательная при изучении автомодельных решений уравнений пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления (плоскопараллельное ламинарное течение в слое смешения). Она представляет и самостоятельный математический интерес. С применением полученных ранее результатов по сингулярным нелинейным задачам Коши и параметрическим экспоненциальным рядам Ляпунова даются корректная постановка и полный математический анализ указанной сингулярной начальной задачи. Формулируются ограничения на “параметр автомодельности” для глобального существования решений, приводятся двусторонние оценки решений и результаты расчетов фазовых траекторий решений для различных значений указанного параметра. Библ. 14. Фиг. 4.

Ключевые слова: двумерные уравнения пограничного слоя с нулевым градиентом давления, уравнение для функции тока, автомодельные решения, нелинейное ОДУ второго порядка для фазовых траекторий с вырождением по начальным данным, сингулярная начальная задача, ограничения на параметр автомодельности для глобального существования решений, двусторонние оценки решений, результаты расчетов.

DOI: 10.31857/S0044466923020096, **EDN:** BNBCUI

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа дополняет [1]. В [1] даются математически корректная постановка и исследование “начально-краевой” задачи (НКЗ) для нелинейного автономного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) третьего порядка, определенного на всей вещественной оси. Задача приближенно описывает автомодельные режимы течений вязкой несжимаемой жидкости в слое смешения (частный случай – задача о плоской “полуструе”). Сопутствующая сингулярная нелинейная краевая задача (КрЗ), определенная на неположительной вещественной полуоси, представляет самостоятельный математический и физический интерес (она охватывает задачи о “затопленной струе” , о “пристеночной струе” и др.). При этом в [1] даются развитие и обоснование нового подхода, отличного от применявшегося ранее специалистами по механике жидкости и газа (см. [2–4] и цитированную там литературу). Для обоснованной математической постановки указанных задач, их детального анализа и численного решения в [1] применяются результаты по сингулярным нелинейным задачам Коши (ЗК), гладким устойчивым начальным многообразиям (УНМ) решений и параметрическим экспоненциальным рядам Ляпунова, а также асимптотические методы; приводятся результаты численных экспериментов и обсуждается их физическая интерпретация.

Необходимые предварительные сведения из [1] об исходной задаче приведены здесь в разд. 1, постановка и исследование сопутствующей нелинейной сингулярной задачи для фазовых траекторий решений этой задачи даются в разд. 2.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИСХОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Для постановки и изучения сингулярной нелинейной начальной задачи, указанной в аннотации, требуется предварительно привести постановку задачи из [1] и формулировку некоторых для нее основных результатов.

В [2], [3] основная задача, рассматриваемая далее в [1], сформулирована в виде

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' - [(m-1)/m](\Phi')^2 = 0, \quad -\infty < \tau < \infty, \tag{1.1}$$

$$\lim_{\tau\to-\infty} \Phi'(\tau) = 0, \tag{1.2}$$

$$\Phi(0) = 0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}(\Phi(\tau)/\tau^m) = b, \tag{1.4}$$

где постоянные $m > 0$ (параметр автомодельности) и $b > 0$ – задаваемые величины. Эта задача ошибочно трактуется в [2], [3] как трехточечная краевая, на чем здесь еще остановимся далее (см. также [1]).

Согласно утверждениям в [2], [3] нелинейное ОДУ (1.1) получено из двумерного уравнения пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления, а вся задача (1.1)–(1.4) описывает автомодельный режим ламинарного течения в слое смешения, который возникает при взаимодействии двух неограниченных потоков, верхний из которых движется, а нижний покоится.

Однако исходная постановка задачи в [2–4] не приводится и, в частности, не уточняется характер движения потока в верхнем слое. По-видимому, впервые эта постановка приведена в [1]. Для полноты изложения коротко опишем ее здесь.

1.1. Математическое описание исходной физической модели на основе двумерных уравнений пограничного слоя

Рассматривается математическая модель течения в слое смешения, возникающего в результате взаимодействия двух неограниченных слоев вязкой несжимаемой жидкости, верхний из которых движется (со степенной зависимостью горизонтальной составляющей скорости течения от высоты), а нижний покоится. Для описания модели используются двумерные уравнения пограничного слоя для установившегося плоскопараллельного ламинарного течения с нулевым градиентом давления:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

(см., например, [5, гл. IX] и [6, гл. I]). Здесь (1.5) – уравнение Прандтля, а (1.6) – уравнение неразрывности (несжимаемости); ось x направлена вдоль потока и совпадает со свободной линией тока, u и v – компоненты скорости течения вдоль и поперек потока соответственно, $\nu > 0$ – кинематический коэффициент вязкости (в безразмерных переменных $\nu = 1$; см. [6, с. 14] и подробнее [1]).

Учитывая физическую интерпретацию модели и определение свободной линии тока (а также способ построения ниже автомодельных решений), получаем, что для функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ должны выполняться следующие условия $\forall x > 0$:

$$\lim_{y\to-\infty} u(x,y) = 0, \tag{1.7}$$

$$v(x,0) = 0, \tag{1.8}$$

$$\lim_{y\to\infty}[u(x,y)/y^{m-1}] = U_0, \quad \lim_{y\to\infty} v(x,y) = 0, \tag{1.9}$$

где m и U_0 — задаваемые величины, $m > 0$ — числовой параметр, $U_0 > 0$ — размерная величина, так что первое из условий в (1.9) задает поведение $u(x,y)$ в верхнем слое:

$$u(x,y) \sim U_0 y^{m-1}, \quad x > 0, \quad y \gg 1. \tag{1.10}$$

Как уже отмечено в [1], в задаче (1.5)–(1.9) рассматриваются значения $x > 0$ и никакие условия при $x = 0$ не задаются, так как при изучении установившихся автомодельных режимов течений, не зависящих от "предыстории" , задание произвольного профиля скоростей в некотором "начальном" сечении потока становится невозможным (подробнее об этом см. [7, с. 518]).

Для упрощения задачи (1.5)–(1.9) вводится, как обычно, функция тока $\psi(x,y)$, чтобы удовлетворить уравнению неразрывности (1.6). Тогда, учитывая, что ось x совпадает со свободной линией тока, получаем соотношения

$$u(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y), \quad v(x,y) = -\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y), \quad \psi(x,0) = 0 \quad \forall x > 0.$$

Для $\psi(x,y)$ получаем сингулярную задачу в бесконечной правой полуплоскости:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = 0 \quad \forall x > 0, \tag{1.12}$$

$$\psi(x,0) = 0 \quad \forall x > 0, \tag{1.13}$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}/y^{m-1}\right) = U_0, \quad \lim_{y\to\infty}\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} = 0 \quad \forall x > 0. \tag{1.14}$$

Отметим еще раз, что описанная выше постановка исходной задачи для компонент скорости течения (или, как следствие из нее, для функции тока) впервые приведена в [1] (в [2–4] отсутствуют как постановка исходной задачи, так и ссылки на таковую в литературе).

1.2. Переход к сингулярной нелинейной задаче для автомодельных функций

В классе автомодельных функций, введенных в [2], [3], решения (1.11) представляются в виде

$$\psi(x,y) = \omega^{-1/2}x^{\nu\omega}\Phi(\tau), \tag{1.15}$$

$$\tau = \omega^{1/2}y/x^{1/(m+1)}, \quad \omega > 0, \quad m > 0, \quad \nu\omega = m/(m+1). \tag{1.16}$$

Для определения $\Phi(\tau)$ получается нелинейное ОДУ (1.1). Далее при описании автомодельного режима течения в слое смешения, возникающем при взаимодействии двух потоков, верхний из которых движется, а нижний покоится, ОДУ (1.1) дополняется условиями (1.2)–(1.4), смысл которых в [2], [3] не поясняется (условие (1.4) там записано в виде $\Phi(\tau) = b\tau^m + \cdots$, $b > 0$, $m > 0$).

Более аккуратно: будем искать решения задачи (1.11)–(1.14) в классе автомодельных функций (1.15), где автомодельная переменная τ в (1.16) зависит от параметра m, причем справедливы соотношения (штрих означает производную по τ)

$$u(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = x^{(m-1)/(m+1)}\Phi'(\tau), \tag{1.17}$$

$$v(x,y) = -\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = \sqrt{\frac{\nu}{m(m+1)}}x^{-1/(m+1)}[\tau\Phi'(\tau) - m\Phi(\tau)]. \tag{1.18}$$

Для функции $\Phi(\tau)$ получаем нелинейную сингулярную задачу с параметром $m > 0$:

1) из уравнения (1.11) и формул (1.15), (1.16) следует автономное нелинейное ОДУ (1.1) третьего порядка;

2) из требования (1.12) и соотношения (1.17) вытекает предельное условие (1.2);

3) из (1.13) и (1.16) следует выполнение условия в нуле (1.3) (ось x совпадает со свободной линией тока, а $\tau = 0$ при $y = 0$);

4) наконец, из требований (1.14) и формул (1.17), (1.18) вытекают предельные соотношения

$$\lim_{\tau\to\infty}[\Phi'(\tau)/\tau^{m-1}] = U_0/[m/(\nu(m+1))]^{(m-1)/2}, \quad \lim_{\tau\to\infty}[\tau\Phi'(\tau) - m\Phi(\tau)] = 0,$$

откуда получаем предельное равенство (1.4) и соотношения

$$b = (U_0/m)/[m/(\nu(m+1))]^{(m-1)/2}, \quad U_0 = U_0(m,b,\nu) = mb\{m/[(m+1)\nu]\}^{(m-1)/2}. \tag{1.19}$$

Окончательно получаем (по крайней мере, формально) сингулярную нелинейную задачу (1.1)–(1.4) с параметрами $m > 0$ и $b > 0$. Из соотношений (1.19) следует, что задание величины b в условии (1.4) эквивалентно заданию U_0 в формуле (1.10), которая описывает y-зависимость горизонтальной составляющий скорости верхнего потока при больших y и влечет качественно различный характер ее поведения при $m < 1$, $m = 1$ и $m > 1$.

Как уже подтверждено в [1], оправданием предположений (1.9), (1.10) для профиля скорости потока в верхнем слое в приведенной физической модели является то обстоятельство, что для фиксированных значений m: $1/2 < m < \infty$, и $b > 0$ задача (1.1)–(1.4) однозначно разрешима.

Для дальнейшего опишем некоторые семейства частных регулярных и сингулярных решений ОДУ (1.1), которые получаются методами понижения порядка этого ОДУ и не являются решениями задачи (1.1)–(1.4): наряду с очевидными решениями $\Phi(\tau) \equiv \text{const}\ \forall m \in \mathbb{R}$, ОДУ (1.1) имеет, в частности, следующие семейства решений:

1) для каждого $m : (m \neq 0) \wedge (m \neq -1)$, существует однопараметрическое семейство сингулярных решений

$$\Phi^{(1)}_{\mathrm{sing},m}(\tau - \tau_p) = \frac{6m}{(m+1)(\tau - \tau_p)}, \quad \tau_p \in \mathbb{R}, \tag{1.20}$$

с особенностью типа полюса в конечной точке $\tau = \tau_p$; при этом для $m = 1/2$ существует двухпараметрическое семейство сингулярных решений

$$\Phi^{(2)}_{\mathrm{sing},1/2}(\tau - \tau_p, a) = a\coth(a(\tau - \tau_p)/2), \quad a, \tau_p \in \mathbb{R}, \tag{1.21}$$

которые переходят в решения (1.20) при $a = 0$;

2) для $m \in \{1/2; 1; 2; \infty\}$ существуют двухпараметрические семейства решений $\Phi_m(\tau - \tau_s, a)$ $(a, \tau_s \in \mathbb{R})$, определенных глобально – на всей вещественной оси:

$$\Phi_{1/2}(\tau - \tau_s, a) = a\tanh(a(\tau - \tau_s)/2), \tag{1.22}$$

$$\Phi_1(\tau - \tau_s, a) = a(\tau - \tau_s), \quad \Phi_2(\tau - \tau_s, a) = a(\tau - \tau_s)^2, \tag{1.23}$$

$$\Phi_\infty(\tau - \tau_s, a) = a[\exp(a(\tau - \tau_s)) - 1]. \tag{1.24}$$

В (1.20)–(1.24) произвольные величины τ_p и τ_s – параметры сдвига, a – отличное от нуля произвольное число.

1.3. Уточнение постановки сингулярной нелинейной задачи для автомодельных функций

В [2], [3] задача (1.1)–(1.4) в исходном виде не изучается и, в частности, физический смысл условий (1.2)–(1.4) не поясняется. Для ее изучения используются методы понижения порядка ОДУ (1.1), инвариантного относительно двух групп преобразований подобия. В результате в фазовом пространстве новых “нефизических” переменных возникает двумерная нелинейная динамическая система с особенностями на так называемой сфере Пуанкаре (понятие сферы Пуанкаре, а также принципы анализа заданных на ней нелинейных динамических систем второго порядка, правые части которых – многочлены, см., например, [8, гл. VI]). Проведен довольно сложный качественный анализ поведения всех траекторий решений на этой сфере с отбором нужных, и описана непростая процедура возвращения к решениям исходной задачи в физических переменных. Никакие расчеты для этой задачи в [2–4] не осуществлялись (вообще говоря, непонятно, что и как можно посчитать в исходных физических переменных при таком сложном подходе этих работ), приведены только качественные иллюстрации поведения траекторий решений на сфере Пуанкаре для некоторых значений параметра m.

Математически другой подход осуществлен в [1], при котором задача (1.1)–(1.4) изучается в исходном виде с применением некоторых результатов классического труда Ляпунова [9], а также публикаций [10–12], а именно, результатов по сингулярным нелинейным ЗК, гладким УНМ решений и параметрическим экспоненциальным рядам Ляпунова для автономных систем нелинейных ОДУ.

Обратимся к подходу [1], где прежде всего замечено, что нелинейная сингулярная задача (1.1)–(1.4), определенная на всей вещественной оси, нуждается в более строгой математической постановке и вытекающей из нее более точной трактовке. В частности, условие (1.2) более точно означает стремление решения при $\tau \to -\infty$ к стационарной точке ОДУ (1.1). В фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (Φ, Φ', Φ'') ОДУ (1.1) имеет бесконечное множество стационарных точек (положений равновесия):

$$(\Phi, \Phi', \Phi'')_s(a) = (-a, 0, 0), \quad a \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

Учитывая понятие допустимых предельных условий на бесконечности для систем нелинейных автономных ОДУ (см. [10–12]), условие (1.2) следует заменить на более точное предельное условие с неизвестным параметром $a > 0$:

$$\lim_{\tau \to -\infty} \exp(-\varepsilon\tau)\{\Phi(\tau) + a, \Phi'(\tau), \Phi''(\tau)\} = \{0, 0, 0\} \quad \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < a. \tag{1.26}$$

Это условие отвечает экспоненциальному стремлению решений ОДУ (1.1) при $\tau \to -\infty$ к неподвижной точке (1.25) типа псевдо-гиперболического седла (подробнее см. [1]).

Условие (1.26) порождает локально сингулярную нелинейную ЗК (1.1), (1.26), которая при фиксированных значениях $a > 0$ и $m \neq 0$ обладает однопараметрическим семейством решений. Эти решения представимы однопараметрическим экспоненциальным рядом Ляпунова, а именно, справедливо

Утверждение 1. *При любых заданных $a > 0$ и $m \neq 0$ сингулярная нелинейная ЗК* (1.1), (1.26) *имеет однопараметрическое семейство решений $\Phi_m(\tau, a, d)$. Эти решения представимы экспоненциальным рядом Ляпунова*

$$\Phi_m(\tau, a, d) = -a + d\exp(a\tau) + \sum_{l=2}^{\infty} h_l d^l \exp(la\tau), \quad \tau \le \tilde{\tau}, \quad \tilde{\tau} \in \mathbb{R}, \tag{1.27}$$

где d – параметр, $|d\exp(a\tilde{\tau})|$ *мало, а коэффициенты h_l не зависят от d* ($l \ge 1$, $h_1 \doteq 1$):

$$h_l = \left[\sum_{k=1}^{l-1} k\left(\frac{(m-1)(l-k)}{m} - k\right) h_k h_{l-k}\right] / [al^2(l-1)], \quad l = 2, 3, \ldots; \tag{1.28}$$

в частности, из (1.28) следует, что $h_2 = -1/(4am), h_3 = (m+4)/(72a^2m^2), \ldots$.

В предельном случае $m \to \infty$ сингулярная нелинейная ЗК (1.1), (1.26) *имеет двухпараметрическое семейство точных решений $\Phi_\infty(\tau, a, d)$, существующих глобально на всей вещественной оси*:

$$\Phi_\infty(\tau, a, d) = -a + d\exp(a\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{1.29}$$

где a и d – параметры, $a > 0$, $d \in \mathbb{R}$.

Заметим здесь, что для приведенных в п. 1.2 некоторых частных решений справедливы утверждения: при любых заданных $a > 0$ функции $\Phi^{(2)}_{\mathrm{sing},1/2}(\tau - \tau_p, a)$, $\Phi_{1/2}(\tau - \tau_s, a)$, $\Phi_\infty(\tau - \tau_s, a)$ являются решениями сингулярной нелинейной ЗК (1.1), (1.26); они представимы рядами Ляпунова (1.27), (1.28) с соответствующими значениями параметра d:

$$d_{\mathrm{sing},1/2}(a, \tau_p) = -2a\exp(-a\tau_p), \quad d_{1/2}(a, \tau_s) = 2a\exp(-a\tau_s), \quad d_\infty(a, \tau_s) = a\exp(-a\tau_s).$$

Принимая во внимание результаты [10–12], получаем также следующее

Утверждение 2. *При любых заданных $a > 0$ и $m \neq 0$ в окрестности стационарной точки* (1.25) *в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (Φ, Φ', Φ'') значения решений сингулярной нелинейной ЗК* (1.1), (1.26) *образуют инвариантное относительно τ одномерное аналитическое УНМ $M^{(1)}_-(a, m)$, которое задается двумя нелинейными соотношениями:*

$$M^{(1)}_-(a, m): \ \Phi + a = \rho_1(\Phi'', a, m), \quad \Phi' = \rho_2(\Phi'', a, m). \tag{1.30}$$

Здесь $\{\rho_1(y),\rho_2(y)\}$ *— решение сингулярной нелинейной задачи типа Ляпунова*:

$$\frac{d\rho_1}{dy}\left[ay+\frac{m-1}{m}\rho_2^2-\rho_1 y\right]=\rho_2,\quad \frac{d\rho_2}{dy}\left[ay+\frac{m-1}{m}\rho_2^2-\rho_1 y\right]=y,\quad |y|<\Delta,\quad \Delta>0, \tag{1.31}$$

$$\rho_1(0)=\rho_2(0)=0. \tag{1.32}$$

Решение $\{\rho_1(y,a,m),\rho_2(y,a,m)\}$ *этой задачи (с вырождением в нуле по начальным данным) существует, единственно и голоморфно в точке* $y=0$:

$$\rho_1(y)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k y^k,\quad \rho_2(y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k y^k,\quad |y|<\Delta_0,\quad \Delta_0>0, \tag{1.33}$$

$$b_1=1/a^2,\quad c_1=1/a, \tag{1.34}$$

$$c_k=\left[\sum_{l=1}^{k-1}\left(lc_l b_{k-l}-\frac{m-1}{m}\sum_{s=1}^{k-l}lc_l c_s c_{k-l-s+1}\right)\right]/(ak), \tag{1.35}$$

$$b_k=\left[c_k+\sum_{l=1}^{k-1}\left(lb_l b_{k-l}-\frac{m-1}{m}\sum_{s=1}^{k-l}lb_l c_s c_{k-l-s+1}\right)\right]/(ak),\quad k=2,3,\ldots; \tag{1.36}$$

в частности, из (1.34)–(1.36) *следует, что* $c_2=1/(2ma^4)$, $b_2=3/(4ma^5)$, … .

В предельном случае $m\to\infty$ *задача* (1.31), (1.32) *имеет точное решение*

$$\rho_1(y,a,\infty)=y/a^2,\quad \rho_2(y,a,\infty)=y/a, \tag{1.37}$$

так что, в силу (1.30)*, одномерное УНМ* $M_-^{(1)}(a,\infty)$ *становится линейным, существует глобально на* $\mathbb{R}^3$ *и порождается значениями решений* (1.29).

Таким образом, значения решений, построенных в утверждении 1 и представимых однопараметрическим экспоненциальным рядом Ляпунова, порождают в окрестности стационарной точки $(-a,0,0)$ фазового пространства $\mathbb{R}^3$ переменных (Φ,Φ',Φ'') инвариантное относительно τ одномерное нелинейное УНМ; это УНМ задается двумя нелинейными соотношениями (1.30), связывающими переменные Φ, Φ' и Φ''. Тогда в конечной точке $\tau=-T$, $T\gg 1$, получаются два нелинейных условия для значений $\Phi(-T)$, $\Phi'(-T)$ и $\Phi''(-T)$. Таким образом, для достаточно больших конечных значений $|\tau|$, $\tau<0$, предельное условие (1.26) эквивалентно двум нелинейным соотношениям, определяющим устойчивую сепаратрису седла, так что задача (1.1), (1.26), (1.3) — двухточечная краевая.

В итоге получаем, что на интервале $-\infty<\tau\le 0$ определена сингулярная нелинейная КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) (а на отрезке $[-T,0]$ — эквивалентная ей регулярная двухточечная КрЗ) с положительными параметрами a и m. Исследование вспомогательной КрЗ (1.1), (1.26), (1.3), определенной на $\mathbb{R}_-$, проведено в [1, разд. 3]: показано, что при фиксированных $a>0$ и $m\ge 1/3$ решение $\Phi_m(\tau,a)$ этой задачи существует и единственно, и получены его двусторонние оценки, причем при заданном $m\ge 1/2$ решение неограниченно продолжается вправо, а при m: $1/3\le m<1/2$, оно сингулярно — имеет особенность типа полюса на $\mathbb{R}_+$. При m: $m\in\{1/3,1/2,\infty\}$, КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) имеет точные решения, представляющие самостоятельный физический интерес.

Заметим здесь, что точное решение $\Phi_{1/3}(\tau,a)$ КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) задается сложной неявной формулой, которая в данной работе не приводится (см. [1]).

1.4. Формулировки основных теорем из [1] *для сингулярной нелинейной КрЗ*

Теорема 1. *При любых заданных* $m\ge 1/2$ *и* $a>0$ *сингулярная нелинейная КрЗ* (1.1)*,* (1.26)*,* (1.3)*, определенная на* $\mathbb{R}_-$*, имеет единственное решение* $\Phi_m(\tau,a)$*; оно есть строго возрастающая выпуклая функция, принадлежащая семейству* (1.27)*,* (1.28) *при некотором* $d=d_m(a)>0$*, причем справедливы двусторонние оценки*

$$a[\exp(a\tau)-1]\le\Phi_m(\tau,a)\le a\tanh(a\tau/2),\quad \tau\in\mathbb{R}_-,\quad a\le d_m(a)\le 2a. \tag{1.38}$$

Теорема 2. *Для решений сингулярной нелинейной КрЗ* (1.1), (1.26), (1.3) *при* m: $0 < m \le 1/2$, *следующие утверждения справедливы:*

1) *для любой фиксированной пары значений* $\{m, a\}$: $1/3 \le m \le 1/2$, $a > 0$, *КрЗ* (1.1), (1.26), (1.3) *имеет единственное решение* $\Phi_m(\tau, a)$; *оно есть строго возрастающая функция, принадлежащая семейству* (1.27), (1.28) *при некотором* $d = d_m(a) > 0$, *и справедливы двусторонние оценки*

$$a\tanh(a\tau/2) \le \Phi_m(\tau, a) \le \Phi_{1/3}(\tau, a), \quad \tau \in \mathbb{R}_-, \quad 2a \le d_m(a) \le 2a\sqrt{3}\exp(\pi\sqrt{3}/6); \tag{1.39}$$

2) *при* m: $1/3 \le m < 1/2$, *решение* $\Phi_m(\tau, a)$ *имеет точку перегиба* $\tau = \tau_{in} \in \mathbb{R}_-$, *определяемую соотношением*

$$\Phi_m(\tau_{\text{in}}, a)\Phi'_m(\tau_{\text{in}}, a) = \frac{2m-1}{m}\int_{-\infty}^{\tau_{in}}[\Phi'_m(s, a)]^2 ds, \quad \tau_{\text{in}} \in \mathbb{R}_-,$$

и не существует глобально на $\mathbb{R}$ – *имеет полюс первого порядка в точке* $\tau = \tau_p(a, m) > 0$, *где* $\tau_p(a, 1/3) = 2\pi\sqrt{3}/(3a)$ *и* $\tau_p(a, m) > \tau_p(a, 1/3)$ $\forall m$: $1/3 < m < 1/2$;

3) *при любых* m: $0 < m < 1/3$, *и* $a > 0$ *КрЗ* (1.1), (1.26), (1.3) *решений не имеет*.

Здесь значения $d_{1/3}(a) = 2a\sqrt{3}\exp(\pi\sqrt{3}/6)$ и $\tau_p(a, 1/3) = 2\pi\sqrt{3}/(3a)$, наряду с неявной формулой для функции $\Phi_{1/3}(\tau, a)$, получены в [1].

1.5. Основной результат для сингулярной нелинейной НКЗ

Для всей исходной задачи (1.1)–(1.4) значение параметра a не является произвольным: $a = a(b)$ находится из требования (1.4), если такое поведение решений КрЗ (1.1), (1.26), (1.3), продолженных вправо, справедливо (из [1] следует, что это имеет место при m: $1/2 < m < \infty$). В результате, при фиксированном значении параметра $m > 0$, задача (1.1)–(1.4) разбивается на две – сингулярную двухточечную КрЗ с параметром, заданную на неположительной вещественной полуоси, и ЗК на положительной полуоси, дающую продолжение решения КрЗ. В [1, разд. 4] формулируются окончательные ограничения на параметр автомодельности m: $1/2 < m < \infty$, гарантирующие существование и единственность решения исходной задачи (1.1)–(1.4), которую по понятным причинам называем НКЗ. (Напомним еще раз, что в [2], [3] задача (1.1)–(1.4) ошибочно трактуется как трехточечная краевая.) Даются двусторонние оценки решения и исследуются его свойства для различных значений параметра автомодельности. При этом аналитическая функция $\Phi_{1/2}(\tau, a)$ является для НКЗ (1.1)–(1.4) верхним решением на $\mathbb{R}_-$ и нижним решением на $\mathbb{R}_+$, а функция $\Phi_\infty(\tau, a)$ – наоборот. Предложены численные методы и приведены результаты расчетов. Кроме того, наряду с численным моделированием функции тока (как функции автомодельной переменной), впервые приводятся некоторые результаты расчетов траекторий частиц в плоскости потока.

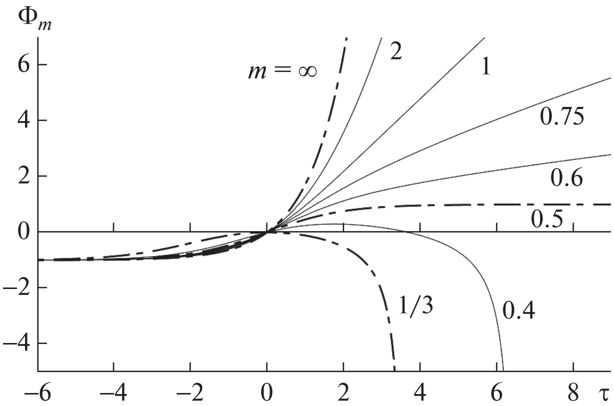
При этом важным является следующее замечание о применении масштабных преобразований при решении сингулярной нелинейной НКЗ. Пусть сингулярная нелинейная НКЗ (1.1), (1.26), (1.3), (1.4) однозначно разрешима при заданных $m > 0$ и $b > 0$, и пусть $\Phi_m(\tau, a)$ – ее решение, где $a = a(b)$. Чтобы найти это решение, достаточно решить указанную НКЗ при $a = 1$. Действительно:

1) решаем сопутствующую сингулярную нелинейную КрЗ (1.1), (1.26), (1.3) при $a = 1$ (см. методы вычислений в [1]) и находим $d = d_m(1) > 0$ и соответствующее решение $\Phi_m(\tau, 1)$ (здесь и далее $d = d_m(a)$ – параметр ряда Ляпунова (1.27), (1.28));

2) продолжая решение $\Phi_m(\tau, 1)$ для $\tau > 0$ как решение ЗК с найденными начальными данными в точке $\tau = 0$, получаем значение $b = b_m(1) > 0$;

3) значение $a = a(b) > 0$ для заданного $b > 0$ в (1.4) находим с помощью масштабных преобразований

$$b_m(a) = b_m(1)a^{m+1} > 0, \quad a = a(b) = [b/b_m(1)]^{1/(m+1)} > 0; \tag{1.40}$$



Фиг. 1

4) искомое решение $\Phi_m(\tau, a)$ и значение параметра $d = d_m(a) > 0$, где $a = a(b)$ определено в (1.40), окончательно получаем с помощью преобразований

$$\Phi_m(\tau, a) = a\Phi_m(a\tau, 1), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad d_m(a) = ad_m(1) > 0. \tag{1.41}$$

Значения $b_m(1)$ и $d_m(1)$, вообще говоря, не могут быть определены методами локального анализа и находятся численно (см. для этих величин [1, табл. 2, 3]). (В справедливости соотношений (1.40), (1.41) нетрудно убедиться непосредственно.)

Теорема 3. *При любых заданных $b > 0$ и m: $1/2 < m < \infty$, сингулярная нелинейная НКЗ* (1.1)–(1.4)*, определенная на всей вещественной оси, имеет единственное решение $\Phi_m(\tau, a, b)$, где $a = a(b) > 0$, и следующие утверждения справедливы:*

(i) $\Phi_m(\tau, a, b)$ *– выпуклая на $\mathbb{R}_-$ монотонно возрастающая на $\mathbb{R}$ функция, принадлежащая семейству* (1.27), (1.28) *для некоторого $d = d_m(a, b) > 0$ и удовлетворяющая ограничениям*

$$a[\exp(a\tau) - 1] \le \Phi_m(\tau, a, b) \le a\tanh(a\tau/2), \quad -\infty < \tau \le 0,$$

$$a\tanh(a\tau/2) < \Phi_m(\tau, a, b) < a[\exp(a\tau) - 1], \quad \tau > 0;$$

(ii) *решение $\Phi_m(\tau, a, b)$ может быть получено следующим образом: фиксируем $a = 1$ и определяем решение $\Phi_m(\tau, 1)$ КрЗ* (1.1), (1.26), (1.3), *которое в силу теоремы* 1 *существует, единственно и принадлежит семейству* (1.27), (1.28) *при некотором $d = d_m(1)$; продолженное вправо, это решение удовлетворяет предельному соотношению $\lim_{\tau\to\infty}[\Phi_m(\tau, 1)/\tau^m] = b_m(1) > 0$; для окончательного нахождения искомого решения $\Phi_m(\tau, a, b)$ при $\tau \in \mathbb{R}$ используем соотношения* (1.40), (1.41).

На фиг. 1 для наглядности представлены графики из [1] решений НКЗ (1.1)–(1.4) при $a = 1$ и разных значениях параметра m.

Асимптотическое поведение решения $\Phi_m(\tau, a, b)$ при больших $\tau > 0$ подробно исследовано в [1], на чем останавливаться не будем.

2. КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА, ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОЙ НАЧАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ РЕШЕНИЙ ОДУ (1.1)

Как показано, в частности, в [2], [3], порядок ОДУ (1.1) понижается, если взять искомую функцию Φ в качестве независимой переменной и ввести новую искомую функцию $f(\Phi)$, которая вдоль траектории $\Phi(\tau)$ ОДУ (1.1) задается в виде

$$f(\Phi(\tau)) = \frac{d\Phi}{d\tau}(\tau). \tag{2.1}$$

Для $f(\Phi)$ получаем неавтономное ОДУ второго порядка (здесь и далее точка означает производную по Φ):

$$f\ddot{f} + \dot{f}^2 + \Phi\dot{f} - [(m-1)/m]f = 0. \tag{2.2}$$

В [3] сингулярная задача для ОДУ (2.2), соответствующая исходной задаче (1.1)–(1.4), сформулирована следующим образом (в обозначениях данной работы):

$$f\ddot{f} + \dot{f}^2 + \Phi\dot{f} - [(m-1)/m]f = 0, \quad -a < \Phi < \infty, \tag{2.3}$$

$$f = a(\Phi + a) - \frac{1}{4m}(\Phi + a)^2 + O((\Phi + a)^3), \quad \Phi \to -a + 0, \tag{2.4}$$

$$f = mb^{1/m}\Phi^{(m-1)/m} + \frac{m(m-1)(m-2)}{m+1}b^{2/m}\Phi^{-2/m} + O(\Phi^{-1-3/m}), \quad \Phi \to \infty, \tag{2.5}$$

где $a > 0$, $m > 0$.

При этом в [3] предельные условия (2.4), (2.5) рассматриваются как граничные, и задача (2.3)–(2.5) трактуется как двухточечная сингулярная КрЗ. В [2] в разложении (2.5) присутствует еще одно слагаемое, являющееся экспоненциально убывающей функцией с произвольным постоянным множителем (как будет видно из дальнейшего исследования, это слагаемое действительно должно присутствовать). Однако в [3] это слагаемое опущено (его присутствие с произвольной постоянной не согласуется с пониманием задачи (2.3)–(2.5) как двухточечной краевой).

В действительности же, как показано далее, задача (2.3), (2.4) является сингулярной начальной. Ее корректная постановка дана ниже. Эта задача имеет единственное решение для каждого $m \neq 0$, а выражение (2.5) дает главный член асимптотического представления решения при $m > 1/2$ и больших $\Phi > 0$.

2.1. Постановка сингулярной начальной задачи для нелинейного ОДУ, вырождающегося по фазовой переменной

Рассмотрим ОДУ (2.2) с точки зрения данной работы. Заметим, что соотношение (2.1) и равенство

$$\dot{f}(\Phi(\tau)) = \Phi''(\tau)/\Phi'(\tau) \tag{2.6}$$

выполняются вдоль траектории ОДУ (1.1).

Пусть $\Phi(\tau)$ – решение сингулярной нелинейной ЗК на бесконечности (1.1), (1.26). Принимая во внимание формулы (2.1)–(2.6), условие (1.26) при $\tau \to -\infty$, утверждение 1 и разложение (1.27), получаем предельные условия для решений ОДУ (2.2) при $\Phi \to -a + 0$: $\lim_{\Phi \to -a+0} f(\Phi) = 0$, $\lim_{\Phi \to -a+0} \dot{f}(\Phi) = a$.

В результате получаем сингулярную нелинейную ЗК:

$$(f\dot{f} + \Phi f)^{\cdot} = [(2m-1)/m]f, \quad \Phi > -a, \tag{2.7}$$

$$\lim_{\Phi \to -a+0} f(\Phi) = 0, \quad \lim_{\Phi \to -a+0} \dot{f}(\Phi) = a, \tag{2.8}$$

где ОДУ (2.7) совпадает с (2.2), но представлено в более удобном виде.

Пусть теперь $\Phi(\tau)$ – решение сингулярной нелинейной НКЗ (1.1)–(1.4) для заданных $b > 0$, $a = a(b) > 0$ и m: $1/2 < m < \infty$ (в соответствии с теоремой 3). Тогда решение $f(\Phi)$ сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) должно удовлетворять предельному условию

$$\lim_{\Phi \to \infty}[f(\Phi)/\Phi^{(m-1)/m}] = mb^{1/m}, \quad b > 0, \quad 1/2 < m < \infty. \tag{2.9}$$

Прежде всего рассмотрим сингулярную нелинейную ЗК (2.7), (2.8) при $m \neq 0$. Для ее решений, в частности, выполнено соотношение

$$f(\Phi)\dot{f}(\Phi) + \Phi f(\Phi) = [(2m-1)/m]\int_{-a}^{\Phi} f(s)ds. \tag{2.10}$$

Отсюда нетрудно проверить, что справедливо

Следствие 1. *При* $m = \infty$ *и* $m = 1/2$ *существуют точные решения* $f_m(\Phi, a)$ *сингулярной нелинейной ЗК* (2.7), (2.8)*:*

$$f_\infty(\Phi, a) = a(\Phi + a), \tag{2.11}$$

$$f_{1/2}(\Phi, a) = (a^2 - \Phi^2)/2. \tag{2.12}$$

(*Эти решения, естественно, не удовлетворяют условию* (2.9).) *Для исходной сингулярной ЗК* (1.1), (1.26) *функция* (2.11) *соответствует точному решению* $\Phi_\infty(\tau - \tau_s, a)$, *определенному формулой* (1.24); *при* $a^2 > \Phi^2$ *функция* (2.12) *соответствует точному решению* $\Phi_{1/2}(\tau - \tau_s, a)$, *определенному в* (1.22), *а при* $a^2 < \Phi^2$ – *точному решению* $\Phi^{(2)}_{\mathrm{sing},1/2}(\tau - \tau_p, a)$, *определенному в* (1.21).

Замечание 1. ОДУ (2.7) инвариантно относительно замены переменных

$$f_{\mathrm{new}} = f/a^2, \quad \Phi_{\mathrm{new}} = \Phi/a.$$

Тогда в задаче (2.7), (2.8) достаточно положить $a = 1$, так как справедливо соотношение

$$f(\Phi, a) = a^2 f(\Phi/a, 1). \tag{2.13}$$

В дальнейшем, оставляя a в формулах, в численных примерах полагаем $a = 1$.

2.2. Вспомогательная сингулярная ЗК для нелинейного ОДУ с регулярной особенностью в нуле и разрешимость исходной вырожденной задачи

Из сингулярной нелинейной задачи (2.7), (2.8) следует, что ОДУ (2.7) вырождается по фазовой переменной при $\Phi \to -a + 0$. Чтобы исследовать это вырождение, положим

$$f(\Phi) = A(\Phi + a)^\alpha[1 + o(1)], \quad \dot{f}(\Phi) = \alpha A(\Phi + a)^{\alpha-1}[1 + o(1)], \tag{2.14}$$

$$\ddot{f} = \alpha(\alpha - 1)A(\Phi + a)^{\alpha-2}[1 + o(1)], \quad \Phi \to -a + 0, \tag{2.15}$$

где $\alpha > 0$.

Подстановка (2.14), (2.15) в (2.7) дает (в главном при $\Phi \to -a$)

$$\alpha(\alpha - 1)A^2(\Phi + a)^{2\alpha-2} + \alpha^2 A^2(\Phi + a)^{2\alpha-2} + \alpha A(\Phi + a)^\alpha -$$
$$- a\alpha A(\Phi + a)^{\alpha-1} - [(m - 1)/m]A(\Phi + a)^\alpha + \ldots = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому соотношению при $\Phi \to -a$, приравняем нулю сумму слагаемых с наименьшими степенями. Тогда получим соотношения

$$2\alpha - 2 = \alpha - 1, \quad A^2 + A(-a) = 0,$$

откуда

$$\alpha = 1, \quad A = a. \tag{2.16}$$

Далее, учитывая формулы (2.13)–(2.16), осуществим замену переменных:

$$t = \Phi/a + 1, \quad t > 0, \quad f(\Phi) = \tilde{f}(t) = a^2 t[1 + \chi(t)], \tag{2.17}$$

где $\lim_{t\to+0}\chi(t) = 0$. Из (2.17), в частности, следуют формулы (здесь и далее штрих означает дифференцирование по t):

$$\dot{f}(\Phi) = \tilde{f}'(t)/a = a[1 + \chi(t) + t\chi'(t)], \quad \ddot{f}(\Phi) = \tilde{f}''(t)/a^2 = 2\chi'(t) + t\chi''(t). \tag{2.18}$$

Используя (2.7), (2.8) и (2.17), (2.18), получаем сингулярную нелинейную ЗК для ОДУ относительно новой искомой функции $\chi(t)$; это ОДУ имеет регулярную особенность в точке $t = 0$ (классификацию особых точек для систем линейных и нелинейных ОДУ см. в [13], [14]):

$$t^2\chi'' + 3t\chi' + \chi = G(t, \chi, t\chi') + \eta(t, m), \quad t > 0, \tag{2.19}$$

$$\lim_{t\to+0}\chi(t) = 0, \quad \lim_{t\to+0}[t\chi'(t)] = 0; \tag{2.20}$$

$$G(t,\chi,t\chi') = t\chi'[(1+\chi)^{-1} - 1] - t\chi'(1+\chi)^{-1}[t + t\chi'], \tag{2.21}$$

$$\eta(t,m) = -t/m, \quad m \neq 0. \tag{2.22}$$

Заметим, что функция $G(t,\chi,t\chi')$ голоморфна в точке $(t,\chi,t\chi') = (0,0,0)$, и что из (2.21), (2.22) следуют равенства

$$G(t,0,0) \equiv 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \chi}(t,0,0) \equiv 0, \quad \frac{\partial G}{\partial (t\chi')}(0,0,0) = 0, \quad \eta(0,m) = 0.$$

Для собственных значений λ линейного ОДУ

$$t^2\chi'' + 3t\chi' + \chi = 0, \quad t > 0, \tag{2.23}$$

имеем $\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda + 1 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = -1$. Тогда сингулярная линейная ЗК (2.23), (2.20) имеет только тривиальное решение, а из результатов по сингулярным ЗК для нелинейных ОДУ (см., в частности, [15, теорема 5] и библиографию там) вытекает следующее

Утверждение 3. *Для любого $m \neq 0$ сингулярная нелинейная ЗК* (2.19)–(2.22) *имеет единственное решение $\chi^{(m)}(t)$; оно является голоморфной функцией в точке $t = 0$:*

$$\chi^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(m)} t^k, \quad |t| \le t_0, \quad t_0 > 0, \tag{2.24}$$

где подстановка (2.24) *в* (2.19) *дает*

$$\chi_1^{(m)} = -1/(4m), \quad \chi_k^{(m)} = (k+1)^{-2} \times \\ \times \left\{ -\chi_{k-1}^{(m)}[1 + m(k-1)]/m - \sum_{l=1}^{k-1} [l(k+3)+1]\chi_l^{(m)}\chi_{k-l}^{(m)} \right\}, \quad k = 2,3,\ldots; \tag{2.25}$$

для $m = \infty$ и $m = 1/2$ справедливо

$$\chi^{(\infty)}(t) \equiv 0, \quad \chi^{(1/2)}(t) = -t/2. \tag{2.26}$$

Кроме того, при $m > 0$ справедливы соотношения

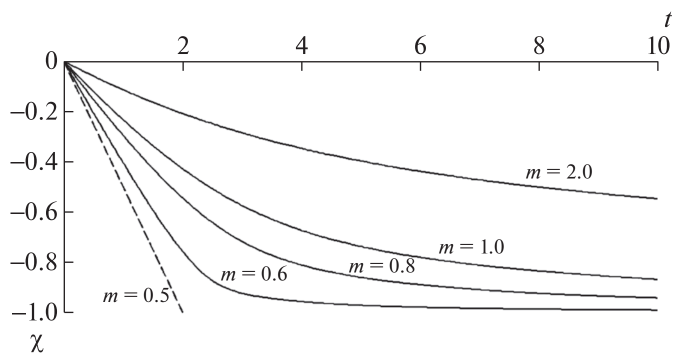
$$\chi^{(m)}(0) = 0, \quad [\chi^{(m)}]'(0) = -1/(4m) < 0, \quad [\chi^{(m)}]''(0) = (2m-1)/(36m^2),$$

откуда

$$[\chi^{(m)}]''(0) > 0, \quad 1/2 < m < \infty; \quad [\chi^{(1/2)}]''(0) = 0; \quad [\chi^{(m)}]''(0) < 0, \quad 0 < m < 1/2.$$

Следствие 2. *Для любого $m > 1/2$ решение $\chi^{(m)}(t)$ сингулярной нелинейной ЗК* (2.19)–(2.22) *существует глобально на $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяет неравенству $\chi^{(m)}(t) > -1\ \forall t \in \mathbb{R}_+$.*

Графики к следствию 2 приведены на фиг. 2.



Фиг. 2

Более того, как несложно проверить, для любого $m \neq 0$ нелинейное ОДУ (2.19) не имеет сингулярных решений с особенностями типа полюса в конечных точках $t > 0$.

Учитывая утверждение 3, следствие 2, соотношения (2.17) и тот факт, что для любого конечного $\Phi > -a$ решения нелинейного ОДУ (2.7) не имеют особенностей типа полюса, окончательно получаем, что справедлива

Теорема 4. *Для любых $a > 0$ и $m \neq 0$ сингулярная нелинейная ЗК* (2.7), (2.8) *имеет единственное решение $f_m(\Phi, a)$; оно является голоморфной функцией в точке $\Phi = -a$:*

$$f_m(\Phi, a) = a(\Phi + a)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(m)} (\Phi + a)^k / a^k\right], \tag{2.27}$$

где коэффициенты $\chi_k^{(m)}$ $(k \geq 1)$ определены рекуррентными соотношениями (2.25); *при $m = \infty$ и $m = 1/2$ сингулярная нелинейная ЗК* (2.7), (2.8) *имеет точные решения*

$$f_\infty(\Phi, a) = a(\Phi + a), \quad f_{1/2}(\Phi, a) = (a^2 - \Phi^2)/2 = a(\Phi + a)[1 - (\Phi + a)/(2a)].$$

Более того, при m: $1/2 < m < \infty$, решение $f_m(\Phi, a)$ сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) *существует глобально и является положительной функцией на интервале $(-a, \infty)$.*

Из (2.27), (2.25) при $\Phi + a \to 0$, в частности, получаем

$$f_m(\Phi, a) = a(\Phi + a)\left[1 - \frac{\Phi + a}{4am} + \frac{(2m - 1)(\Phi + a)^2}{72a^2m^2}\right] + O((\Phi + a)^4). \tag{2.28}$$

Замечание 2. В [2], [3] приводятся два первых слагаемых в разложении вида (2.28) (см. здесь формулу (2.4)), но характер представления не обсуждается. Точное утверждение следует из приведенных выше рассуждений, а члены сходящегося ряда (2.27) находятся формальной подстановкой этого ряда в (2.7).

2.3. Асимптотическое поведение на бесконечности решений исходной сингулярной задачи для различных значений $m > 0$

Изучение глобального поведения решений сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) для различных значений параметра $m > 0$ представляет довольно сложную задачу.

Чтобы прояснить качественное поведение решений ОДУ (2.7) при больших Φ, положим

$$f(\Phi) = B\Phi^\beta[1 + o(1)], \quad \Phi \to \infty. \tag{2.29}$$

Подставляя (2.29) в (2.7) и удерживая главные члены, получаем

$$B^2\beta(\beta - 1)\Phi^{2\beta-2} + B^2\beta^2\Phi^{2\beta-2} + B\beta\Phi^\beta - [(m - 1)/m]B\Phi^\beta + \ldots = 0. \tag{2.30}$$

Приравнивая нулю сумму слагаемых в (2.30), быстрее всего растущих при больших Φ, получаем два случая:

Случай I. Наибольшая степень в (2.30) равна β. Тогда

$$\beta = (m - 1)/m, \quad m > 0, \tag{2.31}$$

и параметр B ($B \neq 0$) является свободным; действительно, в этом случае имеем

$$2\beta - 2 = -2/m < (m - 1)/m = \beta.$$

Случай II. Две наибольших степени в (2.30) совпадают: $2\beta - 2 = \beta$; тогда

$$\beta = 2, \quad B = -(m + 1)/(6m) < 0, \quad m > 0. \tag{2.32}$$

Дадим более строгое доказательство существования семейств решений с помощью замены зависимой переменной в (2.7):

$$f(\Phi) = B\Phi^\beta[1 + Z(\Phi)]; \tag{2.33}$$

здесь функция $Z(\Phi)$ должна удовлетворять условиям $\lim_{\Phi\to\infty} Z(\Phi) = \lim_{\Phi\to\infty} \dot{Z}(\Phi) = 0$.

Получаем для $Z(\Phi)$ сингулярную ЗК на бесконечности:

$$\begin{gathered}\ddot{Z} + [4\beta/\Phi + \Phi^{1-\beta}/B]\dot{Z} + [(2\beta^2 - \beta)/\Phi^2]Z + (\Phi^{1-\beta}/B)[(1+Z)^{-1} - 1]\dot{Z} + \\ + (1+Z)^{-1}\dot{Z}^2 + (2\beta^2 - \beta)/\Phi^2 + [\beta - (m-1)/m]/(B\Phi^\beta) = 0, \quad \Phi \geqslant 1,\end{gathered} \tag{2.34}$$

$$\lim_{\Phi\to\infty} Z(\Phi) = \lim_{\Phi\to\infty} \dot{Z}(\Phi) = 0. \tag{2.35}$$

Замечание 3. В случае II сингулярная нелинейная ЗК на бесконечности (2.34), (2.35) всегда имеет тривиальное решение $Z \equiv 0$; то же верно в случае I при $m = 1$, когда $\beta = 0$, и при $m = 2$, когда $\beta = 1/2$ ($B \neq 0$ произвольно). Тогда представление (2.33) дает точные решения $f_{\mathrm{I}I,m}$ и $f_{\mathrm{I},m}$ ОДУ (2.7), которые не являются решениями сингулярной ЗК (2.7), (2.8):

$$f_{\mathrm{I}I,m} = -\Phi^2(m+1)/(6m), \quad m \neq 0, \tag{2.36}$$

$$f_{\mathrm{I},1} \equiv B, \quad f_{\mathrm{I},2} = B\sqrt{\Phi}. \tag{2.37}$$

Для исходного ОДУ (1.1) функция (2.36) соответствует точному сингулярному решению $\Phi^{(1)}_{\mathrm{sing},m}(\tau - \tau_p, a)$, определенному формулой (1.20), а функции (2.37) дают точные решения $\Phi_1(\tau - \tau_s, a)$ и $\Phi_2(\tau - \tau_s, a)$, определенные формулами (1.23).

Замечания для случая I. При $m > 0$ и $\beta = (m-1)/m$ имеем

$$1 - \beta = 1/m, \quad 2\beta^2 - \beta = (m-1)(m-2)/m^2. \tag{2.38}$$

Осуществим в (2.34), (2.35) замену независимой переменной:

$$x = \Phi^{(m+1)/m}, \quad \Phi = x^{m/(m+1)}. \tag{2.39}$$

Тогда, обозначая $\widetilde{Z}(x) = Z(\Phi(x))$ и учитывая равенства (2.38), из (2.34), (2.35) получаем для $\widetilde{Z}(x)$ сингулярную нелинейную ЗК на бесконечности, зависящую от $B \neq 0$ и $m > 0$ как от параметров (штрих означает дифференцирование по x):

$$\begin{gathered}\widetilde{Z}'' + \widetilde{Z}'\left[\frac{m}{B(m+1)} + \frac{4m-3}{x(m+1)}\right] + \widetilde{Z}\frac{(m-1)(m-2)}{(m+1)^2x^2} + \\ + \frac{m}{B(m+1)}[(1+\widetilde{Z})^{-1} - 1]\widetilde{Z}' + (1+\widetilde{Z})^{-1}\widetilde{Z}'^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{(m+1)^2x^2} = 0, \quad x \geqslant 1,\end{gathered} \tag{2.40}$$

$$\lim_{x\to\infty} \widetilde{Z}(x) = \lim_{x\to\infty} \widetilde{Z}'(x) = 0. \tag{2.41}$$

Согласно [14], нелинейное ОДУ (2.40) имеет иррегулярную особенность ранга 1 при $x \to \infty$, и верно следующее

Утверждение 4. *Для любых $B \neq 0$ и $m > 0$ сингулярная нелинейная ЗК* (2.40), (2.41) *имеет частное решение $\theta(x) = \theta(x, m, B)$, которое при больших x представимо формальным рядом*

$$\theta(x, m, B) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k / x^k, \tag{2.42}$$

где коэффициенты разложения находятся формальной подстановкой ряда (2.42) *в ОДУ* (2.40):

$$\theta_1 = B(m-1)(m-2)/[m(m+1)], \tag{2.43}$$

$$\theta_{k-1} = \frac{B(m+1)}{m(k-1)}\left[-\frac{4m-3}{m+1}(k-2) + \frac{(m-1)(m-2)}{(m+1)^2}\right]\theta_{k-2} + F_{k-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{k-2}, m, B), \quad k = 3, 4, \ldots; \tag{2.44}$$

здесь F_{k-1} получаются из величин $\theta_1, \ldots, \theta_{k-2}$ с помощью только операций типа сложения и умножения; при этом для частного решения $\theta(x) = \theta(x, m, B)$ ЗК на бесконечности (2.40), (2.41) *ряд* (2.42)–(2.44) *является асимптотическим разложением при больших x.*

После подстановки разности $w(x) = \widetilde{Z}(x) - \theta(x)$ в (2.40), (2.41) получается сингулярная нелинейная ЗК на бесконечности для $w(x)$:

$$\begin{gathered} w'' + w'\left[\frac{m}{B(m+1)} + \frac{4m-3}{(m+1)x}\right] + w\frac{(m-1)(m-2)}{(m+1)^2 x^2} + \\ + \frac{m}{B(m+1)}\left\{(w' + \theta'(x))[(1 + w + \theta(x))^{-1} - 1] - \theta'(x)[(1 + \theta(x))^{-1} - 1]\right\} + \\ + (w' + \theta'(x))^2(1 + w + \theta(x))^{-1} - (\theta'(x))^2(1 + \theta(x))^{-1} = 0, \end{gathered} \tag{2.45}$$

$$\lim_{x\to\infty} w(x) = \lim_{x\to\infty} w'(x) = 0. \tag{2.46}$$

Оставляя только главные члены в ОДУ (2.45) для $w(x)$ с коэффициентами, стремящимися к нулю не быстрее, чем $1/x$ при $x \to \infty$, получаем линейное ОДУ:

$$\tilde{w}'' + \tilde{w}'\left[\frac{m}{B(m+1)} + \frac{3m^2 + 4m - 5}{x(m+1)^2}\right] = 0. \tag{2.47}$$

При $B > 0$ имеем представление $\tilde{w}(x) = Px^{-a_2}\exp(-a_1x)$ для однопараметрического семейства решений ОДУ (2.47), стремящихся к нулю при $x \to \infty$, где P – произвольная постоянная,

$$a_1 = m/[B(m+1)] > 0, \quad a_2 = (3m^2 + 4m - 5)/(m+1)^2. \tag{2.48}$$

Тогда из [9, разд. 23] следует

Утверждение 5. *Для любых $m > 0$ и $B > 0$ сингулярная нелинейная ЗК* (2.45), (2.46) *с данными на бесконечности имеет однопараметрическое семейство решений $w(x) = w(x, B, m, P)$; эти решения представляются экспоненциальным параметрическим рядом Ляпунова*

$$w(x, B, m, P) = Px^{-a_2}\exp(-a_1x) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k(x)P^k x^{-ka_2}\exp(-ka_1x),$$

где a_1 и a_2 определены в (2.48), *P – параметр, а функции $C_k(x)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ имеют при больших $x > 0$ порядок роста не выше степенного.*

Суммируя приведенные утверждения и принимая во внимания замены переменных, получаем следующее

Утверждение 6. *Для любого $m > 0$ нелинейное ОДУ* (2.7) *имеет двухпараметрическое семейство решений $f_m(\Phi, B, D)$, которое при больших положительных Φ представимо в виде*

$$\begin{gathered} f_m(\Phi, B, D) = B\Phi^{(m-1)/m}\left\{1 + \theta(\Phi^{(m+1)/m}, m, B) + D\Phi^{\varkappa_1} \right. \\ \left. \times \exp([-m/(B(m+1))]\Phi^{(m+1)/m})[1 + o(1)]\right\}, \quad \Phi \to \infty, \end{gathered} \tag{2.49}$$

где B и D – параметры, $B > 0$, $\varkappa_1 = -(3m^2 + 4m - 5)/[m(m+1)]$, а $\theta(x, m, B)$ определено в утверждении 4.

Замечания для случая II. В этом случае точное решение при $m > 0$ $f = -\Phi^2(m+1)/(6m)$ не соответствует никакому глобальному решению, а ЗК на бесконечности (2.34), (2.35) принимает вид (см. замечание 3)

$$\begin{gathered} \Phi^2\ddot{Z} + [2(m+4)/(m+1)]\Phi\dot{Z} + 6Z - [6m/(m+1)][(1+Z)^{-1} - 1]\Phi\dot{Z} + \\ + (1+Z)^{-1}(\Phi\dot{Z})^2 = 0, \quad \Phi \gg 1, \quad \lim_{\Phi\to\infty} Z(\Phi) = \lim_{\Phi\to\infty} \dot{Z}(\Phi) = 0. \end{gathered}$$

2.4. Основной результат для случая m: $1/2 < m < \infty$

В указанном случае решение сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) существует глобально и положительно на $(-a,\infty)$ (см. теорему 4). Следовательно, представление (2.49) имеет место для больших Φ и некоторых значений $B > 0$ и D.

Далее, пусть $\Phi(\tau)$ – решение сингулярной нелинейной НКЗ (1.1)–(1.4) для некоторых $b > 0$ и m: $1/2 < m < \infty$ (см. теорему 3). Тогда решение $f(\Phi)$ сингулярной начальной задачи (2.7), (2.8) должно удовлетворять условию (2.9), т.е. в (2.49) имеем $B = mb^{1/m}$.

Теорема 5. *Пусть функция $f_m(\Phi) = f_m(\Phi(\tau))$ при заданном m: $1/2 < m < \infty$, является решением сингулярной нелинейной ЗК* (2.7), (2.8) *вдоль траектории $\Phi(\tau) = \Phi(\tau, b)$, отвечающей решению сингулярной НКЗ* (1.1)–(1.4) *для фиксированного $b > 0$. Тогда*

(i) *$f_m(\Phi)$ удовлетворяет ограничениям*

$$(a^2 - \Phi^2)/2 < f_m(\Phi) < a(\Phi + a), \quad -a \le \Phi \le a,$$

$$0 < f_m(\Phi) < a(\Phi + a), \quad \Phi > a;$$

(ii) *для конечных Φ представление решения $f_m(\Phi)$ дается теоремой* 4;

(iii) *при больших положительных Φ для решения $f_m(\Phi)$ справедливо представление* (2.49), *где $B = mb^{1/m}$, а D – параметр.*

Учитывая соотношения

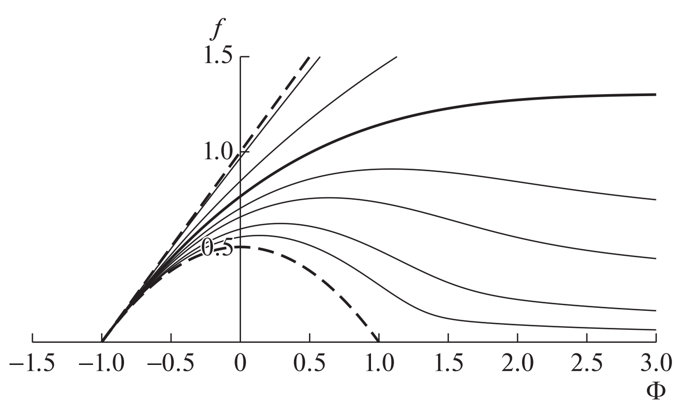
$$x^{-1}\Phi^{(m-1)/m} = \Phi^{-2/m}, \quad x^{-2}\Phi^{(m-1)/m} = \Phi^{-3/m-1}, \ldots$$

и формулы (2.42)–(2.44), из теоремы 5 приближенно получаем

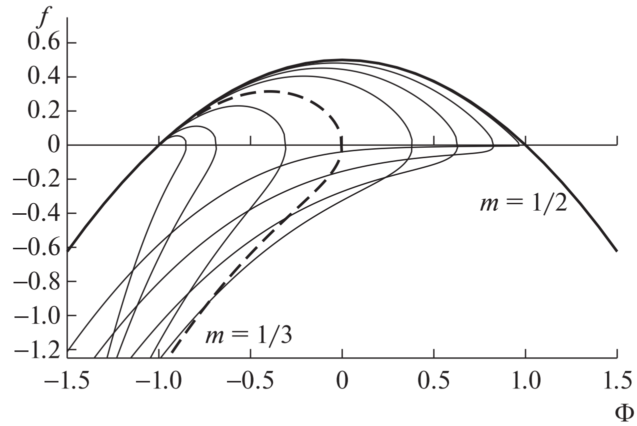
$$\begin{aligned} f_m(\Phi) = mb^{1/m}\Phi^{(m-1)/m} + \frac{m(m-1)(m-2)}{m+1} b^{2/m}\Phi^{-2/m} + O(\Phi^{-1-3/m}) + \\ + D\Phi^{\varkappa_2}\exp\left(-\frac{b^{-1/m}}{m+1}\Phi^{(m+1)/m}\right)[1 + o(1)], \quad \Phi \to \infty, \end{aligned} \tag{2.50}$$

где $\varkappa_2 = -(2m^2 + 4m - 4)/[m(m+1)]$, $D = \text{const}$ (ср. с укороченной формулой (2.5), в которой опущено экспоненциально убывающее слагаемое, хотя в [2] оно присутствует, см. там формулу (1.10), и совпадает с формулой (2.50)).

На фиг. 3 представлены графики решений сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) в предположениях теоремы 5.



Фиг. 3. Снизу вверх: m =: 0.5 (штриховая линия); 0.55, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0, 1.5, 7.0 (сплошные линии); ∞ (штриховая линия).



Фиг. 4. Справа налево: m =: 1/2, 255/512, 31/64, 11/24, 5/12, 1/3, 1/4, 1/8, 1/16.

2.5. Замечания к случаю m: $0 < m < 1/2$

В этом случае решение $f_m(\Phi)$ сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) может менять знак в некоторой конечной точке $\Phi = \Phi_{zero}$. Тогда в окрестности этой точки будет

$$f\dot{f} = (\dot{f}^2)/2 \sim \text{const}, \quad f \sim \pm\sqrt{C_z\left|\Phi_{\text{zero}} - \Phi\right|},$$

где C_z – константа. Следовательно, $\Phi = \Phi_{\text{zero}}$ является точкой ветвления, и решение становится многозначной функцией.

Графики решений $f_m(\Phi)$ сингулярной нелинейной ЗК (2.7), (2.8) для этого случая представлены на фиг. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что анализ сингулярных задач для нелинейных ОДУ, возникающих в моделях естественных наук, связан с большими трудностями, что вызывает особый интерес к тем задачам, которые допускают достаточно полный их математический и численный анализ. Подход к конкретной задаче гидродинамики, описанный в [1] и дополненный в настоящей работе, может представлять интерес и для других задач. Отметим еще раз, что в [2–4], в отличие от [1] и данной работы, никакие расчеты не приводятся (как уже отмечалось, вообще говоря, непонятно, что и как можно посчитать в исходных физических переменных при таком сложном подходе этих работ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Конюхова Н.Б., Курочкин С.В.* Сингулярные нелинейные задачи для автомодельных решений уравнений пограничного слоя с нулевым градиентом давления: анализ и численное решение// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 10. С. 1619–1645.
2. *Диесперов В.Н.* Исследование автомодельных решений, описывающих течения в слоях смешения// Прикл. матем. и механ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 403–414.
3. *Диесперов В.Н.* Поведение автомодельных решений уравнения пограничного слоя с нулевым градиентом давления// Сообщ. по прикл. матем. ВЦ АН СССР. М.: ВЦ АН СССР, 1986.
4. *Диесперов В.Н.* Об одной задаче в теории слоев смешения// Прикл. матем. и механ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 1008–1020.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
6. *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, 1997.
7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
8. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.

9. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
10. *Конюхова Н.Б.* О стационарной задаче Ляпунова для системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка// Дифференц. ур-ния. 1994. Т. 30. № 8. С. 1384–1395.
11. *Конюхова Н.Б.* Об устойчивых многообразиях Ляпунова для автономных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1358–1379.
12. *Конюхова Н.Б.* Гладкие многообразия Ляпунова и сингулярные краевые задачи// Сообщ. по прикл. матем. ВЦ РАН. М.: ВЦ РАН, 1996.
13. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
14. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
15. *Конюхова Н.Б.* Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 3. С. 629–645.