ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 2, с. 282–316

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ, РАЗРУШЕНИЕ И ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ. II. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА[1)]

© 2023 г. М. О. Корпусов[1,*], Е. А. Овсянников[1,**]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

**e-mail: evg.bud@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.
Переработанный вариант 04.07.2022 г.
Принята к публикации 04.07.2022 г.

В статье рассматриваются объемный и поверхностный потенциалы, возникающие в задачах Коши для нелинейных уравнений из теории ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме, и изучаются их свойства. Для объемного потенциала выводится некоторая оценка. На ее основе доказываются одна априорная оценка типа Шаудера и оценки типа Шаудера для потенциалов с весом. Библ. 5.

Ключевые слова: объемный потенциал, поверхностный потенциал, априорные оценки типа Шаудера.

DOI: 10.31857/S0044466923020102, **EDN:** BOJJQG

1. ОБЪЕМНЫЙ И ПОВЕРХНОСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

Стоит отметить, что настоящая статья является логическим продолжением работы [1], в ней продолжаются исследования, начатые ранее в [1].

Рассмотрим следующие объемный и поверхностный потенциалы:

$$U(x,t) = U[\rho](x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau, \tag{1.1}$$

$$V_k(x,t) = V_k[\mu](x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^k G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t)}{\partial t^k}\mu(y)\,dy, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{1.2}$$

где

$$G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t) = \frac{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}}\mathscr{E}(x-y,t), \quad \beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0, \tag{1.3}$$

здесь фундаментальное решение $\mathscr{E}(x,t)$ определено равенством (5.6) в работе [1]. Справедлива следующая

Теорема 1. *Если* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0$, *то*

$$U(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$$

[1)]Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и программы стратегического академического лидерства РУДН.

и справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{\partial^k U[\rho_1](x,t)}{\partial t^k}-\frac{\partial^k U[\rho_2](x,t)}{\partial t^k}\right|_{2+\alpha}\leqslant Td_k(T)\sup_{t\in[0,T]}\left|\rho_1(x,t)-\rho_2(x,t)\right|_{\alpha}$$

для любых $\rho_j(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$ *при* $j=1,2$, *где* $d_k=d_k(T)>0$ *при* $k=0,1,2$ *является монотонно неубывающей, ограниченной на компактах.*

Доказательство.

Шаг 1: $U(x,t)\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times[0,T])$. Пусть $\rho(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha\in(0,1)$ и $\beta_2\geqslant\beta_1\geqslant 0$. Объемный потенциал $U(x,t)$ можно представить в следующем виде:

$$U(x,t)=\int_0^t H(x,t,\tau)d\tau,\quad H(x,t,\tau)=\int_{\mathbb{R}^3}G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy. \tag{1.4}$$

Докажем, что функция $H(x,t,\tau)\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times\{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T\})$. Действительно, пусть

$$(x^j,t^j,\tau^j)\in\mathbb{R}^3\times\{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T\},$$

причем пусть $R_1>0$ настолько велико, что

$$x^j\in O(0,R_1).$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{gathered}\left|H(x^1,t^1,\tau^1)-H(x^2,t^2,\tau^2)\right|\leqslant\left|H_1(x^1,t^1,\tau^1)\right|+\left|H_1(x^2,t^2,\tau^2)\right|+\\+\left|H_2(x^1,t^1,\tau^1)\right|+\left|H_2(x^2,t^2,\tau^2)\right|+\left|H_3(x^1,t^1,\tau^1)-H_3(x^2,t^2,\tau^2)\right|,\end{gathered}\tag{1.5}$$

$$H_1(x^j,t^j,\tau^j)=\int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x^j,R_\delta)}G_{\beta_1,\beta_2}(x^j,y,t^j-\tau^j)\rho(y,\tau^j)dy,$$

$$H_2(x^j,t^j,\tau^j)=\int_{O(x^j,r_\delta)}G_{\beta_1,\beta_2}(x^j,y,t^j-\tau^j)\rho(y,\tau^j)dy,$$

$$H_3(x^j,t^j,\tau^j)=\int_{O(x^j,R_\delta)\setminus O(x^j,r_\delta)}G_{\beta_1,\beta_2}(x^j,y,t^j-\tau^j)\rho(y,\tau^j)dy,\quad j=1,2.$$

Пусть $\delta>0$ — произвольное фиксированное. Тогда найдется такое достаточно большое R_δ, $R_\delta\geqslant R_0>0$, и достаточно малое r_δ, $R_0\geqslant r_\delta>0$, и тогда, в силу оценок (6.7) и (6.9) работы [1], будут справедливы следующие оценки:

$$\left|H_1(x^j,t^j,\tau^j)\right|\leqslant\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]}|\rho(x,t)|(1+R_1^2)^{\beta_1/2}M_1(T,\varepsilon,R_0)\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x^j,R_\delta)}\frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x^j-y|)}{|x^j-y|}\frac{1}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}}dy\leqslant M_2(T,\varepsilon,R_0,R_1)\int_{R_\delta}^{+\infty}\rho\exp(-(1-\varepsilon)\rho)d\rho<\frac{\delta}{3},$$

$$\left|H_2(x^j,t^j,\tau^j)\right|\leqslant(1+R_1^2)^{\beta_1/2}\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]}|\rho(x,t)|M_3(T,\varepsilon,R_0)\times$$

$$\times\int_{O(x^j,r_\delta)}\frac{1}{|x^j-y|}\frac{1}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}}dy\leqslant M_4(T,\varepsilon,R_0,R_1)\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]}|\rho(x,t)|\frac{r_\delta^2}{2}<\frac{\delta}{3}.$$

На этом моменте мы зафиксируем R_δ и r_δ. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\left|H_3(x^1,t^1,\tau^1)-H_3(x^2,t^2,\tau^2)\right|\leqslant\\\leqslant\int_{O(0,R_\delta)\setminus O(0,r_\delta)}\left|\frac{(1+|x^1|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|z+x^1|^2)^{\beta_2/2}}\mathscr{E}(z,t^1-\tau^1)-\frac{(1+|x^2|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|z+x^2|^2)^{\beta_2/2}}\mathscr{E}(z,t^2-\tau^2)\right|dz<\frac{\delta}{3}\end{gathered}\tag{1.6}$$

при условии, что

$$\left|(x^1, t^1, \tau^1) - (x^2, t^2, \tau^2)\right| < \eta(\delta) \tag{1.7}$$

при достаточно малом $\eta(\delta) > 0$. Таким образом, в силу (1.5), (1.6) для любого $\delta > 0$ найдется такое $\eta(\delta) > 0$, что при выполнении неравенства (1.7) будет следовать неравенство

$$\left|H(x^1, t^1, \tau^1) - H(x^2, t^2, \tau^2)\right| < \delta.$$

Таким образом, $H(x,t,\tau) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\})$. Докажем теперь, что $H(x,t,\tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\})$. Действительно, из (1.3) и (1.4) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}|H(x,t,\tau)| \leqslant \left(\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} |\rho(x,t)|\right)(I_1 + I_2),\\ I_1 = (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R_0)} \frac{|\mathscr{E}(x-y,t-\tau)|}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy, \quad I_2 = (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \int\limits_{O(x,R_0)} \frac{|\mathscr{E}(x-y,t-\tau)|}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy.\end{gathered} \tag{1.8}$$

В силу оценки (6.9), см. [1], фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ для I_1 справедлива следующая цепочка соотношений:

$$I_1 = (1+|x|^2)^{\beta_1/2} B_0 \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)}{|x-y|} \frac{1}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy =$$

$$= B_0(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,R_0)} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)|z|)}{|z|} \frac{1}{(1+|x-z|^2)^{\beta_2/2}} dz \leqslant M_5(T,R_0,\varepsilon) \frac{1}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \leqslant M_5(T,R_0,\varepsilon),$$

где мы воспользовались оценкой (10.20) из [1] и тем, что по условию $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0$. Для того, чтобы оценить интеграл I_2, заметим, что при $\beta_1 \geqslant 0$ справедлива следующая оценка:

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \leqslant 2^{\beta_1/4}(1+|x-y|^2)^{\beta_1/2}(1+|y|^2)^{\beta_1/2}. \tag{1.9}$$

С учетом неравенства (1.9) настоящей статьи и оценки (6.7) работы [1] для интеграла I_2 справедлива оценка

$$I_2 \leqslant M_6(T,R_0,\varepsilon) \int\limits_{O(x,R_0)} \frac{(1+|x-y|^2)^{\beta_1/2}}{|x-y|} \frac{1}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy \leqslant M_7(T,R_0,\varepsilon) < +\infty. \tag{1.10}$$

Таким образом, из (1.8)–(1.10) вытекает, что

$$\sup_{(x,\tau,t)\in\mathbb{R}^3\times\{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T\}} |H(x,t,\tau)| < +\infty.$$

Итак,

$$H(x,t,\tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}).$$

Но тогда из (1.4) получаем, что

$$U(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]).$$

Шаг 2: $U_{x_j}(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$. Докажем, что

$$\frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial x_j} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}). \tag{1.11}$$

Сначала докажем, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial x_j} \rho(y,\tau) dy. \tag{1.12}$$

Действительно, пусть $x \in O(0, R_0)$. Справедливы следующие равенства:

$$H(x,t,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0,2R_0)} G_{\beta_1,\beta_2}(x,t,t-\tau)\rho(y,\tau)dy + \int\limits_{O(0,2R_0)} G_{\beta_1,\beta_2}(x,t,t-\tau)\rho(y,\tau)dy = J_1 + J_2. \tag{1.13}$$

Заметим, что в силу явного вида (1.3) функции $G_{\beta_1,\beta_2}(x,t,t)$, а также в силу оценок (6.7) из [1] фундаментального решения и леммы 4.1 из [2] можно доказать поточечное равенство

$$\frac{\partial J_2}{\partial x_j} \int\limits_{O(0,2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,t,t-\tau)}{\partial x_j}\rho(y,\tau)dy. \tag{1.14}$$

Рассмотрим теперь интеграл J_1. Заметим, что если $|y| \geqslant 2R_0$, то имеет место цепочка неравенств

$$|x-y| \geqslant |y| - |x| \geqslant 2R_0 - R_0 = R_0 > 0.$$

Пусть $x_h = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_3)$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$J_3 = \frac{J_1(x_h, y, t-\tau) - J_1(x, y, t-\tau)}{h} - \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0,2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,t,t-\tau)}{\partial x_j}\rho(y,\tau)dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0,2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x^*,t,t-\tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,t,t-\tau)}{\partial x_j}\right]\rho(y,\tau)dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0,NR_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x^*,t,t-\tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,t,t-\tau)}{\partial x_j}\right]\rho(y,\tau)dy +$$

$$+ \int\limits_{O(0,NR_0) \setminus O(0,2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x^*,t,t-\tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,t,t-\tau)}{\partial x_j}\right]\rho(y,\tau)dy = J_{31} + J_{32},$$

где $x^* \in |x, x_h|$. Пусть $\delta > 0$ – произвольное фиксированное. Несложно заметить, что при достаточно большом $N \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$|J_{31}| < \frac{\delta}{2}. \tag{1.15}$$

Фиксируем это $N \in \mathbb{N}$. Тогда при достаточно малом $|h| > 0$ справедлива оценка

$$|J_{32}| < \frac{\delta}{2}. \tag{1.16}$$

Таким образом, из (1.15) и (1.16) вытекает, что

$$J_3 \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0$$

и поэтому справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_j} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(0,2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,t,t-\tau)}{\partial x_j}\rho(y,\tau)dy. \tag{1.17}$$

Из (1.13), (1.14) и (1.17) получаем поточечное равенство (1.12). Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения на первом шаге. Причем необходимо воспользоваться оценками (6.7) и (6.10) фундаментального решения из статьи [1], а также оценкой (10.20) из [1] одного интеграла. В частности, справедлива следующая оценка:

$$\sup_{(x,\tau,t) \in \mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}} \left|\frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial x_j}\right| < +\infty. \tag{1.18}$$

Следовательно, мы доказали, что справедливо выражение (1.11). Докажем, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_j} = \int\limits_0^t \frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial x_j} d\tau. \tag{1.19}$$

Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$J_4 = \frac{U(x_h,t)-U(x,t)}{h} - \int_0^t \frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial x_j}d\tau = \int_0^t \left[\frac{H(x_h,t,\tau)-H(x,t,\tau)}{h} - \frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial x_j}\right]d\tau =$$
$$= \int_0^t \left[\frac{\partial H(x^*,t,\tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial x_j}\right]d\tau \quad \text{при} \quad x^* \in |x,x_h|. \tag{1.20}$$

В силу (1.11) приходим к выводу о том, что

$$J_4 \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \quad \text{для каждого} \quad t \in [0,T].$$

Таким образом, справедливо поточечное равенство (1.19), из которого с учетом (1.11) и (1.18) приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_j} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial x_j}\rho(y,\tau)dyd\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times[0,T]). \tag{1.21}$$

Шаг 3: $U_t(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times[0,T])$.

Докажем, что

$$\frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times\{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}).$$

Сначала докажем поточечное равенство

$$\frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dy. \tag{1.22}$$

Пусть $x \in O(0,R_0)$ при $R_0 > 0$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$H(x,t,\tau) \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,2R_0)} G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy + \int_{O(0,2R_0)} G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy = P_1(x,t,\tau)+P_2(x,t,\tau).$$

Рассуждая точно так же, как при доказательстве леммы 4.1 из [2], несложно доказать, что

$$\frac{\partial P_2(x,t,\tau)}{\partial t} = \int_{O(0,2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dy.$$

При $|y| \geqslant 2R_0$ и $|x| < R_0$ справедливо неравенство

$$|x-y| \geqslant R_0.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$H_1 = \frac{P_1(x,t+h,\tau)-P_1(x,t,\tau)}{h} - \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,2R_0)} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t^*-\tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t}\right]\rho(y,\tau)dy, \quad t^* \in |t,t+h|,$$
$$H_1 = \int_{O(x,NR_0)\setminus O(x,2R_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t^*-\tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t}\right]\rho(y,\tau)dy +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,NR_0)} \left[\frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t^*-\tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t}\right]\rho(y,\tau)dy = H_{11}+H_{12}. \tag{1.23}$$

Для любого $\eta > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|H_{12}| \leqslant M_{11}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} |\rho(x,t)| \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,NR_0)} \frac{(1+|x-y|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)}{|x-y|} dy \leqslant$$
$$\leqslant M_{12}(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} |\rho(x,t)| \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,NR_0)} (1+|z|^2)^{\beta_1/2} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)|z|)}{|z|} dz < \frac{\eta}{3},$$

где мы воспользовались неравенством (1.9), а также оценкой (6.9) из [1]. Фиксируем это $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\eta > 0$ найдется такое $\mu = \mu(\eta) > 0$, что при $|h| < \eta$ справедлива цепочка неравенств

$$|H_{11}| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} |\rho(x,t)| \int\limits_{O(x,NR_0)\setminus O(x,\delta)} \left| \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t^*-\tau)}{\partial t} - \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t} \right| dy < \frac{\eta}{3}, \tag{1.24}$$

где мы воспользовались явным видом (1.3) функции $G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)$ и свойством гладкости (6.6) из [1] фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$. Таким образом, из (1.23), (1.24) с учетом (1.23) приходим к выводу о том, что справедливо поточечное равенство (1.22).

Рассуждая точно так же, как на шаге 1, с учетом оценок (6.7) и (6.9) статьи [1], а также оценки интеграла (10. 20) из [1] мы можем доказать, что

$$\frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t} \rho(y,\tau) dy \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}), \tag{1.25}$$

причем справедлива оценка

$$\sup_{(x,t,\tau)\in\mathbb{R}^3\times\{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T\}} \left| \frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial t} \right| < +\infty. \tag{1.26}$$

Теперь мы докажем, что

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t} \rho(y,\tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{1.27}$$

Докажем поточечное равенство

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \int\limits_0^t \frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial t} d\tau. \tag{1.28}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U(t+h,x) - U(t,x)}{h} - \int\limits_0^t \frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial t} d\tau = \frac{1}{h} \int\limits_0^{t+h} H(x,t+h,\tau) d\tau - \frac{1}{h} \int\limits_0^t H(x,t,\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} H(x,t+h,\tau) d\tau + \int\limits_0^t \left[\frac{H(x,t+h,\tau) - H(x,t,\tau)}{h} - \frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial t} \right] d\tau = U_{11} + U_{12}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Для интеграла U_{11} справедливо равенство

$$U_{11} = \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} [H(x,t+h,\tau) - H(x,t,t)] d\tau + H(x,t,t) = U_{111} + U_{112}.$$

Ранее на шаге 1 было доказано, что $H(x,t,\tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,t])$ для любого $t \in [0,T]$. Поэтому имеет место предельное свойство

$$U_{111} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Заметим, что из явного вида (5.6), см. [1], вытекает, что

$$U_{112} = H(x,t,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,0)\rho(y,t)dy = 0.$$

В силу (1.25) имеют место следующие соотношения:

$$U_{12} = \int\limits_0^t \left[\frac{\partial H(x,t^*,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial t}\right] d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{1.30}$$

где $t^* \in |t, t+h|$. Таким образом, из (1.29), (1.30) вытекает поточечное равенство (1.28). Осталось воспользоваться свойством гладкости (1.25) и оценкой (1.26) и получить, что справедлива формула (1.27).

Шаг 4: $U_{x_jt}(x,t) = U_{tx_j}(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$.

Из поточечного равенства (1.21), рассуждая точно так же, как на шаге 3, можно доказать, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t \partial x_j} = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j} d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t \partial x_j} \rho(y,\tau) dy d\tau,$$
$$\frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}), \tag{1.31}$$

причем справедливы поточечные равенства

$$\frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial t}.$$

Из поточечного равенства (1.27), рассуждая точно так же, как на шаге 2, можно доказать, что справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial t} = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial x_j \partial t} \rho(y,\tau) dy d\tau. \tag{1.32}$$

Теперь, рассуждая точно так же, как на шагах 1–3, с учетом оценок (6.7) и (6.10) статьи [1] можно доказать, что в силу поточечных равенств (1.31) и (1.32) имеем

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t \partial x_j}, \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]),$$

и поэтому в силу известного результата математического анализа производные коммутируют

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{1.33}$$

Шаг 5: $U_{tt}(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$.

Используя доказанное на шаге 3 поточечное равенство (1.27), точно так же, как на шаге 3, можно доказать, что справедливо следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \rho(y,t) dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t^2} \rho(y,\tau) dy d\tau. \tag{1.34}$$

Поскольку по условию $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ и с учетом оценок (6.7) и (6.9) статьи [1] из поточечного равенства (1.34) точно так же, как на шаге 1, можно доказать, что

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]).$$

Шаг 6: $U_{x_jx_k} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$.

Поскольку $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$, то с учетом (3.1) и (4.8) справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_k} = \left[\beta_1(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\delta_{kj} + \beta_1(\beta_1-2)x_k x_j(1+|x|^2)^{\beta_1/2-2}\right]\times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}}dy + \beta_1 x_k(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial x_j}\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}}dy +$$
$$+ \beta_1 x_j(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial x_k}\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}}dy + \tag{1.35}$$
$$+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}}dy = L_1 + L_2 + L_3 + L_4,$$

причем для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$L_4 = (1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}}dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j\partial y_k}((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2})\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}}dy +$$
$$+ \int_{O(x,R_\delta)\setminus O(x,r_\delta)}\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j\partial y_k}\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}}dy + \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_\delta)}\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j\partial y_k}\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}}dy + \tag{1.36}$$
$$+ \int_{O(x,r_\delta)}\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial y_k}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\left[\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}}\right]dy +$$
$$+ \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}}\int_{\partial O(x,r_\delta)}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_k}\cos(n_y,e_j)dS_y = L_{41} + L_{42} + L_{43} + L_{44} + L_{45}.$$

Точно так же, как на шаге 1, можно доказать, что

$$L_1(x,t,\tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}). \tag{1.37}$$

Точно так же, как на шаге 2, можно доказать, что

$$L_2(x,t,\tau),\ L_3(x,t,\tau) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}). \tag{1.38}$$

Заметим, что в силу оценок (3.28) и (3.29) при $x \neq y$ справедливы следующие неравенства:

$$\frac{\left|(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}\right|}{|x-y|} \leqslant 3\beta_1, \quad \beta_1 \in [0,1],$$
$$\frac{\left|(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}\right|}{|x-y|} \leqslant 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2}(1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2}(1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}, \quad \beta_1 > 1. \tag{1.39}$$

Кроме того, в силу оценок (6.8), (6.11) статьи [1] для функции

$$|x-y|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial y_k}$$

справедливы следующие оценки при любом $R_0 > 0$:

$$|x-y|\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial y_k}\right| \leqslant \frac{A_4(T,R_0,\varepsilon)}{|x-y|^2} \quad \text{при} \quad |x-y| \leqslant R_0,$$

$$|x-y|\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial y_k}\right| \leqslant B_4(T,R_0,\varepsilon)\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|) \quad \text{при} \quad |x-y|>R_0.$$

Кроме того, в силу свойства гладкости (6.6) из [1] фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ имеем

$$|x|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x,t)}{\partial x_j\partial x_k} \in \mathbb{C}^{(m+n)}(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}\times[0,+\infty)) \quad \text{для всех} \quad m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{1.40}$$

Поэтому точно так же, как на шаге 1, для функции $L_{41}(x,t,\tau)$ с учетом (1.39), (1.40), а также оценки (10.47), [1] одного интеграла, можно доказать, что

$$L_{41}(x,t,\tau)\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times\{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T\}). \tag{1.41}$$

Рассмотрим интегралы L_{43} и L_{44}. Для любого $\delta>0$ выберем достаточно большим $R_\delta>R_0$ и достаточно малым $0<r_\delta<R_0$ таким образом, что будут справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}|L_{43}| &\leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} M_{13}(T,R_0,\varepsilon)\int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash O(x,R_\delta)}\frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)}{|x-y|}dy \leqslant \\ &\leqslant M_{14}(T,R_0,\varepsilon)\int\limits_{R_\delta}^{+\infty}\rho\exp(-(1-\varepsilon)\rho)d\rho<\frac{\delta}{4},\end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}|L_{44}| &\leqslant \left[\frac{\rho(x,t)}{(1+|x|^2)^{\beta_2-\beta_1}}\right]_\alpha\int\limits_{O(x,r_\delta)}|x-y|^\alpha\left|\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial y_k}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\right|dy\leqslant \\ &\leqslant M_{15}(T,R_0,\varepsilon)\sup_{t\in[0,T]}|\rho(x,t)|_\alpha\int\limits_{O(x,r_\delta)}\frac{1}{|x-y|^{3-\alpha}}dy\leqslant M_{16}(T,R_0,\varepsilon)r_\delta^\alpha<\frac{\delta}{4}.\end{aligned} \tag{1.43}$$

На этом шаге зафиксируем эти $R_\delta>R_0>0$ и $0<r_\delta<R_0$. Тогда несложно доказать, что интегралы $L_{42}(x,t,\tau), L_{45}(x,t,\tau)\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^3\times\{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T\})$. Тем самым, с учетом оценок (1.42) и (1.43) нетрудно доказать (см. шаг 1), что

$$L_{42}(x,t,\tau)+L_{43}(x,t,\tau)+L_{44}(x,t,\tau)+L_{45}(x,t,\tau)\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times\{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T\}). \tag{1.44}$$

Заметим теперь, что функция L_4 не зависит от выбора чисел $R_\delta>r_\delta>0$. Поэтому возьмем в качестве этих чисел следующие:

$$R_\delta=2R_0,\quad r_\delta=\frac{R_0}{2},\quad R_0>0;$$

$$\begin{aligned}|L_{42}| \leqslant M_{17}(T,R_0,\varepsilon)\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3}|\rho(x,t)|\left[\int\limits_{O(x,2R_0)\backslash O(x,R_0)}\frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)}{|x-y|}dy+\int\limits_{O(x,R_0)\backslash O(x,R_0/2)}\frac{1}{|x-y|^3}dy\right]\leqslant \\ \leqslant M_{18}(T,R_0,\varepsilon)\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3}|\rho(x,t)|,\end{aligned}$$

$$|L_{45}|\leqslant M_{19}(T,R_0,\varepsilon)\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3}|\rho(x,t)|.$$

Таким образом, соотношение (1.44) доказано. Следовательно, из (1.41)–(1.44), а также из (1.37), (1.38) вытекает, что

$$\frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial x_j\partial x_k}\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times\{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T\}). \tag{1.45}$$

Поскольку (1.45) справедливо для всех $j,k\in\{1,2,3\}$, то в силу известной теоремы математического анализа справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial x_j\partial x_k}=\frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial x_k\partial x_j}. \tag{1.46}$$

В силу результата шага 2 справедливо поточечное равенство (1.19)

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial x_j} d\tau.$$

В силу (1.11) и (1.45) точно так же, как на шаге 2 (см. цепочку равенств (1.20)), получим следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_k \partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial x_k \partial x_j} d\tau,$$

из которого в силу (1.45), как и на предыдущих шагах, приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_k \partial x_j} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$$

и, кроме того, в силу (1.46) справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Шаг 7: $U_{tx_jx_k}(x,t) = U_{x_jtx_k}(x,t) = U_{x_jx_kt}(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$.

Прежде всего заметим, что справедливо поточечное равенство (1.22)

$$\frac{\partial H(x,t,\tau)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t} \rho(y,\tau) dy \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}).$$

Заметим, что поскольку $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$, то в силу равенства (4.9) приходим к следующему равенству:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 H(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \left[\beta_1(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\delta_{kj} + \beta_1(\beta_1-2)x_k x_j(1+|x|^2)^{\beta_1/2-2}\right]\times \\ \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial x_j \partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ + \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial x_k \partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy,\end{gathered} \tag{1.47}$$

причем для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$\begin{gathered}(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \left((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}\right) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\ + \int_{O(x,R_\delta)\setminus O(x,r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\ + \int_{O(x,r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t} \left[\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}}\right] dy + \\ + \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x,r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_k \partial t} \cos(n_y,e_j) dS_y.\end{gathered} \tag{1.48}$$

Точно так же, как на шаге 6, используя представление (1.47), можно доказать следующие равенства:

$$\frac{\partial^3 H(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}),$$

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \int_0^t \frac{\partial^3 H(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t} \rho(y,\tau) dy d\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{1.49}$$

На основании результата 4 шага справедливо равенство (1.33), из которого вытекает следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k}.$$

Теперь наша задача доказать, что

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]).$$

С этой целью воспользуемся равенствами (1.35) и (1.36). Точно так же, как на шаге 3, можно получить следующие поточечные равенства:

$$\frac{\partial^3 H(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \left[\beta_1(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\delta_{kj} + \beta_1(\beta_1-2)x_k x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-2}\right] \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t \partial x_j} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy +$$

$$+ \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t \partial x_k} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy +$$

$$+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy,$$

причем для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy +$$

$$+ \int_{O(x,R_\delta)\setminus O(x,r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy +$$

$$+ \int_{O(x,r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial t \partial y_j \partial y_k} \mathscr{E}(x-y,t-\tau) \left[\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}}\right] dy +$$

$$+ \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int_{\partial O(x,r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t \partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y.$$

Поскольку для фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ справедлива лемма 6.1 из [1], то можно доказать следующие равенства:

$$\frac{\partial^3 H(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \left[\beta_1(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\delta_{kj} + \beta_1(\beta_1-2)x_k x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-2}\right] \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial x_j \partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy +$$
$$+ \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial x_k \partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \tag{1.50}$$
$$+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy,$$

причем для любых $R_\delta > r_\delta > 0$ справедливо равенство

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy +$$
$$+ \int\limits_{O(x,R_\delta)\setminus O(x,r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_\delta)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \tag{1.51}$$
$$+ \int\limits_{O(x,r_\delta)} \frac{\partial^3}{\partial y_j \partial y_k \partial t} \mathscr{E}(x-y,t-\tau) \left[\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy +$$
$$+ \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int\limits_{\partial O(x,r_\delta)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_k \partial t} \cos(n_y, e_j) dS_y.$$

Из сравнения равенств (1.47) и (1.48) с равенствами (1.50) и (1.51) приходим к следующим поточечным равенствам:

$$\frac{\partial^3 H(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 H(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}). \tag{1.52}$$

В силу результатов, полученных на шаге 6, справедливы следующие выражения:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_k} d\tau, \quad \frac{\partial^2 H(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_k} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}).$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 H(x,t,t)}{\partial x_j \partial x_k} + \int\limits_0^t \frac{\partial^3 H(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} d\tau, \tag{1.53}$$

причем

$$\frac{\partial^2 H(x,t,t)}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$

Таким образом, из (1.53) с учетом (1.52) и (1.49) справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} = \int\limits_0^t \frac{\partial^3 H(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial^3 H(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} d\tau = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]).$$

Кроме того, в силу (1.33) справедливы поточечные равенства

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t} = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial x_k} = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial x_k}.$$

Шаг 8: $U_{x_jtt}(x,t) = U_{tx_jt}(x,t) = U_{ttx_j}(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$.

Точно так же, как на шаге 2, используя равенство (1.34), с учетом оценок (6.7) и (6.10) статьи [1] можно получить поточечное равенство

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t^2} = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial x_j \partial t^2}\rho(y,\tau)dyd\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]).$$

С одной стороны, используя оценки (6.7) и (6.10) статьи [1], можно доказать в точности так же, как на шагах 4 и 5, поточечное равенство

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t^2 \partial x_j} = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t^2 \partial x_j}\rho(y,\tau)dyd\tau \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{1.54}$$

С другой стороны, в силу результата леммы 6.1 из [1] можно доказать поточечное равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t^2 \partial x_j}\rho(y,\tau)dyd\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial x_j \partial t^2}\rho(y,\tau)dyd\tau,$$

из которого и из (1.54) вытекают равенства

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t^2 \partial x_j} = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial x_j \partial t^2}\rho(y,\tau)dyd\tau = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t^2}.$$

Заметим, что в силу результата шага 4 справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t^2 \partial x_j} = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial t}. \tag{1.55}$$

Таким образом, из (1.54), (1.55) вытекают поточечные равенства

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t^2 \partial x_j} = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial t} = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{1.56}$$

Шаг 9: $U_{x_jx_ktt}(x,t) = U_{x_jtx_kt}(x,t) = U_{x_jttx_k} = U_{tx_jx_kt}(x,t) = U_{tx_jtx_k}(x,t) = U_{ttx_jx_k}(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$.

Из формулы (1.34), используя оценки (6.7)–(6.11) статьи [1], точно так же, как на шаге 7, можно доказать поточечное равенство

$$\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|}\rho(y,t)dy + \\ + \int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t^2}\rho(y,\tau)dyd\tau, \tag{1.57}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|}\rho(y,t)dy = \\ = \Big[\beta_1(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\delta_{kj} + \beta_1(\beta_1-2)x_kx_j(1+|x|^2)^{\beta_1/2-2}\Big]\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \tag{1.58}$$
$$+ \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy +$$
$$+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy,$$

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy +$$
$$+ \int\limits_{O(x,R_\delta)\setminus O(x,r_\delta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_\delta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \tag{1.59}$$
$$+ \int\limits_{O(x,r_\delta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \left[\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy +$$
$$+ \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int\limits_{\partial O(x,r_\delta)} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \right) \cos(n_y, e_j)\, dS_y,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t^2} \rho(y,\tau) dy = \left[\beta_1 (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \delta_{kj} + \beta_1(\beta_1-2) x_k x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-2} \right] \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial x_j \partial t^2} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \tag{1.60}$$
$$+ \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial x_k \partial t^2} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy +$$
$$+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy,$$

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^4 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy +$$
$$+ \int\limits_{O(x,R_\delta)\setminus O(x,r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_\delta)} \frac{\partial^4 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \tag{1.61}$$
$$+ \int\limits_{O(x,r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j \partial y_k \partial t^2} \left[\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \right] dy +$$
$$+ \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int\limits_{\partial O(x,r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_k \partial t^2} \cos(n_y, e_j)\, dS_y, \quad R_\delta > r_\delta > 0,$$

причем из (1.58) и (1.59) получаем, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \rho(y,t)dy \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]), \tag{1.62}$$

а из (1.60) и (1.61) вытекает, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t^2} \rho(y,\tau)dy \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}). \tag{1.63}$$

Далее уже стандартным образом из (1.57), (1.62) и (1.63) получаем, что

$$\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]).$$

Теперь из поточечного равенства (1.35) точно так же, как на шаге 7, с учетом оценок (6.7)–(6.11) из [1] фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ можно аналогично шагу 5 доказать следующее поточечное равенство:

$$\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} = -\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|} \rho(y,t)dy + \int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau,$$

где для первого слагаемого справедливы формулы (1.58) и (1.59), а для второго слагаемого имеют место следующие формулы:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy = \left[\beta_1(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\delta_{kj} + \beta_1(\beta_1-2)x_k x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-2}\right] \times \\
\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \beta_1 x_k (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2 \partial x_j} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
+ \beta_1 x_j (1+|x|^2)^{\beta_1/2-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2 \partial x_k} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy,
\end{gathered} \tag{1.64}$$

$$\begin{gathered}
(1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^4 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} ((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}} dy + \\
+ \int\limits_{O(x,R_\delta)\setminus O(x,r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_\delta)} \frac{\partial^4 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} dy + \\
+ \int\limits_{O(x,r_\delta)} \frac{\partial^4 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2 \partial y_j \partial y_k} \left[\frac{\rho(y,\tau)}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} - \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}}\right] dy + \\
+ \frac{\rho(x,\tau)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}} \int\limits_{\partial O(x,r_\delta)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2 \partial y_k} \cos(n_y, e_j) dS_y, \quad R_\delta > r_\delta > 0.
\end{gathered} \tag{1.65}$$

Используя результат леммы 6.1 из [1], можно доказать, что правые части равенств (1.60) и (1.64), (1.61) и (1.65) совпадают. Поэтому сразу же получаем то, что справедливы соотношения

$$\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t^2 \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{1.66}$$

Теперь заметим, что в силу равенств (1.56) справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t^2\partial x_j\partial x_k}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t\partial t\partial x_j\partial x_k}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t\partial x_j\partial t\partial x_k}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t\partial x_j\partial x_k\partial t},\\ \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j\partial x_k\partial t^2}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j\partial x_k\partial t\partial t}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j\partial t\partial x_k\partial t}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j\partial t\partial t\partial x_k}.\end{gathered}\tag{1.67}$$

Таким образом, из (1.66), (1.67) получаем, что справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j\partial x_k\partial t\partial t}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j\partial t\partial x_k\partial t}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j\partial t\partial t\partial x_k}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t\partial t\partial x_j\partial x_k}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t\partial x_j\partial t\partial x_k}=\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial t\partial x_j\partial x_k\partial t}\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times[0,T]).$$

Итак, из результатов шагов 1–9 вытекает промежуточная

Лемма 1.1. *Если* $\rho(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$ при $\alpha\in(0,1)$ и $\beta_2\geqslant\beta_1\geqslant 0$, то потенциал $U(x,t)\in\mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3\times[0,T])$.

Шаг 10: $U(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

Из теоремы 8 для каждого $t\in[0,T]$ и $\alpha\in(0,1)$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered}U(x,t)\in\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3),\\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dyd\tau\in\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3).\end{gathered}\tag{1.68}$$

В силу результата леммы 1.1 справедливо следующее равенство:

$$U(x,t_2)-U(x,t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}dt\quad\text{для всех}\quad 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T.\tag{1.69}$$

Из (1.69) получаем неравенство

$$|U(x,t_2)-U(x,t_1)|_{2+\alpha}\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\alpha}dt\quad\text{для всех}\quad 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T,\tag{1.70}$$

причем из (3.76) справедлива оценка

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\alpha}\leqslant b_1(T)\sup_{t\in[0,T]}|\rho(x,t)|_{\alpha},$$

из которой и из (1.70) получаем неравенство

$$|U(x,t_2)-U(x,t_1)|_{2+\alpha}\leqslant b_1(T)\sup_{t\in[0,T]}|\rho(x,t)|_{\alpha}|t_2-t_1|\to+0\quad\text{при}\quad|t_2-t_1|\to+0.$$

Следовательно,

$$U(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Шаг 11: $U(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

Заметим, что справедливо равенство (1.34), которое можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}=W(x,t)+U_2(x,t),\tag{1.71}$$

$$\begin{gathered}W(x,t)=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta_2/2}}\frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|}\rho(y,t)dy,\\ U_2(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^2 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t^2}\rho(y,\tau)dyd\tau.\end{gathered}\tag{1.72}$$

Заметим, что фактически точно так же, как это было сделано на шагах 1–10, можно доказать, что

$$W(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+0)}(\mathbb{R}^3 \times [0,T]). \tag{1.73}$$

В силу результата теоремы 9 имеет место оценка следующего вида:

$$\sup_{t\in[0,T]} |W(x,t)|_{2+\alpha} \leqslant b_2 \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_{\alpha}, \tag{1.74}$$

а в силу результата теоремы 8 справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t\in[0,T]} |U_2(x,t)|_{2+\alpha} \leqslant b_3(T) \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_{\alpha}. \tag{1.75}$$

Из оценок (1.74) и (1.75), а также леммы 1.1 с учетом (1.71) получаем, что

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T]. \tag{1.76}$$

Наконец, из результата леммы 1.1 вытекает равенство

$$\frac{\partial U(x,t_2)}{\partial t} - \frac{\partial U(x,t_1)}{\partial t} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 U(x,\tau)}{\partial \tau^2} d\tau$$

для всех $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, из которого с учетом (1.68) и (1.76) получаем неравенства

$$\left|\frac{\partial U(x,t_2)}{\partial t} - \frac{\partial U(x,t_1)}{\partial t}\right|_{2+\alpha} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\partial^2 U(x,\tau)}{\partial \tau^2}\right|_{2+\alpha} d\tau \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \left|\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right|_{2+\alpha} |t_2 - t_1| \leqslant$$
$$\leqslant b_4(T) \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_{\alpha} |t_2 - t_1| \to +0$$

при $|t_2 - t_1| \to +0$. Следовательно,

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Докажем, что

$$\frac{dU(x,t)}{dt} = \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}, \tag{1.77}$$

где символом dU/dt мы обозначили сильную производную по времени в смысле банахова пространства $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$. Действительно, справедливы следующие соотношения:

$$\left|\frac{U(x,t+h) - U(x,t)}{h} - \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\alpha} = \left|\frac{U(x,t+h) - U(x,t)}{h} - \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_0 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{U_{x_j}(x,t+h) - U_{x_j}(x,t)}{h} - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial t}\right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left|\frac{U_{x_j x_k}(x,t+h) - U_{x_j x_k}(x,t)}{h} - \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t}\right|_{\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\partial U(x,t^*)}{\partial t} - \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_0 + \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial^2 U(x,t^{**})}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial t}\right|_0 +$$
$$+ \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left|\frac{\partial^3 U(x,t^{***})}{\partial t \partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t}\right|_{\alpha} \leqslant \sup_{s\in[t,t+h]} \left|\frac{\partial U(x,s)}{\partial t} - \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_0 + \tag{1.78}$$
$$+ \sum_{j=1}^{3} \sup_{s\in[t,t+h]} \left|\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial t \partial x_j} - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial t}\right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \sup_{s\in[t,t+h]} \left|\frac{\partial^3 U(x,s)}{\partial t \partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t}\right|_{\alpha} =$$
$$= \sup_{s\in[t,t+h]} \left|\frac{\partial U(x,s)}{\partial t} - \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_0 + \sum_{j=1}^{3} \sup_{s\in[t,t+h]} \left|\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x_j \partial t} - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial t}\right|_0 +$$

$$+\sum_{j,k=1,1}^{3,3}\sup_{s\in|t,t+h|}\left|\frac{\partial^3 U(x,s)}{\partial x_j\partial x_k\partial t}-\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j\partial x_k\partial t}\right|_\alpha = I_1+I_2+I_3,$$

где мы воспользовались коммутационными соотношениями, которые справедливы в силу результата леммы 1.1. В силу этой же леммы справедливы предельные свойства

$$I_1\to 0,\quad I_2\to 0\quad \text{при}\quad |h|\to +0. \tag{1.79}$$

Заметим, что в силу результата леммы 1.1 и теоремы 8 справедливо равенство

$$\frac{\partial^3 U(x,s)}{\partial x_j\partial x_k\partial t}-\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j\partial x_k\partial t}=\int\limits_{|s,t|}\frac{\partial^4 U(x,\tau)}{\partial x_j\partial x_k\partial \tau^2}d\tau, \tag{1.80}$$

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j\partial x_k\partial t},\quad \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j\partial x_k\partial t^2}\in\mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)\quad \text{для любого}\quad t\in[0,T]. \tag{1.81}$$

Поэтому из (1.80) с учетом (1.81) вытекает оценка

$$\left|\frac{\partial^3 U(x,s)}{\partial x_j\partial x_k\partial t}-\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j\partial x_k\partial t}\right|_\alpha \leqslant \int\limits_{|s,t|}\left|\frac{\partial^4 U(x,\tau)}{\partial x_j\partial x_k\partial \tau^2}\right|_\alpha d\tau \leqslant \sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j\partial x_k\partial t}\right|_\alpha |t-s|\leqslant b_5(T)\sup_{t\in[0,T]}|\rho(x,t)|_\alpha|t-s|,$$

из которой вытекает, что

$$I_3\to 0\quad \text{при}\quad |h|\to +0. \tag{1.82}$$

Таким образом, из (1.78) с учетом (1.79) и (1.82) приходим к выводу о том, что

$$\left|\frac{U(x,t+h)-U(x,t)}{h}-\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\alpha}\to +0\quad \text{при}\quad |h|\to +0.$$

Следовательно, доказано (1.77), и поэтому вместе с результатом шага 10 приходим к выводу, что

$$U(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))\quad \text{при}\quad \alpha\in(0,1).$$

Шаг 12: $U(x,t)\in\mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

Заметим, что справедливо равенство (1.71). При этом в силу оценки (3.77) и соотношения (1.73) имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered}W(x,t)\in\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)\quad \text{для всех}\quad t\in[0,T],\quad \alpha\in(0,1),\\ |W(x,t_2)-W(x,t_1)|_{2+\alpha}\leqslant b_2(T)|\rho(x,t_2)-\rho(x,t_1)|_\alpha\to +0\end{gathered} \tag{1.83}$$

при $|t_2-t_1|\to +0$ для всех $t_1,t_2\in[0,T]$, и поэтому

$$W(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))\quad \text{при}\quad \alpha\in(0,1).$$

Теперь рассмотрим потенциал $U_2(x,t)$, определенный равенством (1.72). Точно так же, как при доказательстве равенства (1.71) на шаге 5, используя результат леммы 5.1 [1], можно доказать поточечное равенство

$$\frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t}=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^3 G_{\beta_1,\beta_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t^3}\rho(y,\tau)dyd\tau.$$

Теперь, используя оценки (6.7)–(6.11) из [1], можно доказать, что

$$\frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t}\in\mathbb{C}_b^{(2+0)}(\mathbb{R}^3\times[0,T]). \tag{1.84}$$

На самом деле можно доказать, что

$$\frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t}\in\mathbb{C}_b^{(2+1)}(\mathbb{R}^3\times[0,T]), \tag{1.85}$$

но для наших целей вполне достаточно соотношения (1.84). Кроме того, в силу результата теоремы 8 имеет место соотношение

$$\frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T]. \tag{1.86}$$

Итак, с учетом (1.83)–(1.86) получаем из равенства (1.71) выражение

$$\frac{\partial^2 U(x,t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x,t_1)}{\partial t^2} = W(x,t_2) - W(x,t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t} dt, \tag{1.87}$$

причем

$$\left|\frac{\partial^2 U(x,t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x,t_1)}{\partial t^2}\right|_{2+\alpha} \leqslant |W(x,t_2) - W(x,t_1)|_{2+\alpha} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\alpha} dt,$$
$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\alpha} \leqslant b_3(T) \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_\alpha. \tag{1.88}$$

Таким образом, из (1.87), (1.88) вытекает оценка

$$\left|\frac{\partial^2 U(x,t_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x,t_1)}{\partial t^2}\right|_{2+\alpha} \leqslant b_4(T)\left(|\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1)|_\alpha + \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_\alpha |t_2 - t_1|\right) \to +0$$

при $|t_2 - t_1| \to +0$ для любых $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0,1).$$

Учитывая, что на предыдущем шаге нами было доказано, что

$$\frac{dU(x,t)}{dt} = \frac{\partial U(x,t)}{\partial t},$$

то теперь наша задача доказать, что в смысле банахова пространства $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}.$$

Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\left|\frac{U_t(x,t+h) - U_t(x,t)}{h} - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right|_{2+\alpha} = \left|\frac{U_t(x,t+h) - U_t(x,t)}{h} - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right|_0 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{U_{x_j t}(x,t+h) - U_{x_j t}(x,t)}{h} - \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t^2}\right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left|\frac{U_{x_j x_k t}(x,t+h) - U_{x_j x_k t}(x,t)}{h} - \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2}\right|_\alpha =$$
$$= \left|\frac{\partial^2 U(x,t^*)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right|_0 + \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial^3 U(x,t^{**})}{\partial t \partial x_j \partial t} - \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t^2}\right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left|\frac{\partial^4 U(x,t^{***})}{\partial t \partial x_j \partial x_k \partial t} - \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2}\right|_\alpha =$$
$$= \left|\frac{\partial^2 U(x,t^*)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right|_0 + \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial^3 U(x,t^{**})}{\partial x_j \partial t^2} - \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t^2}\right|_0 + \sum_{j,k=1,1}^{3,3} \left|\frac{\partial^4 U(x,t^{***})}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2} - \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t^2}\right|_\alpha =$$
$$= J_1 + J_2 + J_3, \quad t^*,\, t^{**},\, t^{***} \in |t, t+h|,$$

где мы воспользовались коммутационными соотношениями, поскольку в силу леммы 1.1 имеем $U(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$. Далее, рассуждая точно так же, как на шаге 11, в силу (1.85), (1.86) и (1.88) можно доказать, что

$$J_1,\, J_2,\, J_3 \to +0 \quad \text{при} \quad |h| \to +0.$$

Таким образом, в силу результатов шагов 10–12 справедливо основное утверждение настоящей теоремы

$$U(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0,1).$$

Теорема доказана полностью.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Если* $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0$, *то для любого* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *имеем*

$$V_k(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)),$$

где потенциал $V_k(x,t)$ *определен равенством* (1.2).

Доказательство. Утверждение фактически доказано при доказательстве теоремы 1.

Введем следующие потенциалы:

$$U_0(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho_0(y,\tau)dyd\tau, \tag{1.89}$$

$$V_{00}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\mu_0(y)dy,$$

$$V_{01}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\mu_1(y)dy, \tag{1.90}$$

где

$$\rho_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}((1+|x|^2)^{\gamma/2};\mathbb{R}^3), \tag{1.91}$$

$$\begin{gathered} \mu_0(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3), \\ \mu_0(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_3/2};\mathbb{R}^3) \end{gathered} \tag{1.92}$$

при $\min\{\gamma,\beta_2,\beta_3\} \geqslant \beta_1 \geqslant 0$. Заметим, что потенциалы (1.89), (1.90) связаны с потенциалами (1.1) и (1.2) следующим образом:

$$U_0(x,t) = \frac{U(x,t)}{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \rho(x,t) = (1+|x|^2)^{\gamma/2}\rho_0(x,t), \tag{1.93}$$

$$V_{00}(x,t) = \frac{V_0(x,t)}{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \mu(x) = (1+|x|^2)^{\beta_2/2}\mu_0(x),$$

$$V_{01}(x,t) = \frac{V_1(x,t)}{(1+|x|^2)^{\beta_1/2}}, \quad \mu(x) = (1+|x|^2)^{\beta_3/2}\mu_1(x). \tag{1.94}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Если выполнены соотношения* (1.91),(1.92), *то при* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\min\{\gamma,\beta_2,\beta_3\} \geqslant \beta_1 \geqslant 0$ *справедливы соотношения*

$$U_0(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbb{C}_b^{(2+2)}((1+|x|^2)^{\beta_1/2};\mathbb{R}^3 \times [0,T]),$$

$$V_{00}(x,t), V_{01}(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbb{C}_b^{(2+2)}((1+|x|^2)^{\beta_1/2};\mathbb{R}^3 \times [0,T]).$$

Доказательство. Теорема является следствием равенств (1.93), (1.94) и теорем 1, 2.

Справедлива следующая

Лемма 1.2. *Если* $u_0(x)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, *то справедливы следующие равенства*:

$$\frac{\partial V_{00}[\Delta u_1 - u_1]}{\partial t}(x,0) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|}[\Delta u_1(y) - u_1(y)]dy = u_1(x), \tag{1.95}$$

$$V_{01}[\Delta u_0 - u_0](x,0) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|}[\Delta u_0(y) - u_0(y)]dy = u_0(x), \tag{1.96}$$

$$\begin{gathered} U_{00}(x,0) = \frac{\partial U_{00}}{\partial t}(x,0) = 0, \\ V_{00}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial V_{01}}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{gathered} \tag{1.97}$$

Доказательство. Равенства (1.95) и (1.96) являются следствиями теоремы 2 и доказаны, например, в работе [3]. Равенства (1.97) являются следствиями леммы I.5.1.

Наконец, справедлива следующая

Теорема 4. *Если* $\rho_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$, $\mu_0(x), \mu_1(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *при* $\alpha \in (0,1)$, *то*

$$\mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x,t) = \rho_0(x,t), \tag{1.98}$$

$$\begin{gathered} \mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x,t) = \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T], \\ \mathfrak{M}_{x,t}[w](x,t) = \Delta_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{3} \omega_j^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_j^2}. \end{gathered} \tag{1.99}$$

Доказательство. Пусть $\langle\langle \cdot,\cdot \rangle\rangle$ – скобки двойственности между пространством основных функций $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$ и пространством обобщенных функций $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$, а $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скобки двойственности между пространством основных функций $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^3)$ и пространством обобщенных функций $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^3)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle\langle U_0(x,t), \phi(x,t) \rangle\rangle \langle\langle \mathscr{E}(x,t) * \rho_0(x,t), \phi(x,t) \rangle\rangle, \quad \langle\langle V_{00}(x,t), \phi(x,t) \rangle\rangle = \langle\langle \mathscr{E}(x,t) * \delta(t)\mu_0(x), \phi(x,t) \rangle\rangle,$$

$$\begin{gathered} \langle\langle V_{01}(x,t), \phi(x,t) \rangle\rangle = \langle\langle \mathscr{E}'(x,t) * \delta(t)\mu_1(x), \phi(x,t) \rangle\rangle = \\ = \langle\langle \mathscr{E}(x,t) * \delta'(t)\mu_1(x), \phi(x,t) \rangle\rangle \quad \text{для любой} \quad \phi(x,t) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times (0,T)). \end{gathered}$$

Используя известные результаты теории обобщенных функций, можно доказать следующие равенства:

$$\begin{gathered} \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x,t), \phi(x,t) \rangle\rangle \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x,t) * \rho_0(x,t), \phi(x,t) \rangle\rangle = \\ = \langle\langle \delta(x,t) * \rho_0(x,t), \phi(x,t) \rangle\rangle \langle\langle \rho_0(x,t), \phi(x,t) \rangle\rangle, \end{gathered} \tag{1.100}$$

$$\begin{gathered} \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x,t), \phi(x,t) \rangle\rangle = \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x,t) * \delta(t)\mu_0(x), \phi(x,t) \rangle\rangle = \\ = \langle\langle \delta(x,t) * \delta(t)\mu_0(x), \phi(x,t) \rangle\rangle = \langle\langle \delta(t)\mu_0(x), \phi(x,t) \rangle\rangle = \langle \mu_0(x), \phi(x,0) \rangle = 0, \\ \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x,t), \phi(x,t) \rangle\rangle = \langle\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x,t) * \delta'(t)\mu_1(x), \phi(x,t) \rangle\rangle = \\ = \langle\langle \delta(x,t) * \delta'(t)\mu_1(x), \phi(x,t) \rangle\rangle = \langle\langle \delta'(t)\mu_1(x), \phi(x,t) \rangle\rangle = -\langle \mu_1(x), \phi'(x,0) \rangle = 0 \end{gathered} \tag{1.101}$$

для любой функции $\phi(x,t) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$. В силу результатов теорем 1 и 3 из равенств (1.100), (1.101) вытекают следующие равенства:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x,t) - \rho_0(x,t)\right] \phi(x,t) dx dt = 0,$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{M}_{x,t}[V_{00}](x,t)\phi(x,t) dx dt = 0, \quad \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{M}_{x,t}[V_{01}](x,t)\phi(x,t) dx dt = 0$$

для любых $\phi(x,t) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$. В силу основной леммы вариационного исчисления приходим к равенствам (1.98), (1.99).

Пусть

$$L(x,t) = U_0[\rho_0](x,t) + V_{00}[\Delta_x u_1(x) - u_1(x)](x,t) + V_{01}[\Delta_x u_0(x) - u_0(x)](x,t).$$

Справедлива следующая основная

Теорема 5. *Если* $\rho_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}((1+|x|^2)^{\gamma/2};\mathbb{R}^3))$, *при* $\alpha \in (0,1)$ *и*

$$\Delta_x u_0(x) - u_0(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3), \tag{1.102}$$

$$\Delta_x u_1(x) - u_1(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_3/2};\mathbb{R}^3) \tag{1.103}$$

при $\min\{\gamma,\beta_2,\beta_3\} \geqslant \beta_1 \geqslant 0$, *то справедливо соотношение*

$$L(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbb{C}_b^{(2+2)}((1+|x|^2)^{\beta_1/2};\mathbb{R}^3\times[0,T]),$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[L](x,t) = \rho_0(x,t) \quad \textit{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3\times[0,T],$$

$$L(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial L(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Доказательство. Доказательство основано на теоремах 2, 4 и лемме 1.2.

Замечание 1. Заметим, что мы имеем следующие достаточные условия на функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ такие, чтобы были выполнены соотношения (1.102), (1.103):

$$u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3), \quad u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_3/2};\mathbb{R}^3)$$

при $\beta_2 \geqslant 0$, $\beta_3 \geqslant 0$ и $\alpha \in (0,1)$. Действительно, пусть, например, $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3)$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered}
(1+|x|^2)^{\beta_2/2}\Delta u_0(x) = \Delta((1+|x|^2)^{\beta_2/2}u_0(x)) - u_0(x)\Delta(1+|x|^2)^{\beta_2/2} - \\
- 2\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}\frac{\partial(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}\,\Delta((1+|x|^2)^{\beta_2/2}u_0(x)) - \\
- (1+|x|^2)^{\beta_2/2}u_0(x)\frac{\Delta(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}} - 2\sum_{j=1}^{3}(1+|x|^2)^{\beta_2/2}\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}\frac{\dfrac{\partial(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}} = \\
= \Delta((1+|x|^2)^{\beta_2/2}u_0(x)) + (1+|x|^2)^{\beta_2/2}u_0(x)\frac{\Delta(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}} - \\
- 2\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial[(1+|x|^2)^{\beta_2/2}u_0(x)]}{\partial x_j}\frac{\dfrac{\partial(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}} + 2\sum_{j=1}^{3}(1+|x|^2)^{\beta_2/2}u_0(x)\frac{\left(\dfrac{\partial(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}{\partial x_j}\right)^2}{(1+|x|^2)^{\beta_2}} \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3).
\end{gathered}$$

2. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТИПА ШАУДЕРА

Если $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3\times[0,T])$, то справедлива следующая третья формула Грина (см. формулу (9.1) теоремы 3 статьи [1]):

$$\begin{gathered}
u(x,t) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-\xi,t-\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)d\xi d\tau + \\
+ \int_{\mathbb{R}^3}\left[\mathscr{E}(x-\xi,t)[\Delta_\xi u_1(\xi) - u_1(\xi)] + \frac{\partial\mathscr{E}(x-\xi,t)}{\partial t}[\Delta_\xi u_0(\xi) - u_0(\xi)]\right]d\xi.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Из результатов шагов 10–12 теоремы 1 для объемного потенциала и теоремы 2 для поверхностных потенциалов из равенства (2.1) вытекает следующая априорная оценка типа Шаудера:

$$\sup_{t\in[0,T]}\Big[\Big|(1+|x|^2)^{\beta_1/2}u(x,t)\Big|_{2+\alpha}+\Big|(1+|x|^2)^{\beta_1/2}u'(x,t)\Big|_{2+\alpha}+\Big|(1+|x|^2)^{\beta_1/2}u''(x,t)\Big|_{2+\alpha}\Big]\leqslant$$

$$\leqslant a(T)\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|(1+|x|^2)^{\gamma/2}\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)\Big|_{\alpha}+\Big|(1+|x|^2)^{\beta_2/2}[\Delta_x u_0(x)-u_0(x)]\Big|_{\alpha}+\Big|(1+|x|^2)^{\beta_3/2}[\Delta_x u_1(x)-u_1(x)]\Big|_{\alpha}\Big],$$

где $\alpha\in(0,1)$, $\min\{\gamma,\beta_2,\beta_3\}\geqslant\beta_1\geqslant 0$.

3. ОЦЕНКИ ТИПА ШАУДЕРА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ С ВЕСОМ

В этом разделе мы воспользуемся методами исследований из работы [2] (см. также работу [4]). Рассмотрим следующий потенциал с весом:

$$u(x,t)=(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathcal{E}(x-y,t)f(y)dy,$$

$$f(x)=\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}},\quad \mu(x)\in\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3),\quad \beta_2\geqslant\beta_1\geqslant 0,\quad \alpha\in(0,1).$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j\partial x_i}=\Big[\beta_1(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\delta_{ij}+\beta_1(\beta_1-2)x_ix_j(1+|x|^2)^{\beta_1/2-2}\Big]\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathcal{E}(x-y,t)f(y)dy+$$

$$+\beta_1x_i(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\mathcal{E}(x-y,t)}{\partial x_j}f(y)dy+\beta_1x_j(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\mathcal{E}(x-y,t)}{\partial x_i}f(y)dy+\tag{3.1}$$

$$+(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathcal{E}(x-y,t)f(y)dy=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)+u_4(x,t).$$

Прежде всего нам нужно получить вспомогательные оценки. Справедливы равенства

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2}F(x_1-y,t)-(1+|x|^2)^{\beta_1/2}F(x_2-y,t)=\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial s}\Big[(1+|x_s|^2)^{\beta_1/2}F(x_s-y,t)\Big]ds=$$

$$=\{x_s=sx_1+(1-s)x_2\}=\int\limits_0^1\sum_{j=1}^3\beta_1(1+|x|^2)^{\beta_1/2-1}x_{sj}(x_{1j}-x_{2j})F(x_s-y,t)ds+\tag{3.2}$$

$$+\int\limits_0^1(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\sum_{j=1}^3\frac{\partial F(x_s-y,t)}{\partial x_{sj}}(x_{1j}-x_{2j})=K_1+K_2.$$

Заметим, что справедлива оценка

$$(1+|x_s|^2)^{1/2}\leqslant\sqrt{2}(1+|x_s-y|^2)^{1/2}(1+|y|^2)^{1/2}.\tag{3.3}$$

Для оценки K_1 нужно рассмотреть два случая: $\beta_1\in[0,1]$ и $\beta_1>1$. Пусть $\beta_1\in[0,1]$. Тогда справедлива оценка

$$|K_1|\leqslant 3\beta_1|x_1-x_2|\int\limits_0^1\big|F(x_s-y,t)\big|ds,\quad \beta_1\in[0,1].\tag{3.4}$$

Пусть теперь $\beta_1>1$. С учетом (3.3) справедливы следующие оценки:

$$|K_1|\leqslant 3\beta_1|x_1-x_2|\int\limits_0^1(1+|x_s|^2)^{(\beta_1-1)/2}|F(x_s-y,t)|ds\leqslant 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2}(1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}|x_1-x_2|\times$$

$$\times\int\limits_0^1(1+|x_s-y|^2)^{(\beta_1-1)/2}\big|F(x_s-y,t)\big|ds,\quad \beta_1>1.$$

Для K_2 с учетом (3.3) справедлива следующая оценка:

$$|K_2| \leqslant 2^{\beta_1/2}3(1+|y|^2)^{\beta_1/2}|x_1-x_2|\int_0^1(1+|x_s-y|^2)^{\beta_1/2}\left|D_xF(x_s-y,t)\right|ds. \tag{3.5}$$

Таким образом, из (3.2) и (3.4), (3.5) вытекает следующая оценка:

$$\begin{gathered}\left|(1+|x_1|^2)^{\beta_1/2}F(x_1-y,t)-(1+|x_2|^2)^{\beta_1/2}F(x_2-y,t)\right| \leqslant 3\beta_1|x_1-x_2|\int_0^1 ds|F(x_s-y,t)|\times \\ \times\begin{cases}2^{(\beta_1-1)/2}(1+|x_s-y|^2)^{(\beta_1-1)/2}(1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}, & \text{если} \quad \beta_1>1;\\ 1, \quad \text{если} \quad \beta_1\in[0,1];\end{cases} + \\ + 2^{\beta_1/2}3(1+|y|^2)^{\beta_1/2}|x_1-x_2|\int_0^1(1+|x_s-y|^2)^{\beta_1/2}\left|D_xF(x_s-y,t)\right|ds,\end{gathered} \tag{3.6}$$

где $x_s = sx_1+(1-s)x_2$, $s\in[0,1]$.

Заметим, что имеет место

Теорема 6. *Если* $\mu(x)\in\mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$ *при* $\alpha\in(0,1)$, *и* $\beta_2\geqslant\beta_1\geqslant 0$, *то*

$$|u_4(x,t)|_\alpha \leqslant D(T)|\mu|_\alpha \quad \text{для всех} \quad t\in[0,T],$$

где $D = D(T) > 0$ *— монотонно неубывающая функция, ограниченная на компактах.*

Доказательство.

Шаг 1: Пусть $x_1, x_2\in\mathbb{R}^3$ такие точки, что

$$\rho := |x_1-x_2| < 1, \quad x_0 := \frac{x_1+x_2}{2}, \quad R_0 > 1.$$

Тогда очевидно, что

$$x_1, x_2 \in \overline{O(x_0,\rho)} \subset O(x_0,R_0).$$

Заметим, что для потенциала

$$u_4(x,t) = (1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t)f(y)dy,$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2\geqslant\beta_1\geqslant 0, \quad \mu(x)\in\mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha\in(0,1],$$

в силу (4.11), в котором положим $z = x_0$ и $R = 2R_0$, справедливо следующее представление:

$$\begin{gathered}u_4(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0,2R_0)}(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j}f(y)dy + \\ + \int_{O(x_0,2R_0)}(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j}[f(y)-f(x)]dy + \\ + (1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\int_{\partial O(x_0,2R_0)}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\cos(n_y,e_i)dS_y, \quad x\in O(x_0,2R_0).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Введем обозначение

$$F_2(x,y,t) := (1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j}. \tag{3.8}$$

С учетом представления (3.7) и обозначения (3.8) справедливо следующее равенство (см. лемму 4.4 в работе [2]):

$$u_4(x_1,t)-u_4(x_2,t) = I_0+I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6, \tag{3.9}$$

$$I_0 := \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0,2R_0)} \left[F_2(x_1,y,t) - F_2(x_2,y,t)\right] f(y)dy, \tag{3.10}$$

$$I_1 := (1+|x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) \int\limits_{\partial O(x_0,2R_0)} \left[\frac{\partial \mathscr{E}(x_1-y,t)}{\partial y_j} - \frac{\partial \mathcal{E}(x_2-y,t)}{\partial y_j}\right]\cos(n_y,e_i)dS_y, \tag{3.11}$$

$$I_2 := \left[(1+|x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) - (1+|x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2)\right] \int\limits_{\partial O(x_0,2R_0)} \frac{\partial \mathscr{E}(x_1-y,t)}{\partial y_j}\cos(n_y,e_i)dS_y,$$

$$I_3 := \int\limits_{O(x_0,\rho)} F_2(x_2,y,t)(f(x_2)-f(y))dy, \tag{3.12}$$

$$I_4 := \int\limits_{O(x_0,\rho)} F_2(x_1,y,t)(f(y)-f(x_1))dy, \tag{3.13}$$

$$I_5 := (f(x_2)-f(x_1)) \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} F_2(x_2,y,t)dy, \tag{3.14}$$

$$I_6 := \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \left(F_2(x_2,y,t) - F_2(x_1,y,t)\right)(f(x_1)-f(y))dy. \tag{3.15}$$

Шаг 2: I_0. Заметим, что при $|y-x_0| \geqslant 2R_0$ справедливы неравенства

$$|x_s - y| \geqslant |y-x_0| - |x_s - x_0| \geqslant |y-x_0| - \frac{1}{2}|y-x_0| = \frac{1}{2}|y-x_0| \geqslant R_0 > 0, \tag{3.16}$$

$$|x_s - y| \leqslant |x_s - x_0| + |y-x_0| \leqslant \frac{1}{2}|y-x_0| + |y-x_0| = \frac{3}{2}|y-x_0|. \tag{3.17}$$

Рассмотрим сначала случай $\beta_1 \in [0,1]$. Тогда с учетом (3.6) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}
\left|F_2(x_1,y,t) - F_2(x_2,y,t)\right| \leqslant 3\beta_1|x_1-x_2|\int\limits_0^1\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x_s-y,t)}{\partial y_i\partial y_j}\right|ds + \\
+\, 2^{\beta_1/2}3(1+|y|^2)^{\beta_1/2}|x_1-x_2|\int\limits_0^1\left(1+|x_s-y|^2\right)^{\beta_1/2}\left|D_x\frac{\partial^2\mathscr{E}(x_s-y,t)}{\partial y_i\partial y_j}\right|ds \leqslant \\
\leqslant D_1(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|\int\limits_0^1\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon))|x_s-y|}{|x_s-y|}ds + \\
+\, D_2(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|(1+|y|^2)^{\beta_1/2}\int\limits_0^1(1+|x_s-y|^2)^{\beta_1/2}\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon))|x_s-y|}{|x_s-y|}ds \leqslant \\
\leqslant D_3(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|\frac{\exp(-(1-\varepsilon))(1/2)|y-x_0|}{|y-x_0|} + \\
+\, D_4(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|(1+|y|^2)^{\beta_1/2}(1+|y-x_0|^2)^{\beta_1/2}\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon))|y-x_0|}{|y-x_0|},
\end{gathered} \tag{3.18}$$

где $x_s = sx_1 + (1-s)x_2$ и мы воспользовались оценками (6.11), (10.20) статьи [1]. Теперь получим оценку, аналогичную (3.18) в случае $\beta_1 > 1$. Из тех же соображений вытекает следующее неравенство:

$$\begin{gathered}
\left|F_2(x_1,y,t) - F_2(x_2,y,t)\right| \leqslant D_5(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|(1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}\times \\
\times(1+|y-x_0|^2)^{(\beta_1-1)/2}\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon))|y-x_0|}{|y-x_0|} + D_4(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|(1+|y|^2)^{\beta_1/2}\times \\
\times(1+|y-x_0|^2)^{\beta_1/2}\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon))|y-x_0|}{|y-x_0|}.
\end{gathered} \tag{3.19}$$

Поэтому из (3.18) и (3.10) получаем при $\beta_1 \in [0,1]$ следующую оценку:

$$|I_0| \leqslant D_3(T,R_0,\varepsilon)|x_1 - x_2||f(x)|_0 \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0,2R_0)} \frac{\exp(-(1-\varepsilon))(1/2)|y-x_0|}{|y-x_0|}dy +$$
$$+ D_4(T,R_0,\varepsilon)|x_1 - x_2|\left|f(x)(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\right|_0 \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0,2R_0)} (1+|y-x_0|^2)^{\beta_1/2}\times \tag{3.20}$$
$$\times\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon))|y-x_0|}{|y-x_0|}dy \leqslant D_6(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0|x_1-x_2|, \quad \beta_1\in[0,1].$$

Из (3.19) и (3.10) получаем при $\beta_1 > 1$ следующую цепочку неравенств:

$$|I_0| \leqslant D_5(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|\left|f(x)(1+|x|^2)^{(\beta_1-1)/2}\right|_0\times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0,2R_0)} (1+|y-x_0|^2)^{(\beta_1-1)/2}\frac{\exp(-(1-\varepsilon))(1/2)|y-x_0|}{|y-x_0|}dy + \tag{3.21}$$
$$+ D_4(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|\left|f(x)(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\right|_0\times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0,2R_0)} (1+|y-x_0|^2)^{\beta_1/2}\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon))|y-x_0|}{|y-x_0|}dy \leqslant D_7(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0|x_1-x_2|, \quad \beta_1 > 1.$$

Таким образом, из (3.20) и (3.21) вытекает единообразная оценка

$$|I_0| \leqslant D_8(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0|x_1-x_2|. \tag{3.22}$$

Шаг 3: I_1. Справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial\mathscr{E}(x_1-y,t)}{\partial y_j} - \frac{\partial\mathscr{E}(x_2-y,t)}{\partial y_j} = \int\limits_0^1\sum_{k=1}^3\frac{\partial^2\mathscr{E}(x_s-y,t)}{\partial x_{sk}\partial x_j}[x_{1k}-x_{2k}]ds,$$

из которого при $|y-x_0| = 2R_0$ с учетом неравенств (3.16) и (3.17) вытекает цепочка неравенств

$$\left|\frac{\partial\mathscr{E}(x_1-y,t)}{\partial y_j} - \frac{\partial\mathscr{E}(x_2-y,t)}{\partial y_j}\right| \leqslant 3|x_1-x_2|\int\limits_0^1\left|D_x\frac{\partial\mathscr{E}(x_s-y,t)}{\partial y_j}\right|ds \leqslant$$
$$\leqslant D_9(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|\int\limits_0^1\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|x_s-y|)}{|x_s-y|}ds \leqslant \tag{3.23}$$
$$\leqslant D_{10}(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y-x_0|)}{|y-x_0|}.$$

С учетом (3.23) из (3.11) получаем искомую оценку

$$|I_1| \leqslant \left|(1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\right|_0 D_{10}(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|\times$$
$$\times\int\limits_{\partial O(x_0,2R_0)}\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y-x_0|)}{|y-x_0|}dS_y \leqslant D_{11}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0|x_1-x_2|. \tag{3.24}$$

Шаг 4: I_2. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|I_2| \leqslant D_{12}(T,R_0,\varepsilon)\left[(1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\right]_\alpha|x_1-x_2|^\alpha\int\limits_{\partial O(x_0,2R_0)}\frac{\exp(-(1/2)(1-\varepsilon)|y-x_0|)}{|y-x_0|}dS_y \leqslant$$
$$\leqslant D_{13}(T,R_0,\varepsilon)\left[\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}}\right]_\alpha|x_1-x_2|^\alpha \leqslant D_{14}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_\alpha|x_1-x_2|^\alpha, \tag{3.25}$$

поскольку по условию $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0$.

Шаг 5: I_3 и I_4. Получим оценку на интеграл I_3, поскольку оценка для интеграла I_4 получается заменой $x_2 \leftrightarrow x_1$. Выражение (3.12) для интеграла I_3 можно переписать в следующем виде:

$$I_3 = \int\limits_{O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \Big[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) - (1 + |y|^2)^{\beta_1/2} f(y)\Big] dy +$$
$$+ \int\limits_{O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} f(y) \Big[(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2}\Big] dy =: I_{31} + I_{32}.$$

Заметим, что если $|y - x_0| \leqslant \rho$, то

$$|y - x_2| \leqslant |y - x_0| + |x_2 - x_0| \leqslant \rho + \frac{\rho}{2} = \frac{3\rho}{2}. \tag{3.26}$$

Поэтому для I_{31} справедлива следующая оценка:

$$|I_{31}| \leqslant D_{15}(T, R_0, \varepsilon) \left[\frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(\beta_2 - \beta_1)/2}}\right]_\alpha \int\limits_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{1}{|y - x_2|^{3-\alpha}} dy \leqslant D_{16}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \tag{3.27}$$

Заметим, что в силу (3.6) справедливы следующие оценки:

$$\left|(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2}\right| \leqslant 3\beta_1 |y - x_2|, \quad \beta_1 \in [0,1], \tag{3.28}$$

$$\begin{gathered}\left|(1 + |y|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2}\right| \leqslant 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |y - x_2| \int\limits_0^1 (1 + |x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2} ds \leqslant \\ \leqslant 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2} (1 + |y|^2)^{(\beta_1-1)/2} |y - x_2|, \quad \beta_1 > 1,\end{gathered} \tag{3.29}$$

где мы воспользовались следующими соотношениями:

$$|x_s - y| = |sy + (1 - s)x_2 - y| = (1 - s)|y - x_2| \leqslant |y - x_2|, \quad s \in [0,1].$$

Сначала получим оценку для I_{32} при $\beta_1 \in [0,1]$. Действительно, с учетом (3.26) и (3.28) справедливы следующие неравенства:

$$|I_{32}| \leqslant D_{17}(T, R_0, \varepsilon) |f|_0 \int\limits_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{1}{|y - x_2|} dy \leqslant D_{18}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0,1]. \tag{3.30}$$

Теперь получим оценку для I_{32} при $\beta_1 > 1$. Действительно, с учетом (3.26) и (3.29) справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered}|I_{32}| \leqslant D_{19}(T, R_0, \varepsilon) \left|\frac{\mu(x)}{(1 + |x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}}\right|_0 \times \\ \times \int\limits_{O(x_2, 3\rho/2)} \frac{(1 + |y - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2}}{|y - x_2|^2} dy \leqslant D_{20}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1.\end{gathered} \tag{3.31}$$

Таким образом, из (3.27), (3.30) и (3.31) вытекает следующая оценка:

$$|I_3| \leqslant D_{21}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \tag{3.32}$$

В точности таким же образом для I_4 (см. формулу (3.13)) получаем следующую оценку:

$$|I_4| \leqslant D_{21}(T, R_0, \varepsilon) |\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \tag{3.33}$$

Шаг 6: I_5. Выражение (3.14) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}I_5 = \Big[(1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2} f(x_2) - (1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1)\Big] \int\limits_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy + \\ + \Big[(1 + |x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1 + |x_2|^2)^{\beta_1/2}\Big] f(x_1) \int\limits_{O(x_0, 2R_0) \setminus O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_2 - y, t)}{\partial y_i \partial y_j} dy : I_{51} + I_{52}.\end{gathered} \tag{3.34}$$

Прежде всего рассмотрим интеграл

$$J := \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_2 - y,t)}{\partial y_i \partial y_j} dy.$$

Для J справедливо равенство

$$J = \int\limits_{\partial O(x_0,2R_0)} \frac{\partial \mathscr{E}(x_2 - y,t)}{\partial y_j}\cos(n_y,e_i)dy - \int\limits_{\partial O(x_0,\rho)} \frac{\partial \mathscr{E}(x_2 - y,t)}{\partial y_j}\cos(n_y,e_i)dy := J_1 + J_2. \tag{3.35}$$

Заметим, что при $|\, y - x_0 \,| = 2R_0$ справедливы неравенства

$$|y - x_2| \geqslant |y - x_0| - |x_2 - x_0| \geqslant |y - x_0| - \frac{\rho}{2} \geqslant |y - x_0| - \frac{1}{4}|y - x_0| = \frac{3}{4}|y - x_0|. \tag{3.36}$$

В силу (3.36) получаем следующую оценку для J_1 :

$$|J_1| \leqslant D_{22}(T,R_0,\varepsilon) \int\limits_{\partial O(x_0,2R_0)} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)(3/4)|y - x_0|)}{|y - x_0|} dS_y \leqslant D_{23}(T,R_0,\varepsilon) < +\infty. \tag{3.37}$$

С учетом (3.36) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|J_2| \leqslant D_{24}(T,R_0,\varepsilon) \int\limits_{\partial O(x_0,\rho)} \frac{1}{|y - x_2|^2} dS_y \leqslant D_{25}(T,R_0,\varepsilon) \int\limits_{\partial O(x_0,\rho)} \frac{1}{|y - x_0|^2} dS_y = D_{26}(T,R_0,\varepsilon) < +\infty. \tag{3.38}$$

Таким образом, из (3.35) с учетом (3.37) и (3.38) вытекает оценка

$$|J| \leqslant D_{27}(T,R_0,\varepsilon) < +\infty. \tag{3.39}$$

Теперь мы получим оценку для I_{51}, определенного равенством (3.34). Действительно, с учетом оценки (3.39) справедлива следующая оценка:

$$|I_{51}| \leqslant D_{27}(T,R_0,\varepsilon) \left[\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}}\right]_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \leqslant D_{28}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \tag{3.40}$$

Для оценки I_{52}, определенного равенством (3.34), необходимо опять отдельно рассмотреть случаи $\beta_1 \in [0,1]$ и $\beta_1 > 1$. Справедливы следующие оценки:

$$\left|(1+|x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_2|^2)^{\beta_1/2}\right| \leqslant 3\beta_1 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0,1], \tag{3.41}$$

$$\begin{gathered}\left|(1+|x_1|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_2|^2)^{\beta_1/2}\right| \leqslant 3\beta_1|x_1 - x_2| 2^{(\beta_1-1)/2}(1+|x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} \int\limits_0^1 (1+|x_s - x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} ds \leqslant \\ \leqslant 3\beta_1|x_1 - x_2| 2^{(\beta_1-1)/2}(1+|x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2}(1+|x_1 - x_2|^2)^{(\beta_1-1)/2}, \quad \beta_1 > 1.\end{gathered} \tag{3.42}$$

Пусть сначала $\beta_1 \in [0,1]$. Тогда с учетом (3.41) и (3.39) получаем оценку

$$|I_{52}| \leqslant D_{29}(T,R_0,\varepsilon)|f(x)|_0 |x_1 - x_2| \leqslant D_{30}(T,R_0,\varepsilon)|\mu(x)|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0,1]. \tag{3.43}$$

Пусть теперь $\beta_1 > 1$. Тогда с учетом (3.42) и (3.39) получаем оценку

$$|I_{52}| \leqslant D_{31}(T,R_0,\varepsilon) \left|\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}}\right|_0 |x_1 - x_2| \leqslant D_{32}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0 |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 > 1. \tag{3.44}$$

Таким образом, из (3.34), (3.40), (3.43) и (3.44) вытекает искомая оценка

$$|I_5| \leqslant D_{33}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha. \tag{3.45}$$

Шаг 7: I_6. Интеграл I_6, определенный равенством (3.15), можно представить в следующем виде:

$$I_6 = I_{61} + I_{62} + I_{63}, \tag{3.46}$$

$$I_{61} := \left[(1+|x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_1|^2)^{\beta_1/2}\right] \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_2 - y,t)}{\partial y_i \partial y_j}[f(x_1) - f(y)]dy,$$

$$I_{62} := \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \left[\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_2-y,t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_1-y,t)}{\partial y_i \partial y_j}\right]\Big[(1+|x_1|^2)^{\beta_1/2} f(x_1) - (1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y)\Big]dy, \tag{3.47}$$

$$I_{63} := \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \left[\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_2-y,t)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_1-y,t)}{\partial y_i \partial y_j}\right]\Big[(1+|y|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_1|^2)^{\beta_1/2}\Big] f(y)dy. \tag{3.48}$$

Заметим, что $|y - x_0| \geqslant \rho$ и справедливы неравенства

$$|x_1 - y| \leqslant |y - x_0| + |x_1 - x_0| \leqslant |y - x_0| + \frac{\rho}{2} \leqslant \frac{3}{2}|y - x_0|, \tag{3.49}$$

$$|x_2 - y| \geqslant |y - x_0| - |x_2 - x_0| \geqslant |y - x_0| - \frac{\rho}{2} \geqslant \frac{1}{2}|y - x_0|. \tag{3.50}$$

Для того чтобы оценить интеграл I_{61}, нужно рассмотреть опять два случая: $\beta_1 \in [0,1]$ и $\beta_1 > 1$. Рассмотрим сначала случай $\beta_1 \in [0,1]$. Тогда с учетом (3.49) и (3.50) справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered}|I_{61}| \leqslant D_{34}(T,R_0,\varepsilon)|x_2 - x_1|[f(x)]_\alpha \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{|x_1 - y|^\alpha}{|x_2 - y|^3}dy \leqslant D_{35}(T,R_0,\varepsilon)|x_2 - x_1|[f(x)]_\alpha \times \\ \times \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{1}{|y - x_0|^{3-\alpha}}dy \leqslant D_{36}(T,R_0,\varepsilon)|\mu(x)|_\alpha |x_1 - x_2|, \quad \beta_1 \in [0,1].\end{gathered} \tag{3.51}$$

Теперь рассмотрим случай $\beta_1 > 1$. Справедливо равенство

$$\begin{gathered}I_{61} : \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_2-y,t)}{\partial y_i \partial y_j}\Big[(1+|x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_1|^2)^{\beta_1/2}\Big] f(x_1)dy - \\ - \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x_2-y,t)}{\partial y_i \partial y_j}\Big[(1+|x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_1|^2)^{\beta_1/2}\Big] f(y)dy := I_{611} + I_{612}.\end{gathered} \tag{3.52}$$

Сначала получим оценку для интеграла I_{611}. С этой целью заметим, что справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\left|(1+|x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_1|^2)^{\beta_1/2}\right| \leqslant 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2}|x_1 - x_2|\left(1+|x_2 - x_1|^2\right)^{(\beta_1-1)/2}(1+|x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2} \leqslant \\ \leqslant 3\beta_1 2^{\beta_1-1}|x_1 - x_2|(1+|x_1|^2)^{(\beta_1-1)/2}.\end{gathered} \tag{3.53}$$

Таким образом, из (3.52) с учетом (3.53) и (3.50) получаем оценку

$$\begin{gathered}|I_{611}| \leqslant D_{37}(T,R_0,\varepsilon)\left|\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}}\right|_0 |x_1 - x_2| \times \\ \times \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3}dy \leqslant D_{37}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0|x_1 - x_2|[1 + |\ln|x_1 - x_2||].\end{gathered} \tag{3.54}$$

Теперь получим оценку для интеграла I_{612}. С этой целью заметим, что справедлива оценка

$$\begin{gathered}\left|(1+|x_2|^2)^{\beta_1/2} - (1+|x_1|^2)^{\beta_1/2}\right| \leqslant 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/2}|x_1 - x_2|(1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}\int\limits_0^1 (1+|x_s - y|^2)^{(\beta_1-1)/2}ds \leqslant \\ \leqslant 3\beta_1 2^{\beta_1-1}(1+(1/2+2R_0)^2)^{(\beta_1-1)/2}|x_1 - x_2|(1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}.\end{gathered} \tag{3.55}$$

Таким образом, из (3.52) с учетом (3.50) и (3.55) получаем оценку

$$\begin{gathered}|I_{612}| \leqslant D_{38}(T,R_0,\varepsilon)\left|\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}}\right|_0 |x_1 - x_2| \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)} \frac{1}{|y - x_0|^3}dy \leqslant \\ \leqslant D_{39}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0|x_1 - x_2|[1 + |\ln|x_1 - x_2||].\end{gathered} \tag{3.56}$$

Таким образом, из (3.51), (3.52), (3.54) и (3.56) приходим к оценке

$$|I_{61}| \leqslant D_{40}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_\alpha|x_1-x_2|\begin{cases}1, & \text{если} \quad \beta_1 \in [0,1];\\ 1+\big|\ln|x_1-x_2|\big|, & \text{если} \quad \beta_1 > 1.\end{cases} \tag{3.57}$$

Для того чтобы оценить интегралы I_{62} и I_{63}, определенные равенствами (3.47) и (3.48), нам нужно сделать предварительные оценки. Справедливо равенство

$$\frac{\partial^2\mathscr{E}(x_2-y,t)}{\partial y_i\partial y_j} - \frac{\partial^2\mathscr{E}(x_1-y,t)}{\partial y_i\partial y_j} = \int_0^1\sum_{k=1}^3\frac{\partial^3\mathscr{E}(x_s-y,t)}{\partial x_{sk}\partial y_i\partial y_j}[x_{2k}-x_{1k}]ds,$$

из которого при $2R_0 \geqslant |y-x_0| \geqslant \rho$ вытекает стандартным образом следующая оценка:

$$\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x_2-y,t)}{\partial y_i\partial y_j} - \frac{\partial^2\mathscr{E}(x_1-y,t)}{\partial y_i\partial y_j}\right| \leqslant D_{41}(T,R_0,\varepsilon)\frac{1}{|y-x_0|^4}|x_1-x_2|. \tag{3.58}$$

Из (3.47) с учетом (3.58) вытекает следующая оценка:

$$\begin{gathered}|I_{62}| \leqslant D_{42}(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|\left[\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(\beta_2-\beta_1)/2}}\right]_\alpha \int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)}\frac{|y-x_1|^\alpha}{|y-x_0|^4}dy \leqslant \\ \leqslant D_{43}(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2||\mu|_\alpha\int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)}\frac{1}{|y-x_0|^{4-\alpha}}dy \leqslant D_{44}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_\alpha|x_1-x_2|^\alpha,\end{gathered} \tag{3.59}$$

где мы воспользовались неравенством

$$|y-x_1| \leqslant \frac{3}{2}|y-x_0|.$$

Для того чтобы оценить интеграл I_{63}, нужно опять рассмотреть два случая: $\beta_1 \in [0,1]$ и $\beta_1 > 1$. В случае $\beta_1 \in [0,1]$ из (3.48) и (3.59) вытекает оценка

$$\begin{gathered}|I_{63}| \leqslant D_{45}(T,R_0,\varepsilon)|f|_0|x_1-x_2|\int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)}\frac{|y-x_1|}{|y-x_0|^4}dy \leqslant D_{46}(T,R_0,\varepsilon)|f|_0|x_1-x_2|\times \\ \times\int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)}\frac{1}{|y-x_0|^3}dy \leqslant D_{47}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0|x_1-x_2\,[1+\big|\ln|x_1-x_2|\big|].\end{gathered} \tag{3.60}$$

Рассмотрим теперь случай $\beta_1 > 1$. Поскольку

$$|x_1-y| \leqslant |x_1-x_0| + |y-x_0| \leqslant \frac{1}{2}+2R_0,$$

то справедлива оценка

$$\left|(1+|y|^2)^{\beta_1/2}-(1+|x_1|^2)^{\beta_1/2}\right| \leqslant 3\beta_1 2^{(\beta_1-1)/1}\left(1+(1/2+2R_0)^2\right)^{(\beta_1-1)/2}(1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}|x_1-y|. \tag{3.61}$$

Из (3.48) с учетом (3.58) и (3.61) получим оценку

$$\begin{gathered}|I_{63}| \leqslant D_{48}(T,R_0,\varepsilon)|x_1-x_2|\left|\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{(1+\beta_2-\beta_1)/2}}\right|_0\int\limits_{O(x_0,2R_0)\setminus O(x_0,\rho)}\frac{1}{|y-x_0|^3}dy \leqslant \\ \leqslant D_{49}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0|x_1-x_2|[1+\big|\ln|x_1-x_2|\big|].\end{gathered} \tag{3.62}$$

Таким образом, из (3.46), (3.57), (3.59), (3.60) и (3.62) получаем оценку

$$|I_6| \leqslant D_{50}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_\alpha\left(|x_1-x_2|[1+\big|\ln|x_1-x_2|\big|]+|x_1-x_2|^\alpha\right). \tag{3.63}$$

Итак, из (3.9) с учетом (3.22), (3.24), (3.25), (3.32), (3.33), (3.45) и (3.63) получаем оценку

$$|u_4(x_1,t)-u_4(x_2,t)| \leqslant D_{51}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_\alpha|x_1-x_2|^\alpha, \quad \alpha\in(0,1), \tag{3.64}$$

при $|x_1-x_2| < 1$.

Шаг 8: $|u_4|_0$. Теперь наша задача оценить – $|u_4|_0$. В силу равенства (4.8) справедливо следующее выражение для произвольного $\delta > 0$:

$$
\begin{gathered}
u_4(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i \partial y_j}((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) f(y)dy + \\
+ \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\delta)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i \partial y_j}(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y)dy + \\
+ \int\limits_{O(x,\delta)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\mathscr{E}(x-y,t)\Big[(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x)\Big]dy + \\
+ (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int\limits_{\partial O(x,\delta)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\cos(n_y, e_i)dS_y = J_2 + J_{11} + J_{12} + J_{13}.
\end{gathered}
\tag{3.65}
$$

Оценим интеграл J_2. Сначала предположим, что $\beta_1 \in [0,1]$. Тогда выполнено неравенство

$$
\left|(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}\right| \leqslant 3\beta_1|x-y|. \tag{3.66}
$$

Если же $\beta_1 > 1$, то справедливо неравенство

$$
\left|(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}\right| \leqslant 3\beta_1|x-y|2^{(\beta_1-1)/2}(1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2}(1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}. \tag{3.67}
$$

С учетом оценок (3.66) и (3.67) мы приходим к следующей цепочке соотношений:

$$
\begin{gathered}
|J_2| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j \partial y_i}[(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y)dy\right| \leqslant \int\limits_{O(x,R_0)} \frac{D_{52}(T,R_0,\varepsilon)}{|x-y|^2}|f(y)|dy + \\
+ D_{53}(T,R_0,\varepsilon) \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R_0)} \exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)\,|f(y)|dy \leqslant D_{54}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0, \quad \beta_1 \in [0,1],
\end{gathered}
\tag{3.68}
$$

$$
\begin{gathered}
|J_2| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j \partial y_i}[(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y)dy\right| \leqslant \\
\leqslant D_{55}(T,R_0,\varepsilon) \int\limits_{O(x,R_0)} \frac{(1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2}}{|x-y|^2}(1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}|f(y)|dy + \\
+ D_{56}(T,R_0,\varepsilon) \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R_0)} \exp(-(1-\varepsilon)|x-y|)(1+|x-y|^2)^{(\beta_1-1)/2} \times \\
\times (1+|y|^2)^{(\beta_1-1)/2}|f(y)|dy \leqslant D_{57}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0, \quad \beta_1 > 1,
\end{gathered}
\tag{3.69}
$$

поскольку по условию $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0$.

Справедливы следующие оценки:

$$
|J_{11}| \leqslant D_{58}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0 \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R_0)} \frac{1}{(1+|y|^2)^{(\beta_2-\beta_1+1)/2}} \frac{\exp(-(1-\varepsilon)|x-y|}{|x-y|}dy \leqslant D_{59}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0, \tag{3.70}
$$

$$
|J_{12}| \leqslant D_{60}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_\alpha \int\limits_{O(x,R_0)} \frac{1}{|x-y|^{3-\alpha}}dy \leqslant D_{61}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0, \quad |J_{13}| \leqslant D_{62}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_0. \tag{3.71}
$$

Из (3.65) с учетом оценок (3.70), (3.71) приходим к оценке

$$
|J_1| \leqslant D_{63}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_\alpha. \tag{3.72}
$$

Таким образом, из (3.68), (3.69) и (3.72) вытекает следующая оценка:

$$
|u_4|_0 \leqslant D_{64}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_\alpha, \quad t \in [0,T]. \tag{3.73}
$$

Шаг 9: Заметим, что если $|x_1 - x_2| \geqslant 1$, то в силу (3.73) справедливы неравенства

$$\begin{gathered}|u_4(x_1,t) - u_4(x_2,t)|_0 \leqslant 2|u_4(x,t)|_0 \leqslant 2|u_4(x,t)|_0|x_1 - x_2|^{\alpha} \leqslant \\ \leqslant D_{65}(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_{\alpha}|x_1 - x_2|^{\alpha} \quad \text{при} \quad |x_1 - x_2| \geqslant 1.\end{gathered} \tag{3.74}$$

Таким образом, из (3.64), (3.74) мы получаем искомую оценку

$$|u_4(x,t)|_{\alpha} \leqslant D(T,R_0,\varepsilon)|\mu|_{\alpha}, \quad \mu(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3), \quad t \in [0,T], \quad \alpha \in (0,1).$$

Справедлива следующая

Лемма 3.1. *Если* $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0$, *то справедливы следующие оценки*:

$$|u_1(x,t)|_{\alpha} \leqslant a(T)|\mu|_0 \quad \text{для каждого} \quad t \in [0,T],$$

$$|u_2(x,t)|_{\alpha} \leqslant a(T)|\mu|_{\alpha} \quad \text{для каждого} \quad t \in [0,T],$$

$$|u_3(x,t)|_{\alpha} \leqslant a(T)|\mu|_{\alpha} \quad \text{для каждого} \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. Аналогичное утверждение доказано в [5].

Несложно доказывается следующая

Лемма 3.2. *Пусть* $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0$ *и* $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *при* $\alpha \in (0,1)$. *Тогда справедливы следующие оценки*:

$$|u(x,t)|_0 \leqslant d_1(T)|\mu|_0, \quad \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right|_0 \leqslant d_2(T)|\mu|_0, \quad j = 1,2,3,$$

для всех $t \in [0,T]$, *где*

$$u(x,t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y,t) \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy.$$

Из результатов теоремы 6 и лемм 3.1, 3.2 вытекает следующая основная

Теорема 7. *Для любой функции* $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0$ *справедлива оценка типа Шаудера*

$$\begin{gathered}|u(x,t)|_{2+\alpha} \leqslant d(T)|\mu|_{\alpha}, \quad t \in [0,T], \\ u(x,t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x - y,t) \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy,\end{gathered} \tag{3.75}$$

а функция $d = d(T) > 0$ *является монотонно неубывающей и ограниченной на компактах.*

Отметим, что в силу свойств гладкости фундаментального решения $\mathcal{E}(x,t)$, определенного равенством (5.6) [1], справедлива

Теорема 8. *Для любой функции* $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0$ *справедлива оценка типа Шаудера*

$$\begin{gathered}|u_k(x,t)|_{2+\alpha} \leqslant d_k(T)|\mu|_{\alpha}, \quad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ u_k(x,t) = (1 + |x|^2)^{\beta_1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^k \mathcal{E}(x - y,t)}{\partial t^k} \frac{\mu(y)}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} dy,\end{gathered} \tag{3.76}$$

а функция $d_k = d_k(T) > 0$ *является монотонно неубывающей и ограниченной на компактах.*

Наконец, рассмотрим следующий потенциал с весом

$$h(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |x|^2)^{\beta_1/2}}{(1 + |y|^2)^{\beta_2/2}} \frac{\exp(-|x - y|)}{4\pi|x - y|} \mu(y) dy.$$

Для него справедлива следующая

Теорема 9. *Для любой функции* $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0$ *справедлива оценка типа Шаудера*

$$|h(x)|_{2+\alpha} \leqslant d|\mu|_{\alpha}, \quad d > 0.$$

4. ГЛАДКОСТЬ ВЕСОВОГО ПОТЕНЦИАЛА

В этом разделе мы воспользуемся методами исследований из работы [2].

Пусть $\eta(s) \in \mathbb{C}_b^{(1)}[0,+\infty)$ – функция следующего вида:

$$0 \leqslant \eta(s) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \eta'(s) \leqslant 2,$$

причем

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1; \\ 1, & \text{если} \quad s \geqslant 2, \end{cases} \qquad \eta_\varepsilon := \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right).$$

Теперь определим следующие функции:

$$\begin{gathered} u(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i \partial y_j}((1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}) f(y)dy + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z,R)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i \partial y_j}(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y)dy + \\ + \int\limits_{O(z,R)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\mathscr{E}(x-y,t)\left[(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y) - (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x)\right]dy + \\ + (1+|x|^2)^{\beta_1/2} f(x) \int\limits_{\partial O(z,R)} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\cos(n_y, e_i)dS_y, \quad O(x,2\varepsilon) \subset O(z,R), \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$w(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t) f(y)dy, \quad v(x,t) := \frac{\partial w(x,t)}{\partial x_j} = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j} f(y)dy, \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered} v_\varepsilon(x,t) := -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \eta_\varepsilon \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j} f(y)dy, \\ f(x) = \frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}}, \quad \beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0, \quad \mu(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0,1]. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Справедливы равенства

$$\begin{gathered} (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \frac{\partial v_\varepsilon(x,t)}{\partial x_i} = (1+|x|^2)^{\beta_1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j}\right) f(y)dy = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\right)[(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y)dy + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\right)(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y)dy = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\right)[(1+|x|^2)^{\beta_1/2} - (1+|y|^2)^{\beta_1/2}] f(y)dy + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(z,R)} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\eta_\varepsilon \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\right)(1+|y|^2)^{\beta_1/2} f(y)dy + \end{gathered}$$

$$+\int\limits_{O(z,R)}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\eta_\varepsilon\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\right)\Big[(1+|y|^2)^{\beta_1/2}f(y)-(1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\Big]dy+$$

$$+(1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\int\limits_{\partial O(z,R)}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\eta_\varepsilon\cos(n_y,e_i)dy.$$

Пусть $0<2\varepsilon<R$. Справедливо следующее равенство:

$$u(x,t)-(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial v_\varepsilon(x,t)}{\partial x_i}=K_1+K_2+K_3+K_4,$$

$$K_1:=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial y_i}\left([1-\eta_\varepsilon]\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\right)[(1+|x|^2)^{\beta_1/2}-(1+|y|^2)^{\beta_1/2}]f(y)dy,$$

$$K_2:=\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(z,R)}\frac{\partial}{\partial y_i}\left([1-\eta_\varepsilon]\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\right)(1+|y|^2)^{\beta_1/2}f(y)dy, \tag{4.4}$$

$$K_3:=\int\limits_{O(z,R)}\frac{\partial}{\partial y_i}\left([1-\eta_\varepsilon]\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\right)\Big[(1+|y|^2)^{\beta_1/2}f(y)-(1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\Big]dy,$$

$$K_4:=(1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\int\limits_{\partial O(z,R)}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}[1-\eta_\varepsilon]\cos(n_y,e_i)dy.$$

Поскольку $2\varepsilon<R$, то сразу же имеем

$$K_2=K_4=0. \tag{4.5}$$

Теперь нужно рассмотреть интегралы K_1 и K_3 отдельно при $\beta_1\in[0,1]$ и $\beta_1>1$. Несложно доказать (см., например, [2] и [5]), что оба интеграла стремятся к нулю при $\varepsilon\to+0$. Итак, из (4.4), (4.5) вытекает, что

$$\sup_{x\in\overline{O(0,R)}}\left|u(x,t)-(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial v_\varepsilon(x,t)}{\partial x_i}\right|\to+0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to+0 \tag{4.6}$$

для любого $R>0$. При этом из (4.2) и (4.3) вытекает, что

$$\sup_{x\in\overline{O(0,R)}}\left|v_\varepsilon(x,t)-\frac{\partial w(x,t)}{\partial x_j}\right|\to+0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to+0 \tag{4.7}$$

для любого $R>0$. Из (4.6) и (4.7) вытекает, что

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}=u(x,t)\quad\text{для всех}\quad x\in\mathbb{R}^3,\quad t\in[0,T], \tag{4.8}$$

где $w(x,t)$ определена равенством (4.2), а $u(x,t)$ – равенством (4.1). Заметим, что в силу оценок (6.7)–(6.12) из [1] и свойств гладкости (6.6) из [1] фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ справедливо следующее равенство:

$$(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2 w_k(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}=u_k(x,t)\quad\text{для всех}\quad x\in\mathbb{R}^3,\quad t\in[0,T], \tag{4.9}$$

где

$$w_k(x,t):=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^k\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t^k}f(y)dy,\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

$$u_k(x,t):=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^{2+k}\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j\partial t^k}((1+|x|^2)^{\beta_1/2}-(1+|y|^2)^{\beta_1/2})f(y)dy+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(z,R)}\frac{\partial^{2+k}\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j\partial t^k}(1+|y|^2)^{\beta_1/2}f(y)dy+ \tag{4.10}$$

$$+\int\limits_{O(z,R)}\frac{\partial^{2+k}}{\partial y_i\partial y_j\partial t^k}\mathscr{E}(x-y,t)\Big[(1+|y|^2)^{\beta_1/2}f(y)-(1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\Big]dy+$$

$$+(1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\int\limits_{\partial O(z,R)}\frac{\partial^{1+k}\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial t^k}\cos(n_y,e_i)dS_y,$$

$$f(x)=\frac{\mu(x)}{(1+|x|^2)^{\beta_2/2}},\quad \beta_2\geqslant\beta_1\geqslant 0,\quad \mu(x)\in\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3),\quad \alpha\in(0,1).$$

Заметим, что представление (4.1) удобно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(z,R)}(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j}f(y)dy+$$

$$+\int\limits_{O(z,R)}(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j}[f(y)-f(x)]dy+ \tag{4.11}$$

$$+(1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\int\limits_{\partial O(z,R)}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}\cos(n_y,e_i)dS_y,\quad x\in O(z,R),$$

а представление (4.10) можно переписать в следующем виде:

$$u_k(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(z,R)}(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^{2+k}\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j\partial t^k}f(y)dy+$$

$$+\int\limits_{O(z,R)}(1+|x|^2)^{\beta_1/2}\frac{\partial^{2+k}\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j\partial t^k}[f(y)-f(x)]dy+$$

$$+(1+|x|^2)^{\beta_1/2}f(x)\int\limits_{\partial O(z,R)}\frac{\partial^{1+k}\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial t^k}\cos(n_y,e_i)dS_y,\quad x\in O(z,R),\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 10. С. 1639–1661.

2. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. С. 464.

3. *Корпусов М.О., Яблочкин Д.К.* Теория потенциала и оценка Шаудера в гёльдеровских пространствах для 3 + 1–мерного уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 8. С. 1289–1314.

4. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. С. 288.

5. *Korpusov M.O., Matveeva A.K.* On critical exponents for weak solutions to the Cauchy problem for one nonlinear equation with gradient nonlinearity // MMAS. 2022. V. 46. № 2. P. 1574–1630.