ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 2, с. 328–335

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.642

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА[1)]

© 2023 г. П. Н. Вабищевич[1,2,*]

[1] 115191 Москва, Б.Тульская ул., 52, ИБРАЭ РАН, Россия

[2] 355017 Ставрополь, ул. Пушкина, 1, СКФУ,
Северо-Кавказский центр математических исследований, Россия

**e-mail: vabishchevich@gmail.com*

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.
Переработанный вариант 14.06.2022 г.
Принята к публикации 14.06.2022 г.

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка с памятью в конечномерном банаховом пространстве с производной по времени интегрального члена типа Вольтера и разностным ядром. Принципиальные трудности приближенного решения таких задач порождены нелокальностью по времени, когда решение на текущий момент зависит от всей предыстории. Используется трансформация интегродифференциального уравнения первого порядка к системе эволюционных локальных уравнений при аппроксимации разностного ядра суммой экспонент. Для слабосвязанной системы локальных уравнений с дополнительными обыкновенными дифференциальными уравнениями получены оценки устойчивости решения по начальным данным и правой части для решения с привлечением понятия логарифмической нормы. Аналогичные оценки установлены для приближенного решения при использовании двухслойных аппроксимаций по времени. Библ. 22.

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения, системы эволюционных уравнений первого порядка, устойчивость по начальным данным и правой части, логарифмическая норма, двухслойные разностные схемы.

DOI: 10.31857/S004446692302014X, **EDN:** BRJQJC

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при численном моделировании нестационарных процессов все более часто привлекаются нелокальные математические модели. Примером выступают эволюционные интегродифференциальные уравнения [1], [2], для которых решение на текущий момент времени зависит от всей предыстории процесса. В подобных моделях с памятью подынтегральное выражение включает само решение или производную решения по времени. В литературе (см., например, [3]) активно обсуждаются задачи для эволюционных уравнений с дробной производной по времени, которые характеризуются, в частности, интегральным ядром типа Абеля.

При приближенном решении краевых задач для уравнений с памятью мы используем обычные конечноэлементные или конечнообъемные аппроксимации по пространству и приходим к задаче Коши для операторных уравнений с памятью в соответствующем конечномерном пространстве. При аппроксимации по времени естественно ориентироваться [4] на использование тех или иных квадратур для интегрального члена и стандартных аппроксимаций производной по времени (неявная схема Эйлера и схема Кранка–Николсон).

При численном решении начально-краевых задач Коши для параболических уравнений обычно используются двухслойные схемы. Устойчивость приближенного решения наиболее просто исследуется в соответствующих гильбертовых пространствах, условия устойчивости формулируются в виде операторных неравенств [5]. Исследование устойчивости в банаховых пространствах чаще всего ограничивается равномерной нормой и проводится на основе разностно-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в Северо-Кавказском центре математических исследований в рамках соглашения № 075-02-2022-892 с Минобрнауки РФ.

го принципа максимума [6]. Подобное рассмотрение некоторых нестационарных процессов с памятью на дифференциальном уровне выполнено, например, в работе [7]. Более широкие возможности предоставляются использованием понятия логарифмической нормы [8]. На этой основе можно получить [9] принцип максимума и соответствующие оценки устойчивости для параболических задач в конечномерных пространствах L_1, L_2, L_∞.

Вычислительные сложности приближенного решения задач с памятью порождены необходимостью работать с решением на все предшествующие моменты времени. Принципиальное уменьшение вычислительной работы обеспечивается переходом от нелокальной задачи к локальной за счет специальных аппроксимаций разностного ядра [10]. В частности, при аппроксимации ядра суммой экспонент мы имеем систему слабосвязанных эволюционных уравнений. Такой подход использовался нами [11] для задачи Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка. Нелокальные модели теплопередачи рассмотрены в работе [12]. Оценки устойчивости для дифференциальной и разностных задач получены в гильбертовых пространствах.

В настоящей работе рассмотрена задача Коши для эволюционного интегродифференциального уравнения Вольтера первого порядка в вещественном конечномерном банаховом пространстве. Аппроксимация разностного ядра суммой экспонент обеспечивает трансформацию нелокального уравнения с памятью к локальной системе уравнений. На основе понятия логарифмической нормы получены априорные оценки для решения задачи Коши, обеспечивающие устойчивость решения по начальным данным и правой части. Предложены и исследованы на устойчивость двухслойные разностные схемы для системы уравнений, которые удобны для практического использования.

1. ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка с производной по времени интегрального члена в вещественном конечномерном банаховом пространстве V. Функция $u(t)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению первого порядка с разностным ядром

$$\frac{du}{dt} + \frac{d}{dt}\int_0^t k(t-s)u(s)ds + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

и начальному условию

$$u(0) = u^0. \tag{1.2}$$

Чтобы не отягощать текст работы несущественными техническими деталями, предполагаем, что линейный оператор $A : V \to V$ является стационарным (не зависяшим от t). Простым примером уравнения (1.1) является система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, когда A есть квадратная матрица.

К подобным задачам мы приходим после дискретизации по пространству при рассмотрении распределенных моделей динамических процессов с памятью. Ключевая особенность задачи состоит в интегральном члене в уравнении (1.1). Подобные нелокальные математические модели возникают при учете эффектов памяти при теплопередаче [13], [14]. Рассматриваемый случай производной по времени интеграла от решения напрямую связан с учетом эффектов памяти для теплоемкости (внутренней энергии) [15], [16].

Для эволюционных уравнений первого порядка оценки устойчивости решения задачи Коши по начальным данным и правой части в банаховых пространствах могут быть получены с привлечением понятия логарифмической нормы, которое введено В.М. Лозинским [17]. Ее использование при численном решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается в [8], [18].

Логарифмическая норма оператора (матрицы) A есть число

$$\mu(A) = \lim_{\delta\to 0+}\frac{\|I+\delta A\|-1}{\delta},$$

где I — единичный оператор, а $\|\cdot\|$ — норма в V. Мы рассматриваем уравнение (1.1) при

$$\mu(-A) \le 0. \tag{1.3}$$

Это свойство оператора A является естественным при рассмотрении дискретных аналогов краевых задач для параболических уравнений второго порядка.

Для интегродифференциального уравнения (1.1) можно выделить два предельных случая. Первый из них связан с ядром $k(t) = \kappa\delta(t)$, где $\kappa = \text{const} > 0$, а $\delta(t)$ есть δ-функция. Уравнение (1.1) принимает вид

$$(1+\kappa)\frac{du}{dt} + Au = f(t),$$

т.е. становится локальным. Второй случай соответствует постоянному ядру, когда $k(t) = \kappa > 0$. При этом мы снова имеем локальное уравнение:

$$\frac{du}{dt} + (A + \kappa I)u = f(t).$$

При рассмотрении нелокальных эволюционных уравнений первого порядка с памятью ядро $k(t)$, обычно, (см., например, [19]) считается положительно-определенным. Мы наложим, для простоты, ограничения

$$k(t) \ge 0, \quad \frac{dk}{dt}(t) \le 0, \quad \frac{d^2k}{dt^2}(t) \ge 0, \quad t > 0,$$

которые [20] обеспечивают положительную определенность ядра $k(t)$. В этих условиях мы имеем следующие оценки для ядра и его производной:

$$0 \le k(t) \le k(0) = m, \quad 0 \le -k'(t) \le -k'(0) = M. \tag{1.4}$$

При предположениях (1.3), (1.4) установим априорную оценку решения задачи Коши (1.1), (1.2). Эта оценка устойчивости решения по начальным данным и правой части будет для нас ориентиром при построении и исследовании вычислительных алгоритмов приближенного решения рассматриваемой задачи (1.1), (1.2). Наше исследование базируется на следующем утверждении.

Лемма 1. *Для решения задачи Коши*

$$\frac{dw}{dt} + Dw = \varphi(t), \quad t > 0,$$

$$w(0) = w^0$$

имеет место оценка

$$\|w(t)\| \le \exp(\mu(-D)t)\left\|w^0\right\| + \int_0^t \exp(\mu(-D)(t-s))\|\varphi(s)\|ds. \tag{1.5}$$

Доказательство леммы 1 можно найти, например, в [21]. Нам понадобится также следующий вариант леммы Гронуолла-Белмана [22], Теорема 1.3.2, с. 13.

Лемма 2. *Пусть* $g(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *– неотрицательные непрерывные функции и имеет место неравенство*

$$g(t) \le \varphi(t) + \psi(t)\int_0^t g(s)ds, \quad t > 0. \tag{1.6}$$

Тогда

$$g(t) \le \varphi(t) + \psi(t)\int_0^t \varphi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(\theta)d\theta\right)ds. \tag{1.7}$$

Теорема 1. *Пусть для логарифмической нормы оператора A имеет место неравенство* (1.3), *а для ядра* $k(t)$ *– неравенства* (1.4). *Тогда для решения задачи* (1.1), (1.2) *справедлива оценка*

$$\|u(t)\| \le \left(1 + \sqrt{\frac{\pi M}{2}}t\exp\left(\frac{M}{2}t^2\right)\right)\left(\left\|u^0\right\| + \int_0^t \|f(s)\|ds\right), \quad t > 0. \tag{1.8}$$

Доказательство. Для интегрального члена в уравнении (1.1) имеем

$$\frac{d}{dt}\int_0^t k(t-s)u(s)ds = k(0)u(t) + \int_0^t k'(t-s)u(s)ds.$$

Это дает возможность записать (1.1) в виде

$$\frac{du}{dt} + (A + mI)u = -\int_0^t k'(t-s)u(s)ds + f(t). \tag{1.9}$$

Для применения леммы 1 положим

$$D = A + mI, \quad \varphi(t) = -\int_0^t k'(t-s)u(s)ds + f(t).$$

С учетом наших предположений (1.3), (1.4) получим

$$\mu(-A - mI) = -m + \mu(-A) \le -m < 0, \quad \|\varphi(t)\| \le M\int_0^t \|u(s)\| ds + \|f(t)\|.$$

Применяя лемму 1, для решения задачи (1.2), (1.9) имеем

$$\|u(t)\| \le \|u^0\| + \int_0^t \|\varphi(s)\| ds \le \|u^0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds + M\int_0^t\int_0^s \|u(\theta)\| d\theta ds.$$

С учетом

$$\int_0^t\int_0^s \|u(\theta)\| d\theta ds \le \int_0^t\int_0^t \|u(\theta)\| d\theta ds = t\int_0^t \|u(s)\| ds$$

получим

$$\|u(t)\| \le \|u^0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds + Mt\int_0^t \|u(s)\| ds.$$

Мы имеем неравенство (1.6), в котором в условиях леммы 2 имеем

$$g(t) = \|u(t)\|, \quad \varphi(t) = \|u^0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds, \quad \psi(t) = Mt.$$

С учетом этого

$$\exp\left(\int_s^t \psi(\theta)d\theta\right) = \exp\left(\frac{M}{2}(t^2 - s^2)\right).$$

Функция $\varphi(t)$ является неубывающей и поэтому

$$\int_0^t \varphi(s)\exp\left(\frac{M}{2}(t^2 - s^2)\right)ds \le \varphi(t)\exp\left(\frac{M}{2}t^2\right)\int_0^t \exp\left(-\frac{M}{2}s^2\right)ds \le \sqrt{\frac{\pi}{2M}}\varphi(t)\exp\left(\frac{M}{2}t^2\right).$$

Неравенство (1.7) из леммы 2 приводит к оценке (1.8), что и завершает доказательство теоремы.

2. СИСТЕМА ЛОКАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

При приближенном решении нелокальной задачи (1.1), (1.2) наибольший интерес представляют вычислительные алгоритмы, которые базируются на переходе к локальным задачам. Мы используем трансформацию к локальной системе эволюционных уравнений за счет введения вспомогательных величин [11], [12]. Такой подход применяется в случае, когда ядро $k(t)$ является суммой экспонент (ряд Прони):

$$k(t) = \sum_{i=1}^{l} a_i \exp(-b_i t), \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

Коэффициенты a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, предполагаются положительными:

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{2.2}$$

При ограничениях (2.2) для постоянных m и M в (1.4) имеем

$$m = \sum_{i=1}^{l} a_i, \quad M = \sum_{i=1}^{l} a_i b_i.$$

Для учета эффектов памяти введем функции

$$u_i(t) = \int_0^t \exp(-b_i(t-s)) u(s) ds, \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

С учетом этого перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\frac{du}{dt} + \sum_{i=1}^{l} a_i \frac{du_i}{dt} + Au = f(t). \tag{2.3}$$

Для $u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, имеем уравнения

$$\frac{du_i}{dt} + b_i u_i - u = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{2.4}$$

Принимая во внимание (2.4), из (2.3) получим

$$\frac{du}{dt} + \sum_{i=1}^{l} a_i u + Au - \sum_{i=1}^{l} a_i b_i u_i = f(t). \tag{2.5}$$

Для системы уравнений (2.4), (2.5) привлекаются начальные условия

$$u(0) = u^0, \quad u_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{2.6}$$

Аналогом теоремы 1 выступает

Теорема 2. *Пусть для логарифмической нормы оператора A имеет место неравенство* (1.3), *а для ядра $k(t)$ – представление* (2.1), (2.2). *Тогда для решения задачи* (2.4)–(2.6) *имеют место оценки* (1.8) *и*

$$\|u_i(t)\| \leq \int_0^t \|u(s)\| ds, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad t > 0. \tag{2.7}$$

Доказательство. Оценки (2.7) следуют из леммы 1 при рассмотрении задачи Коши для уравнений (2.4) с учетом того, что $D = b_i I$, $b_i > 0$, $\mu(-b_i I) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$, и $\varphi(t) = y(t)$, $w^0 = 0$. В условиях леммы 1 для уравнения (2.5) имеем

$$D = A + \sum_{i=1}^{l} a_i I = A + mI, \quad \varphi(t) = \sum_{i=1}^{l} a_i b_i u_i(t) + f(t).$$

С учетом (2.7) имеем

$$\mu(-D) < 0, \quad \|\varphi(t)\| \leq M \int_0^t \|u(s)\| ds + \|f(t)\|.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 1.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ПО ВРЕМЕНИ

Для приближенного решения задачи Коши (2.4)–(2.6) будем использовать двухслойные схемы. Без ограничения общности будем считать, что сетка по времени равномерная и пусть y^n – есть приближенное решение на момент времени $t^n = n\tau$, где $n = 0,1,\ldots$, а τ – шаг сетки. При ориентации на безусловно устойчивые схемы в банаховых пространствах в классе двухслойных схем мы выбираем чисто неявную схему (неявную аппроксимацию Эйлера).

Для уравнений (2.4), (2.5) имеем

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + b_i y_i^{n+1} - y^{n+1} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,l, \tag{3.1}$$

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \sum_{i=1}^{l} a_i y^{n+1} + Ay^{n+1} - \sum_{i=1}^{l} a_i b_i y_i^{n+1} = f^{n+1}, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{3.2}$$

Начальные условия (2.6) дают

$$y^0 = u^0, \quad y_i^0 = 0, \quad i = 1,2,\ldots,l. \tag{3.3}$$

Доказательство устойчивости мы начнем с дискретного аналога оценки (2.7) для вспомогательных величин. Имеем

$$(1 + b_i\tau) y_i^{n+1} = y_i^n + \tau y^{n+1},$$

так что

$$\|y_i^{n+1}\| \le \|y_i^n\| + \tau \|y^{n+1}\|, \quad i = 1,2,\ldots,l, \quad n = 0,1,\ldots.$$

С учетом начальных условий (3.3) из этих послойных оценок следует

$$\|y_i^{n+1}\| \le \tau \sum_{k=0}^{n} \|y^{k+1}\|, \quad i = 1,2,\ldots,l, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{3.4}$$

Из (3.2) получим

$$(I + m\tau I + \tau A) y^{n+1} = y^n + \tau f^{n+1} + \tau \sum_{i=1}^{l} a_i b_i y_i^{n+1}.$$

С учетом (3.4) имеем

$$\|(I + m\tau I + \tau A) y^{n+1}\| \le \|y^n\| + \tau \|f^{n+1}\| + \tau^2 M \sum_{k=0}^{n} \|y^{k+1}\|. \tag{3.5}$$

Для логарифмической нормы имеют место оценки

$$\|Dy\| \ge -\mu(D)\|y\|, \quad \|Dy\| \ge -\mu(-D)\|y\|.$$

При выполнении (1.3) для левой части неравенства (3.5) имеем

$$\|(I + m\tau I + \tau A) y^{n+1}\| \ge (1 + m\tau - \tau\mu(-A)) \|y^{n+1}\| \ge \|y^{n+1}\|.$$

Тем самым приходим к неравенству

$$\|y^{n+1}\| \le \|y^n\| + \tau^2 M \sum_{k=0}^{n} \|y^{k+1}\| + \tau \|f^{n+1}\|.$$

Из этого неравенства следует

$$\|y^{n+1}\| \le \|u^0\| + \tau \sum_{k=0}^{n} \|f^{k+1}\| + \tau^2 M \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \|y^{j+1}\|.$$

Принимая во внимание

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \|y^{j+1}\| \le (n+1) \sum_{k=0}^{n} \|y^{k+1}\|,$$

получим неравенство

$$\|y^{n+1}\| \le \|u^0\| + \tau\sum_{k=0}^{n}\|f^{k+1}\| + \tau M t^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|y^{k+1}\|.$$

Дальнейшее рассмотрение проводится по схеме доказательства леммы 4 (см. [6], гл. III, § 1).

Перепишем последнее неравенство в виде

$$\|y^{n+1}\| \le r^{n+1} + c\tau\sum_{k=0}^{n}\|y^{k+1}\|, \tag{3.6}$$

где

$$c = Mt^{n+1}, \quad r^{k+1} = \|u^0\| + \tau\sum_{k=0}^{n}\|f^{k+1}\|.$$

Положим

$$s^{n+1} = \tau\sum_{k=0}^{n}\|y^{k+1}\|,$$

тогда

$$s^{n+1} = s^n + \tau\|y^{n+1}\|.$$

Принимая во внимание (3.6), это дает

$$(1 - c\tau)s^{n+1} \le s^n + \tau r^{n+1}. \tag{3.7}$$

Для положительности коэффициента при s^{n+1} мы накладываем необременительные ограничения на шаг по времени. При $0 < c\tau \le 2$ имеет место неравенство

$$(1 - c\tau) > \exp(-2c\tau).$$

Для $0 < t < T$ приходим к условию на шаг по времени

$$\tau \le \tau_0 = \frac{2}{MT}. \tag{3.8}$$

При $\varrho = \exp(2c\tau)$ от (3.7) перейдем к неравенству

$$s^{n+1} \le \varrho s^n + \tau\varrho r^{n+1}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad s^0 = 0. \tag{3.9}$$

С учетом $r^k \le r^{k+1}$, $k = 1,2,\ldots,n$, из (3.9) имеем

$$s^{n+1} \le \tau\varrho\sum_{k=0}^{n}\varrho^k r^{n+1} = \tau\varrho\frac{\varrho^{n+1} - 1}{\varrho - 1}r^{n+1} \le \frac{\varrho}{c}(\varrho^{n+1} - 1)r^{n+1}.$$

Принимая во внимание (3.6), получим

$$\|y^{n+1}\| \le r^{n+1} + cs^{n+1} \le \varrho^{n+2}r^{n+1}.$$

С учетом введенных обозначений это дает

$$\|y^{n+1}\| \le \exp(2Mt^{n+1}(t^{n+1} + \tau))\left(\|u^0\| + \tau\sum_{k=0}^{n}\|f^{k+1}\|\right), \quad n = 0,1,\ldots. \tag{3.10}$$

Эту оценку мы рассматриваем как дискретный аналог оценки (1.8) для решения исходной задачи (1.1)–(1.4). Итогом нашего рассмотрения является

Теорема 3. *Двухслойная разностная схема* (2.2), (3.1)–(3.3) *является безусловно устойчивой при* (1.3) *и* (3.8). *Для приближенного решения задачи имеют место априорные оценки* (3.4), (3.10).

Вычислительная реализация схемы (3.1)–(3.3) может быть проведена следующим образом. Из уравнений (3.1) на новом слое по времени мы имеем

$$y_i^{n+1} = \frac{\tau}{1 + b_i\tau} y^{n+1} + \frac{1}{1 + b_i\tau} y_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, l. \tag{3.11}$$

Подстановка в (3.2) дает уравнение для y^{n+1}:

$$(dI + \tau A) y^{n+1} = \chi^n, \tag{3.12}$$

в котором

$$d = 1 + \tau \sum_{i=1}^{l} \frac{a_i}{1 + b_i\tau}, \quad \chi^n = y^n + \tau f^{n+1} + \tau \sum_{i=1}^{l} \frac{a_i b_i}{1 + b_i\tau} y_i^n.$$

После решения задачи (3.12) для y^{n+1} вспомогательные величины y_i^{n+1}, $i = 1, 2, \dots$, рассчитываются согласно (3.11). Тем самым увеличение вычислительной сложности численного решения задачи с памятью не является принципиальным по сравнению с задачей без эффектов памяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O.* Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge: Springer, 1990.
2. *Prüss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications. Basel: Springer, 1993.
3. *Kochubei A.N.* General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes // Integral Equations and Operator Theory. 2011. V. 71. № 4. P. 583–600.
4. *Chen C., Shih T.* Finite Element Methods for Integrodifferential Equations. Singapore: World Scientific, 1998.
5. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes. New York: Marcel Dekker, 2001.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
7. *Luchko Y., Yamamoto Y.* The general fractional derivative and related fractional differential equations // Mathematics. 2020. V. 8. № 2115. P. 1–20.
8. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения нестационарных задач. М.: ЛЕНАНД, 2021.
9. *Вабищевич П.Н.* Монотонные схемы для задач конвекции-диффузии с конвективным переносом в различной форме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 1. С. 95–107.
10. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Philadelphia: Springer, 1985.
11. *Vabishchevich P.N.* Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels // Applied Numerical Mathematics. 2022. V. 174. P. 177–190.
12. *Vabishchevich P.N.* Numerical solution of the heat conduction problem with memory // Computers and Mathematics with Applications. 2022. № 2022.05.020 P. 1–7.
13. *Joseph D.D., Preziosi L.* Heat waves // Reviews of Modern Physics. 1989. V. 61. № 1. P. 1–41.
14. *Straughan B.* Heat Waves. Berlin: Springer, 2011.
15. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1968. V. 31. № 2. P. 113–126.
16. *Nunziato J.W.* On heat conduction in materials with memory // Quarterly of Applied Mathematics. 1971. V. 29. № 2. P. 187–204.
17. *Лозинский С.М.* Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 52–90.
18. *Dekker K., Verwer J.G.* Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations. Amsterdam: North-Holland, 1984.
19. *McLean W., Thomee V., Wahlbin L.B.* Discretization with variable time steps of an evolution equation with a positive- type memory term // J. of Computational and Applied Mathematics. 1996. V. 69. № 1. P. 49–69.
20. *Halanay A.* On the asymptotic behavior of the solutions of an integro-differential equation // J. of Mathematical Analysis and Applications. 1965. V. 10. № 2. P. 319–324.
21. *Söderlind G.* The logarithmic norm. History and modern theory // BIT Numerical Mathematics. 2006. V. 46. № 3. P. 631–652.
22. *Pachpatte B.G.* Inequalities for differential and integral equations. San Diego: Academic Press, 1998.