ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 2, с. 273–281

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.953

# ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ[1)]


**А. В. Заборский[1,*], А. В. Нестеров[2,**]**

[1] 249035 Обнинск, Калужская обл., пр-т Маркса, 14А, ООО НПП "Радико", Россия

[2] 11799 Москва, Стремянный пер., 36, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Россия

*e-mail: alexander.zaborskiy@mail.ru

**e-mail: andrenesterov@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.06.2022 г.
Переработанный вариант 06.06.2022 г.
Принята к публикации 07.07.2022 г.

Строятся формальные асимптотические разложения решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с малыми диффузией и нелинейностью в критическом случае. При наложении ряда условий на данные задачи асимптотическое разложение решения построено в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, зависящими от различных растянутых переменных. Получены задачи для определения всех членов асимптотического разложения. Показано, что главный член асимптотики решений определяется как решения задач Коши для параболического уравнения типа Бюргерса, при определенных условиях – для уравнения типа Бюргерса–Кортевега–де Вриза. Приведены оценки остаточных членов по невязке. Библ. 12.

**Ключевые слова:** дифференциально-операторные уравнения, уравнения переноса, задача Коши, сингулярные возмущения, критический случай, асимптотические разложения, параболические уравнения, уравнения Бюргерса–Кортевега–де Вриза.

**DOI:** 10.31857/S0044466923020151, **EDN:** BOIMPV

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением серии работ [1], [2], в которых изучались построения асимптотических разложений (АР) решений задач Коши для сингулярно возмущенных дифференциально-операторных уравнений переноса в т.н. критическом случае [3]. В работе [1] построено формальное асимптотическое разложение (далее ФАР, АР) по малому параметру $\varepsilon$ решения задачи Коши со специальными начальными условиями для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с малой нелинейностью, в критическом случае $\varepsilon^2(U(x,t,p)_t + D(p)U(x,t,p)_x) = L_pU(x,t,p) + \varepsilon^2F(p,U)$ (линейный оператор $L_p$, действующий по переменной $p$, имеет однократное нулевое собственное значение [3]), в [2] построено АР решения аналогичного уравнения со многими пространственными переменными и другой степенью малого параметра при нелинейном слагаемом в правой части уравнения

$$\varepsilon^2\left(U_t + \sum_{i=1}^{N} D_i(p)U_{x_i}\right) = L_pU + \varepsilon F(p,U).$$

Особенности подобных задач подробно описаны в работах [1], [2], в частности, в работе [2] указаны прикладные области, в которых такие задачи могут возникать. Это могут быть теория переноса нейтронов [4–6], кинетика [7], теория коагуляции [8] и другие.

1) Работа выполнена в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования РФ на тему "Разработка методологии и программной платформы для построения цифровых двойников, интеллектуального анализа и прогнозирования сложных экономических систем", номер проекта FSSW-2020-0008.

В настоящей работе полученные ранее результаты распространяются на случай аналогичных уравнений с диффузионными слагаемыми в правой части.

Основная цель данной работы – построение ФАР для решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений переноса в критическом случае с малыми нелинейностью и диффузией, и определение влияния диффузионных процессов на АР решения. Рассмотрено построение ФАР решений задачи Коши для уравнений

$$\varepsilon^2(U_t + D(p)U_x) = L_pU + \varepsilon^{k_1}F(U,p) + \varepsilon^{k_2}BU_{xx},$$
$$U(x,0,p) = \omega(x/\varepsilon, p),$$

где $U(x,t,p)$ – решение, $\{x,t,p\} \in H = \{|x| < \infty, t > 0, p \in P\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, показатели $k_1$, $k_2$ – натуральные числа. Линейный оператор $L_p$ действует по переменной $p \in P$ на функции $f(x,t,p) \in A$, принадлежащие по $p$ функциональному $p$ пространству $L$, соответствующему оператору $L_p$ , со скалярным произведением $(f_1, f_2)$ и бесконечно дифференцируемых по переменным $x,t : A = L \otimes C^{\infty}_{|x|<\infty,t>0}$, причем $L_pf \in A \ \forall f \in A$. Множество $P$ может иметь разный вид, например, для интегрального оператора $L_p$ оно может иметь вид $P = [p_1, p_2]$. Функция $D(p) \in L, D(p) \neq \mathrm{const}$, $F(p,U) \in C^{\infty}_U \otimes L$. $B$ может быть либо функцией $B(p)$, либо линейным оператором $B_p$, действующим по переменной $p$. Оператор $L_p$ имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому соответствует собственная функция $h_0(p)$. Через $h_0^*(p)$ обозначим собственную функцию сопряженного оператора $L_p^*$, соответствующую $\lambda_0^* = 0$. Ниже аргумент $p$ может опускаться для краткости записи. Начальные условия, так же как и в работах [1], [2], имеют специальный вид для того, чтобы исследовать поведение решения в наиболее интересных областях больших градиентов.

АР решения задачи существенно зависит от показателей $k_1$, $k_2$. Ниже в работе подробно рассмотрено построение АР решения задачи при значениях $k_1 = 2$, $k_2 = 4$. Особенности АР решения при других $k_1$, $k_2$ приведены в разд. 7.

Алгоритмы построения АР подробно описаны в работах [1], [2], поэтому здесь оставлен лишь необходимый минимум технических выкладок.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения в случае $k_1 = 2$, $k_2 = 4$

$$\varepsilon^2(U_t + D(p)U_x) = L_pU + \varepsilon^2F(p,U) + \varepsilon^4B(p)U_{xx}, \tag{1}$$

$$U(x,0,p) = w(x\varepsilon^{-1}, p), \tag{2}$$

где функция $B(p) \in L$, $B(p) > B_0 > 0$, что обеспечивает параболичность уравнения (1) по переменным$(x,t)$ при всех значениях переменной $p$. Задача (1), (2) отличается от задачи, изученной в [1], наличием в правой части слагаемого со второй производной по пространственной переменной $x$. Потребуем выполнения следующих условий на данные задачи (1), (2).

**Условие 1.** Функция $w(z,p)$, стоящая в правой части начального условия, и все ее производные по переменной $x$ удовлетворяют неравенствам $\left|w^{(k)}(z,p)\right| \le Ce^{-\beta z^2}$, $k = 0,1,\ldots$, $C > 0$, $\beta > 0$, где постоянные $C > 0$, $\beta > 0$ могут зависеть от $k$-порядка производных.

**Замечание 1.** Такой вид начальных условий выбран для того, чтобы исследовать поведение решения в области больших градиентов.

**Условие 2.** Собственные значения оператора $L_p : \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ однократны, отвечающие им собственные функции ортогональны, нормированы, образуют полную систему функций.

**Условие 3.** Все собственные значения $\lambda$ линейного оператора $L_p$, кроме $\lambda_0 = 0$, имеют отрицательные вещественные части, удовлетворяющие неравенствам $\mathrm{Re}\,\lambda \le -k$, $k > 0$.

**Условие 4.** Скалярное произведение $(h_0, h_0^*)$ отлично от нуля: $(h_0, h_0^*) \neq 0$.

**Замечание 2.** При этом можно выбрать эти функции так, чтобы $(h_0, h_0^*) = 1$, что и полагается ниже.

**Условие 5.** Функция $w(\xi, p)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$w(\xi, p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\xi) h_k(p),$$

который можно почленно дифференцировать по $\xi$ необходимое количество раз. Потребуем, чтобы в этом случае коэффициенты ряда $w_i(\xi)$ вместе со своими производными удовлетворяли неравенствам $|w_i(\xi)| \le C\exp(-\beta|\xi|^2)$, где $C$ и $\beta$ – константы.

## 2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ФАР РЕШЕНИЯ

Алгоритм построения ФАР решения начальной задачи (1), (2) подробно описан в работах [1], [2], поэтому здесь оставлен минимум выкладок. В соответствии с алгоритмом А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова построения погранслойных разложений (см. [3]) ФАР решения с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$, где $N$ – произвольное натуральное число, в этой задаче ищется в виде суммы функции “всплеска” $S$, сосредоточенной в окрестности некоторой линии $\{l : \zeta = 0\}$ (“псевдохарактеристике” уравнения (1) ), пограничной функции $\Pi$, сосредоточенной в $\varepsilon$-окрестности границы $t = 0$ и остаточного члена $R$

$$U(x,t,p) = S(\zeta,t,p) + \Pi(\xi,\tau,p) + R = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (s_i(\zeta,t,p) + \pi_i(\xi,\tau,p)) + R, \tag{3}$$

где $\zeta = (x - Vt)/\varepsilon$ – переменная, с помощью которой описывается функция всплеска $S(\zeta,t,p)$, $V = (D(p)h_0(p), h_0^*(p))$; $\xi = x/\varepsilon$ и $\tau = t/\varepsilon^2$ – растянутые переменные, с помощью которых описывается пограничная функция $\Pi(\xi,\tau,p)$.

Следуя [3], представим функцию $F(p,U)$ в виде суммы:

$$F(p,U) = SF + \Pi F + RF, \tag{4}$$

где

$$SF = F(p,S), \tag{5}$$

$$\Pi F = F(p,S+\Pi) - F(p,S), \tag{6}$$

$$RF = F(p,S+\Pi+R) - F(p,S+\Pi). \tag{7}$$

## 3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ВСПЛЕСКА $S$

Функция всплеска $S(\zeta,t,p)$ ищется в виде разложения по степеням параметра $\varepsilon$

$$S(\zeta,t,p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k s_k(\zeta,t,p) \tag{8}$$

и должна удовлетворять уравнению

$$\varepsilon^2(S_t + DS_x) = L_p S + \varepsilon^2 SF + \varepsilon^4 B(p) S_{xx}. \tag{9}$$

Перейдя в уравнении (9) от переменных $(x,t,p)$ к переменным $(\zeta,t,p)$, получаем

$$L_p S = \varepsilon^2 S_t + \varepsilon\Psi S_\zeta - \varepsilon^2 SF - \varepsilon^2 B(p) S_{\zeta\zeta}, \tag{10}$$

где

$$\Psi(p) = D(p) - V = D(p) - (D(p)h_0(p), h_0^*(p)). \tag{11}$$

Подставив разложение (8) в (5), получаем

$$SF = F\left(p, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k s_k\right) = F(p,s_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (F'(p,s_0)s_k + Sf_k), \tag{12}$$

где через $Sf_k$ обозначены слагаемые, зависящие от $s_j,\ j < k$, штрих означает производную $F(x,y)$ по второму аргументу.

Подставив (8) и (12) в уравнение (10), стандартным способом [3] получаем систему уравнений для членов разложения $s_i$

$$\varepsilon^0\colon L_p s_0 = 0, \tag{13}$$

$$\varepsilon^1\colon L_p s_1 = \Psi s_{0,\zeta}, \tag{14}$$

$$\varepsilon^2\colon L_p s_2 = \Psi s_{1,\zeta} + s_{0,t} - F(p,s_0) - B(p)s_{0,\zeta\zeta}, \tag{15}$$

$$\ldots$$

$$\varepsilon^k\colon L_p s_k = \Psi s_{k-1,\zeta} + s_{k-2,t} - F'(p,s_0)s_{k-2} - B(p)s_{k-2,\zeta\zeta} - SF_{k-2}. \tag{16}$$

$$\ldots$$

Решение уравнения (13) имеет вид

$$s_0 = \varphi_0(\zeta,t)h_0(p), \tag{17}$$

где $\varphi_0$ — пока неизвестная функция.

Для разрешимости уравнения (14) (и последующих) должно выполняться условие ортогональности правой части к собственной функции $h_0^*$ сопряженного к $L_p$ оператора $L_p^*$, соответствующей его нулевому собственному значению [3].

Условие разрешимости уравнения (14) $(\Psi s_{0,\zeta}, h_0^*) = 0$ выполняется, поэтому функция $s_1$ может быть представлена в виде

$$s_1 = \varphi_1(\zeta,t)h_0(p) + G\Psi s_{0,\zeta}, \tag{18}$$

где $G$ — псевдообратный к $L_p$ оператор.

**Замечание 3**. Назовем оператор $G$ *псевдообратным* к оператору $L_p$, если решение уравнения $L_pU = F$ при условии $(F,h_0^*) = 0$ может быть записано в виде $U = GF + Ch_0$, где $C$ не зависит от $p$.

Подставляя (17) и (18) в условие разрешимости уравнения (15)

$$(\Psi s_{1,\zeta} + s_{0,t} - F(p,s_0) - B(p)s_{0,\zeta\zeta}, h_0^*) = 0,$$

получаем уравнение для определения функции $\varphi_0$:

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + F_{\text{eff}}(\varphi_0) = 0, \tag{19}$$

где

$$M = (\Psi G\Psi h_0, h_0^*) - (B(p)h_0, h_0^*),\ F_{\text{eff}}(\varphi_0) = (F(p,\varphi_0 h_0), h_0^*). \tag{20}$$

**Замечание 4.** Легко показать, что $M = (\Psi G\Psi h_0, h_0^*)$ определяется однозначно, хотя псевдообратный оператор $G$ определяется неоднозначно.

При выполнении условий разрешимости соответствующих уравнений функции $s_k, k = 2,3,\ldots$, имеют вид

$$s_k = \varphi_k(\zeta,t)h_0(p) + G\left(\Psi s_{k-1,\zeta} + s_{k-2,t} - F'(p,s_0)s_{k-2} - B(p)s_{k-2,\zeta\zeta} - SF_{k-2}\right). \tag{21}$$

Действуя аналогично, выбрав номер $k$, записывая условие разрешимости уравнения для номера $k+2$, получаем уравнение для определения функции $\varphi_k$:

$$\varphi_{k,t} + M\varphi_{k,\zeta\zeta} - (F'(p,\varphi_0 h_0)h_0, h_0^*)\varphi_k = \Phi_k, \tag{22}$$

где $\Phi_k$ выражаются через уже найденные $\varphi_j, j < k$. Отметим, что уравнение (22), в отличие от уравнения (19), линейное.

Таким образом, получены выражения для нахождения $s_k$ и уравнения для определения входящих в эти выражения функций $\varphi_k$.

Наложим следующее

**Условие 6**: $M = (\Psi G \Psi h_0, h_0^*) - (B(p)h_0, h_0^*) < 0$.

При выполнении условия 6 уравнения (19), (22) будут параболическими.

## 4. ПОСТРОЕНИЕ ПОГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ П

Ввиду вполне определенного вида зависимости функций $s_k(\zeta, t, p)$ от переменной $p$ функция $S$, вообще говоря, ни в каком приближении не может удовлетворять начальным условиям (2). Для удовлетворения этих условий строится пограничная функция $\Pi(\xi, \tau, p)$ (см. [3]), $\xi = x/\varepsilon$, $\tau = t/\varepsilon^2$, которая удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^2(\Pi_t + D(p)\Pi_x) = L_p\Pi + \varepsilon^2\Pi F + \varepsilon^4 B(p)\Pi_{xx}, \tag{23}$$

условию

$$\lim_{\tau\to+\infty} \Pi = 0, \tag{24}$$

а также совместно с функцией $S$ удовлетворяет начальным условиям (2)

$$S(\xi, 0, p) + \Pi(\xi, 0, p) = w(\xi, p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\xi)h_k(p) \tag{25}$$

(последнее равенство записано с учетом условия 5).

Функция $\Pi$ ищется стандартно (см. [3])

$$\Pi(\xi, \tau, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k(\xi, \tau, p). \tag{26}$$

Перейдя от переменных $(x, t, p)$ к $(\xi, \tau, p)$, представим уравнение (23) в виде

$$\Pi_\tau = L_p\Pi - \varepsilon D(p)\Pi_\xi + \varepsilon^2\Pi F + \varepsilon^2 B(p)\Pi_{\xi\xi}. \tag{27}$$

Подставив разложения (8) и (26) в (6), переходя к переменным $(\xi, \tau, p)$, разложим $\Pi F$ в ряд по степеням малого параметра:

$$\Pi F = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi F_k. \tag{28}$$

Подставив (26) и (28) в уравнение (27), стандартным способом (см. [3]) получаем систему уравнений для членов разложения $p_i$

$$\varepsilon^0\colon \pi_{0,\tau} = L_p\pi_0, \tag{29}$$

$$\varepsilon^i\colon \pi_{i,\tau} = L_p\pi_i + \tilde{P}_{i-1}, \tag{30}$$

где $\tilde{P}_1 = -D_i(p)\pi_0, \tilde{P}_i = -D_i(p)\pi_{i-1,\xi} + \Pi F_{i-2} + B(p)\pi_{i-2,\xi\xi}, i \ge 2$.

Учитывая условия 2, 3 и (24) , выпишем $\pi_0$:

$$\pi_0(\xi, \tau, p) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}(\xi)h_k(p)e^{\lambda_k\tau}, \tag{31}$$

где суммирование ведется по номерам, отвечающим ненулевым собственным значениям линейного оператора $L_p$ (т.е. всем, кроме $\lambda_0 = 0$).

Из (25), (32), (31) и условий 2–4, получаем

$$\varphi_0(\xi, 0) = w_0(\xi), \tag{32}$$

$$C_{0k}(\xi) = w_k(\xi), \quad k > 0. \tag{33}$$

Таким образом, получено начальное условие (32) для уравнения (19), определяющего функцию $\varphi_0$ и определена функция $\pi_0$ формулами (31), (33).

Построение функций $\pi_k(\xi,\tau,p)$, $k \geq 1$, почти дословно повторяет соответствующие построения в работах [1], [2].

Функция $\pi_1$ удовлетворяет уравнению

$$\pi_{1,\tau} = L_p\pi_1 + \Pi F_1, \tag{34}$$

где $\Pi F_1$ выражается через $\pi_0(\xi,\tau,p)$ и удовлетворяет оценке $|\Pi F_1| < Ce^{-\kappa\tau}$, $\kappa > 0$. Решение уравнения (34) имеет вид

$$\pi_1(\xi,\tau,p) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k}(\xi,\tau)h_k(p). \tag{35}$$

Умножая скалярно (36) на $h_i$, получаем уравнения для определения $C_{1,i}$:

$$(C_{1,i})'_\tau = \lambda_i C_{1,i} + (\Pi F_1, h_i). \tag{36}$$

Из условия $C_{10} \to 0$ при $\tau \to \infty$ получаем $C_{10}(\xi,\tau)$ в явном виде (см. [3])

$$C_{10}(\xi,0) = -\int_{\tau}^{\infty} (\Pi F_1, h_0)ds. \tag{37}$$

Из (25) получаем

$$s_1(\xi,0,p) + \pi_1(\xi,0,p) = 0. \tag{38}$$

Подставив (18) (в виде $s_1 = \varphi_1 h_0 + N_1$, где $N_1 = G\Psi s_{0,\zeta}$) и (35) в (38), получаем

$$\varphi_1 h_0 + N_1 + \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k}(\xi,0)h_k = 0. \tag{39}$$

Умножив скалярно (39) на $h_0$, получаем

$$\varphi_1(\xi,0) = -(C_{10}(\xi,0) + (N_1,h_0)), \tag{40}$$

умножая (39) на $h_j$, $j \geq 1$, получаем

$$C_{1j}(\xi,0) = -(N_1,h_j). \tag{41}$$

Таким образом, получены начальные условия (32), (40) для функций $\varphi_i$ и определены функции $\pi_i$ (35), (36), (37), (41).

## 5. ОЦЕНКИ ЧЛЕНОВ РАЗЛОЖЕНИЯ

Справедливы теоремы об оценках членов разложений.

**Теорема 1.** *При выполнении условий 1, 6 для любого натурального $N$ существуют постоянные $T_1 > 0$, $\kappa > 0$, $C \geq 0$ такие, что на $[0,T_1]$ все $\varphi_i(\zeta,t)$ для $i \leq N$ существуют, единственны и удовлетворяют оценкам*

$$|\varphi_i(\zeta,t)| < Ce^{-\kappa|\zeta|^2} \tag{42}$$

*вместе с частными производными до второго порядка.*

**Замечание 5.** Из оценок (42) следуют оценки

$$|s_i(\zeta,t,p)| < Ce^{-\kappa|\zeta|^2}. \tag{43}$$

**Теорема 2.** *При выполнении условий 2, 3 для любого натурального $N$, для любого $T > 0$ все $\pi_i(\xi,\tau,p)$, $i \leq N$, на $[0,T]$ существуют, единственны и имеют оценку*

$$|\pi_i(\xi,\tau,p)| < Ce^{-\kappa(\tau+|\zeta|^2)}, \tag{44}$$

*где $C > 0$, $\kappa > 0$ — постоянные.*

**Доказательства** этих теорем практически дословно повторяют доказательства соответствующих теорем из работ [1], [2], [9] и здесь не приводятся. Отметим лишь, что доказательство теоремы 1 основано на методе последовательных приближений с использованием оценок фундаментального решения параболического уравнения (см. [10]).

**Замечание 6.** Постоянные $T_1 > 0$, $C > 0$, $\kappa > 0$ в оценках (42)–(44) могут зависеть от числа $N$.

## 6. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА $R$

Будем считать выполненным

**Условие 7.** Пусть решение задачи (1), (2) существует и единственно на некотором промежутке $[0, T_2]$, где $T_2 > 0$ – положительная величина, не зависящая от $\varepsilon$.

Оценка остаточного члена производится по невязке.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия 1–7.*

Тогда на отрезке $[0, T]$, где $T = \min(T_1, T_2)$, решение задачи (1), (2) существует и для любого натурального $N$ представимо в виде

$$\begin{gathered}U(x,t) = S_N(\zeta, t, p) + \Pi_N(\xi, \tau, p) + R = \\ = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (s_i(\zeta, t, p) + \pi_i(\xi, \tau, p)) + R = U_N + R,\end{gathered} \tag{45}$$

где $S_N$, $\Pi_N$ есть частичные суммы рядов (8) и (26) ( ФАР), остаточный член $R$ удовлетворяет задаче Коши

$$\varepsilon^2 (R_t + D(p) R_x) = L_p R + \varepsilon R F + r, \quad |x| < \infty, \quad t > 0, \quad R(x, 0, p) = 0, \tag{46}$$

где $r$ – известная функция, удовлетворяющая оценке $|r| < C\varepsilon^{N+1} e^{-\kappa|\zeta|^2}$.

**Доказательство** теоремы 3. Существование самой величины $R$ следует из условия 7 и теорем 1, 2. Уравнение и начальные условия (46) для функции $R$, а также оценка функции непосредственно вытекают из алгоритма построения ФАР, а также оценок (43), (44).

## 7. ОБОБЩЕНИЯ, ИТОГИ

При $k_1 = 2$, $k_2 = 4$ ФАР решения задачи (1), (2) при выполнении условий 1–5 имеет вид (45). Главный член асимптотики равен $s_0(\zeta, t, p) = \varphi_0(\zeta, t) h_0(p)$, где $\varphi_0(\zeta, t)$ есть решение параболического уравнения (19) типа "реакция–диффузия"

$$\varphi_{0,t} + M \varphi_{0,\zeta\zeta} + F_{\text{eff}}(\varphi_0) = 0.$$

При иных значениях $k_1, k_2$ ФАР решения задачи может иметь иной вид.

При $k_1 = 1$, $k_2 = 4$ ФАР решения задачи

$$\varepsilon^2 (U_t + D(p) U_x) = L_p U + \varepsilon F(p, U) + \varepsilon^4 B(p) U_{xx}, \quad U(x, 0, p) = w(x\varepsilon^{-1}, p) \tag{47}$$

при выполнении условий 1–5 и наложении дополнительного условия $(F(p, U), h_0^*) = 0$, имеет вид, аналогичный (45). Алгоритм построения ФАР решения задачи (47) почти дословно повторяет изложенный выше (с небольшими изменениями) и здесь не приводится. Основное отличие от рассмотренного выше случая состоит в том, что $\varphi_0(\zeta, t)$, определяющая главный член разложения, есть решение задачи Коши для иного параболического уравнения

$$\varphi_{0,t} + M \varphi_{0,\zeta\zeta} + (F_{\text{eff}}(\varphi_0))_\zeta = 0, \tag{48}$$

где

$$M = (\Psi G \Psi h_0, h_0^*), \quad F_{\text{eff}}(\varphi_0) = -(\Psi G F(p, \varphi_0 h_0) h_0, h_0^*).$$

Уравнение (48) может быть названо обобщенным уравнением Бюргерса. При квадратичной по $U$ функции $F(p, U)$ функция $F_{\text{eff}}(\varphi_0) = k\varphi_0^2$, $k = \text{const}$, и уравнение (48) становится уравнением Бюргерса

$$\varphi_{0,t} + M \varphi_{0,\zeta\zeta} + k \varphi_0 \varphi_{0\zeta} = 0.$$

При $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ ФАР решения задачи

$$\varepsilon^2(U_t + D(p)U_x) = L_pU + \varepsilon F(p,U) + \varepsilon^3 B_p U_{xx}, \quad U(x,0,p) = w(x\varepsilon^{-1},p), \tag{49}$$

где $B_p$ — линейный оператор, действующий по переменной $p$, при выполнении условий 1–5 и наложении дополнительных условий $(F(p,U),h_0^*) = 0$, $B_p h_0 = 0$ имеет вид, аналогичный (45). В этом случае функция $\varphi_0(\zeta,t)$, определяющая главный член разложения, есть решение задачи Коши для уравнения

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + (F_{\text{eff}}(\varphi_0))_\zeta + Q\varphi_{0,\zeta\zeta\zeta} = 0, \tag{50}$$

где

$$M = (\Psi G\Psi h_0, h_0^*), \quad F_{\text{eff}}(\varphi_0) = -(\Psi GF(\varphi_0 h_0, p)h_0, h_0^*), \quad Q = (\Psi GB_p h_0, h_0^*).$$

Уравнение (50) может быть названо обобщенным уравнением Бюргерса–Кортевега–де-Вриза. При квадратичной по $U$ функции $F(p,U)$ функция $F_{eff}(\varphi_0) = k\varphi_0{}^2$, $k = \text{const}$, и уравнение (50) становится уравнением Бюргерса–Кортевега–де Вриза

$$\varphi_{0,t} + M\varphi_{0,\zeta\zeta} + k\varphi_0\varphi_{0\zeta} + Q\varphi_{0,\zeta\zeta\zeta} = 0.$$

В области $t > t_0$, где $t_0 > 0$ — любое положительное число, не зависящее от $\varepsilon$, решение задачи во всех случаях имеет вид $s_0(\zeta,t,p) = \varphi_0(\zeta,t)h_0(p) + O(\varepsilon)$. Соответственно, в этой области поведение решения определяется первым слагаемым (главным членом АР), в котором $\varphi_0(\zeta,t)$ определяется уравнениями (19), либо (48), либо (50), что определяется показателями $k_1$, $k_2$. Во всех случаях в уравнениях появляется слагаемое со второй производной $M\varphi_{0,\zeta\zeta}$, порожденное малым параметром при операторе переноса в сочетании с оператором $L_p$, имеющим нулевое собственное значение: $\varepsilon^2(U_t + D(p)U_x) - L_pU$. Этим сочетанием объясняется то, что во всех случаях малая нелинейность в исходных уравнениях дает существенную нелинейность в уравнениях, которыми описывается главный член АР решений. С физической точки зрения такое сочетание соответствует тому, что процессы “перемешивания” по переменной $p$ происходят существенно быстрее, чем процессы переноса по пространству, по прошествии малого времени решение уравнений переноса с достаточной точностью будет описываться или параболическими уравнениями (19), (48), или уравнением типа Бюргерса–Кортевега–де-Вриза (50).

Уравнениям (19), (48), (50) посвящена обширная литература. Хорошо известно (см., например, [11], [12]), что уравнения (19), (48), (50) могут иметь решения вида “бегущая волна”.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построены ФАР решений задачи Коши для сингулярно возмущенных дифференциально-операторных уравнений переноса с диффузионными слагаемыми. Получены задачи для определения всех членов разложения решения по малому параметру.

2. Условие однократности нулевого собственного значения оператора $L_p$ является существенным.

3. Согласование масштабов малости параметра в уравнении (1) и начальных условиях (2) существенно.

4. Алгоритм построения может быть обобщен на уравнения с переменными коэффициентами, а так же на уравнения с многими пространственными переменными.

5. Знание структуры решения в дальней зоне позволяет строить подходящие разностные схемы и выбирать адаптивные сетки, что актуально для задач большой размерности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заборский А.В., Нестеров А.В.* Асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного нелинейного уравнения // Вестник МИФИ. 2015. Т. 4. № 4. С. 333–338.

2. *Заборский А.В., Нестеров А.В., Нечаев Д.Ю.* Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с многими пространственными переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.2021. Т. 61. № 12. С. 137–145.
3. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 106 с.
4. *Тупчиев В.А., Чепурко А.Н.* Асимптотика решения спектральной задачи переноса нейтронов в слое // Дифференц. ур-ния. 1996. Т. 32. № 6. С. 847–850.
5. *Латышев В.Н.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной спектральной задачи, возникающей в теории переноса. Обнинск: ОИАтЭ, 1987. 26 с.
6. *Крючков Э.Ф.* Теория переноса нейтронов. М.: МИФИ, 2007.
7. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
8. *Галкин В.А.* Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
9. *Нестеров А.В.* Об асимптотике решения системы уравнений диффузия-сорбция при малых коэффициентах диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 9. С. 1318–1330.
10. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
11. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 624.
12. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса // Функц. анализ и его приложения. 1991. Т. 25. Вып. 1. С. 21.