ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 3, с. 351–354

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.95

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ТОЖДЕСТВЕ И ОЦЕНКЕ ОТКЛОНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ[1)]

© 2023 г. К. О. Бесов[1,2,*]

[1] 119991 Москва, ул. Губкина 8, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

[2] 050010 Алматы, ул. Пушкина, 125, Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки Республики Казахстан, Казахстан

*e-mail: kbesov@mi-ras.ru

Поступила в редакцию 20.06.2022 г.
Переработанный вариант 29.08.2022 г.
Принята к публикации 14.11.2022 г.

В работе показано, что интегральное тождество, полученное в работе Д.Е. Апушкинской и С.И. Репина для приближенных решений бигармонической задачи с препятствием, удовлетворяющих поточечному ограничению на вторую дивиргенцию, справедливо для произвольных приближенных решений. С помощью этого результата получена новая оценка меры отклонения приближенных решений от точных в случае, когда приближенные решения не удовлетворяют поточечному ограничению на вторую дивиргенцию. Библ. 5.

Ключевые слова: вариационная задача, оценки отклонения от точного решения.

DOI: 10.31857/S0044466923030031, **EDN:** DXXEPD

В работе [1] рассмотрена задача минимизации функционала

$$J(v) = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}|\Delta v|^2 - fv\right)dx \to \min, \quad v \in K, \tag{1}$$

на замкнутом выпуклом множестве

$$K = \{v \in H_0^2(\Omega)\colon v \geq \phi \text{ п.в. в } \Omega\}, \quad H_0^2(\Omega) = \left\{v \in H^2(\Omega)\colon v|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ и единичной внешней нормалью ν, f и ϕ – заданные функции такие, что $f \in L_2(\Omega)$, $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ и $\phi(x) \leq 0$ на $\partial\Omega$.

Известно, что задача (1) имеет единственное решение $u \in H^3_{\text{loc}}(\Omega) \cap W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ (см. [2], [3]), причем

$$(\Delta^2 u - f)(u - \phi) \equiv 0, \quad \Delta^2 u \geq f, \quad u \geq \phi \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Отметим сразу, что для того, чтобы множество K было непусто, на функцию ϕ необходимо наложить дополнительное условие на границе $\partial\Omega$ или вблизи нее. Иначе, например, в случае $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}^1$ и $\phi(x) = 1 - x^2$ для любой функции $v \in H_0^2(\Omega)$ имеем $v(x) = \int_{-1}^{x}(x - \xi)v''(\xi)d\xi = o(x+1)$ при $x \to -1$, что несовместимо с условием $v \geq \phi$ п.в. в Ω. В качестве упомянутого условия можно взять $\phi(x) \leq C(\text{dist}(x, \partial\Omega))^2$ для $x \in \Omega$, где $C > 0$ – некоторая константа, или $\partial\phi/\partial\nu \geq 0$ на множестве $\partial\Omega \cap \{x : \phi(x) = 0\}$, если нормаль ν определена во всех точках этого множества. То-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP14869246).

гда элементом множества K будет, например, $C'\rho^2$ с подходящей константой $C' > 0$, где ρ – регуляризованное расстояние до $\partial\Omega$ из [4, гл. VI, § 2, теорема 2].

В [1] вводится также пространство $H(\Omega, \operatorname{div}\operatorname{Div}) = \{y \in L_2(\Omega; M^{d\times d}_{\mathrm{sym}}) : \operatorname{div}\operatorname{Div} y \in L_2(\Omega)\}$ функций со значениями в пространстве $M^{d\times d}_{\mathrm{sym}} \cong \mathbb{R}^{d(d+1)/2}$ симметричных $(d\times d)$-матриц.

Для (единственного) решения $u \in K$ задачи (1) в [1] получено следующее интегральное тождество.

Теорема 1 (см. [1, теорема 2.1]). *Пусть $u \in K$ – решение задачи* (1). *Для любой функции $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div}\operatorname{Div})$ такой, что*

$$\operatorname{div}\operatorname{Div} y^*(x) \ge f(x) \quad \textit{при п.в.} \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

и любой функции $v \in K$ справедливо тождество

$$\mu(v) + \mu^*(y^*) = \frac{1}{2}\|\nabla\nabla v - y^*\|^2_{L_2} + \int\limits_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)(v - \phi)dx, \tag{3}$$

где

$$\mu(v) = \frac{1}{2}\|\nabla\nabla(u - v)\|^2_{L_2} + \mu_\phi(v), \quad \mu^*(y^*) = \frac{1}{2}\|p^* - y^*\|^2_{L_2} + \mu^*_\phi(y^*)$$

суть меры отклонения функций v и y^* от точных решений u и p^* задачи (1) *и сопряженной задачи* (*см.* [1]) *соответственно,*

$$\mu_\phi(v) = \int\limits_{\{u=\phi\}} (\operatorname{div}\operatorname{Div}\nabla\nabla u - f)(v - u)dx - \int\limits_{\Gamma_u} [\operatorname{Div}\nabla\nabla u \cdot \nu_{\Gamma_u}](v - u)ds,$$

$[\cdot]$ – *скачок соответствующей величины на границе Γ_u между областями* $\{u = \phi\}$ и $\{u > \phi\}$,

$$\mu^*_\phi(y^*) = \int\limits_{\{u>\phi\}} (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)(u - \phi)dx.$$

Далее, как замечено в [1], условие (2) неудобно для приложений и хотелось бы иметь оценку величины $\mu(v) + \mu^*(y^*)$ для любых функций $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div}\operatorname{Div})$, а не только для y^*, удовлетворяющих условию (2). Такая оценка получена в [1] в следующем виде.

Теорема 2 (см. [1, теорема 2.2]). *Для любых функций $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div}\operatorname{Div})$ и $v \in K$ и произвольного числа $\beta \in (0,1]$ имеем*

$$\frac{1-\beta}{2}\left(\|\nabla\nabla(u - v)\|^2_{L_2} + \|p^* - y^*\|^2_{L_2}\right) + \mu_\phi(v) + \mu^*_\phi(y^*) \le \mathfrak{M}(v, y^*, \beta), \tag{4}$$

где

$$\mathfrak{M}(v, y^*, \beta) = \frac{1}{2}(1+\beta)\|\nabla\nabla v - y^*\|^2_{L_2} + \frac{3}{2\beta}C^2_{\mathrm{F}}\|(f - \operatorname{div}\operatorname{Div} y^*)_+\|^2_{L_2} + \\ + \int\limits_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)(v - \phi)dx,$$

C_{F} – *константа из неравенства Фридрихса для области* Ω.

На самом деле несложное рассуждение показывает, что сама теорема 1 справедлива для любых функций $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div}\operatorname{Div})$ (т.е. ограничение (2) можно снять уже в теореме 1) и для любых функций $v \in H^2_0(\Omega)$ (а не только для $v \in K$).

Теорема 1'. *Пусть $u \in K$ – решение задачи* (1) *и p^* – решение сопряженной задачи. Тогда для любых функций $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div}\operatorname{Div})$ и $v \in H^2_0(\Omega)$ справедливо тождество* (3).

Доказательство. В силу плотности функций из $C^\infty_0(\Omega)$ в $H^2_0(\Omega)$ теорему достаточно доказать для $v \in C^\infty_0(\Omega)$. Зафиксируем произвольные функции $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div}\operatorname{Div})$ и $v \in C^\infty_0(\Omega)$. Пусть $C > 0$ –

такая константа, что $\phi(x) \le C(\rho(x))^2$ (см. выше) и $|v(x)| \le C(\rho(x))^2$ при всех $x \in \Omega$. Рассмотрим функции $v_0 = 3C\rho^2 \in H_0^2(\Omega)$ и $y_0^* \in H(\Omega, \operatorname{div}\operatorname{Div})$ такую, что

$$\operatorname{div}\operatorname{Div} y_0^*(x) \ge 2|f(x)| + |\operatorname{div}\operatorname{Div} y^*(x)| \quad \text{при п.в.} \quad x \in \Omega$$

(легко показать, что такая функция y_0^* существует, поскольку правая часть неравенства здесь из $L_2(\Omega)$), и пусть $v_t = v_0 - t(v_0 - v)$, $y_t^* = y_0^* - t(y_0^* - y^*)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда $v_t \in H_0^2(\Omega)$, $y_t^* \in H(\Omega, \operatorname{div}\operatorname{Div})$, причем при $|t| < 1/2$ выполнены неравенство $v_t \ge \phi$ и условие (2) для y_t^*. Поэтому в силу теоремы 1 для v_t и y_t^* при $|t| < 1/2$ справедливо тождество (3). Но для v_t и y_t^* обе части тождества (3) являются многочленами второй степени по t. Равенство двух многочленов при всех $|t| < 1/2$ означает тождественное равенство этих многочленов при всех t, а значит, и при $t = 1$. Но при $t = 1$ имеем $v_1 = v$ и $y_1^* = y^*$. Теорема доказана.

В частности, в модельной задаче из [1], разд. 3 для функции $\tilde{n}^*$ условие (2) нарушено. Тем не менее тождество (3) сохраняется, что можно проверить, вычислив все интегралы (например, с помощью онлайн-калькулятора [5]):

$$\mu_\phi(v_1) = \frac{160}{3} + \frac{896}{9} = \frac{1376}{9}, \quad \mu(v_1) = \frac{5632}{45} + \frac{1376}{9} = \frac{12\,512}{45}, \quad \mu_\phi^*(\tilde{n}^*) = 72,$$
$$\mu^*(n^*) = \frac{872}{35} + 72 = \frac{3392}{35}, \quad \frac{1}{2}\|v - \tilde{n}^*\|_{L_2}^2 = \frac{26368}{567}, \quad \int_{-1}^{1} (\tilde{n}^{*\prime\prime} - f)(v_1 - \phi)dx = \frac{133\,024}{405},$$

так что обе части тождества равны 118 112/315 ≈ 374.9587 (в вычисление интегралов в [1] вкрались некоторые ошибки, так что в неравенстве (3.6) из [1] свободные от β члены слева и справа должны быть равны 374.9587…).

Таким образом, в виде теоремы 1' мы получаем усиление обеих теорем 1 и 2 из [1]. Действительно, сравнение теорем 1' и 1 очевидно, а для сравнения теорем 1' и 2 достаточно заметить, что левая часть неравенства (4) строго меньше[2] левой части тождества (3) (коэффициенты при квадратах L_2-норм уменьшены на $\beta/2$), а правая часть неравенства (4) строго больше правой части тождества (3) (помимо увеличения на $\beta/2$ коэффициента при квадрате L_2-нормы, добавлен еще один неотрицательный член – квадрат нормы разности $(f - \operatorname{div}\operatorname{Div} y^*)_+$ с коэффициентом $3C_{\mathrm{F}}^2/(2\beta)$).

Однако следует отметить еще один момент. Основная цель неравенства (4), как и тождества (3), – получить оценку отклонения приближенных решений от точных. При ограничении (2) (и $v \in K$) все члены в левых частях (4) и (3) неотрицательны, поэтому все эти левые части или же только сумму квадратов L_2-отклонений (сумму в скобках в левой части (4)) можно рассматривать как меру отклонения, оценка которой (при использовании неравенства (4)) или же точное значение (при использовании тождества (3)) дается правой частью (неравенства (4) или тождества (3) соответственно). При этом все участвующие в оценке функции известны (в отличие от точных решений, которые в общем случае неизвестны).

Но при снятии ограничения (2) член $\mu_\phi^*(y^*)$ может перестать быть неотрицательным, и его уже не следует включать в меру отклонения. Чтобы получить неравенство, которое можно использовать в приложениях, данный член нужно оценить снизу. Например, это можно сделать так[3]:

---

[2] Если только обе части тождества не обращаются в нуль, что возможно только при $v \equiv u$ и $y^* \equiv p^*$. Но v и y^* рассматриваются как приближенные решения, которые мы выбираем и точность приближения которыми хотим оценить, поэтому выбор $u \equiv v$ и $p^* \equiv y^*$ означал бы фактически, что нам известны точные решения задачи (1) и сопряженной задачи.

[3] В конкретных приложениях может быть известна какая-то дополнительная информация о поведении точных решений, которая может помочь получить более точную оценку этого члена.

$$\mu^*_\phi(y^*) = \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_+(u-\phi)dx + \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_-(u-\phi)dx =$$
$$= \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_+(u-\phi)dx + \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_-(u-v)dx +$$
$$+ \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_-(v-\phi)dx \geq \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_+(u-\phi)dx +$$
$$+ \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_-(v-\phi)dx - \left\|(\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_-\right\|_{L_2} C_{\mathrm{F}}^2 \left\|\nabla\nabla(u-v)\right\|_{L_2} \geq$$
$$\geq \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_+(u-\phi)dx + \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_-(v-\phi)dx -$$
$$- \frac{C_{\mathrm{F}}^4}{2\beta}\left\|(f - \operatorname{div}\operatorname{Div} y^*)_+\right\|_{L_2}^2 - \frac{\beta}{2}\left\|\nabla\nabla(u-v)\right\|_{L_2}^2,$$

где $(a)_- = -(-a)_+ := \min\{a, 0\}$ и $\beta > 0$ — произвольная константа. Поэтому из теоремы 1' получаем следующее неравенство.

Теорема 2'. *Пусть $u \in K$ — решение задачи* (1) *и p^* — решение сопряженной задачи. Тогда для любых функций $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div}\operatorname{Div})$ и $v \in H_0^2(\Omega)$ и любого $\beta \in (0,1)$ справедливо неравенство*

$$\frac{1-\beta}{2}\left\|\nabla\nabla(u-v)\right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2}\left\|p^* - y^*\right\|_{L_2}^2 + \mu_\phi(v) + \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_+(u-\phi)dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\left\|\nabla\nabla v - y^*\right\|_{L_2}^2 + \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{Div} y^* - f)_+(v-\phi)dx + \frac{C_{\mathrm{F}}^4}{2\beta}\left\|(f - \operatorname{div}\operatorname{Div} y^*)_+\right\|_{L_2}^2. \tag{5}$$

Заметим, что здесь уже в левой части все члены неотрицательны (при условии $v \in K$) в отличие от неравенства (4) в теореме 2, где знак члена $\mu^*_\phi(y^*)$ априори неизвестен. При этом левая часть неравенства (5) заведомо не меньше левой части неравенства (4). Поэтому в качестве меры отклонения функций $v \in K$ и y^* от точных решений u и p^* соответственно более естественно рассматривать левую часть неравенства (5), нежели левую часть неравенства (4) из теоремы 2. Или же в качестве такой меры отклонения можно рассматривать только первые два члена в левой части неравенства (5). Тогда неравенство (5) немедленно дает оценку такой меры через известные функции (поскольку третий и четвертый члены в левой части (5) заведомо неотрицательны для $v \in K$).

Отметим также, что если выполнено условие (2), то последний член в (5) обращается в нуль и, устремляя β к нулю в (5), получаем тождество (3) (точнее, получаем неравенство, у которого обе части совпадают с соответствующими частями тождества (3)). Таким образом, можно сделать вывод, что чем меньше L_2-норма функции $(f - \operatorname{div}\operatorname{Div} y^*)_+$ (которая фактически показывает, насколько сильно нарушено условие (2)), тем более точную оценку отклонения дает неравенство (5) (при подходящем выборе β).

Автор выражает благодарность Андрею Геннадьевичу Куликовскому и рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апушкинская Д.Е., Репин С.И.* Бигармоническая задача с препятствием: гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближенных решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 11. С. 1881–1897.
2. *Caffarelli L.A., Friedman A.* The obstacle problem for the biharmonic operator // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 1979. V. 6. P. 151–184.
3. *Frehse J.* On the regularity of the solution of the biharmonic variational inequality // Manuscr. Math. 1973. V. 9. P. 91–103.
4. *Стейн И.М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
5. *Scherfgen D.* Integral calculator. https://www.integral-calculator.com.