ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 3, с. 355–379

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.86

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С НЕОДНОРОДНЫМ ДИСКОНТИРОВАНИЕМ

К. Ю. Борисов[1,2,*], М. А. Пахнин[1,2,]**

[1] *191187 Санкт-Петербург, Гагаринская ул., 6/1А, ЕУСПб, Россия*

[2] *190013 Санкт-Петербург, Серпуховская ул., 38, ИПРЭ РАН, Россия*

**E-mail: kirill@eu.spb.ru*

***E-mail: mpakhnin@eu.spb.ru*

Поступила в редакцию 08.08.2022 г.
Переработанный вариант 08.08.2022 г.
Принята к публикации 17.11.2022 г.

Предлагается обзор теоретических моделей экономического роста, в которых потребители различаются по своим субъективным коэффициентам дисконтирования. Описывается устройство равновесных траекторий в таких моделях, их динамика и сходимость к стационарным равновесиям, а также взаимосвязь с оптимальными по Парето траекториями. Обсуждаются модели с социально обусловленными коэффициентами дисконтирования, в которых межвременные предпочтения формируются эндогенно, а также рассматриваются основные трудности, связанные с общественным выбором в условиях неоднородных коэффициентов дисконтирования. Представленные в статье модели проливают свет на внутренние механизмы рыночной экономики, которые приводят к делению общества на богатых и бедных. Библ. 45.

Ключевые слова: экономический рост, неравенство, неоднородные агенты, дисконтирование, голосование, общее равновесие.

DOI: 10.31857/S0044466923030043, **EDN:** DYFCWG

1. ВВЕДЕНИЕ

Базовым инструментом для анализа долгосрочного экономического роста является модель Рамсея [1]. Изначально она была предложена как модель оптимального роста, в которой центральный планировщик решал задачу разделения дохода на потребление и инвестиции путем максимизации на бесконечном горизонте планирования целевой функции общества или, что то же, функции полезности так называемого репрезентативного потребителя. Модель Рамсея оказалась крайне удобной, поскольку допускала множество переформулировок и обобщений. Так, например, исходная модель была интерпретирована как модель общего равновесия [2], [3], в которой действуют две фундаментальные теоремы экономики благосостояния.

Ключевую роль в модели Рамсея играют межвременные предпочтения репрезентативного потребителя, которые показывают степень “нетерпеливости” общества. Межвременные предпочтения задаются с помощью коэффициента дисконтирования, который лежит в пределах между нулем и единицей. Равенство этого коэффициента нулю означает абсолютную нетерпеливость или “близорукость”, при которой будущее потребление не имеет никакой ценности для общества с точки зрения сегодняшнего дня. Напротив, равенство этого коэффициента единице означает абсолютную терпеливость, когда единица полезности от любого потребления в будущем так же важна, как и единица полезности от сегодняшнего потребления.

Использование репрезентативного потребителя в моделях макроэкономики и экономического роста оказывается очень удобным, поскольку существенно упрощает анализ. Тем не менее зачастую это упрощение наносит существенный вред исследованию, поскольку ведет к совершенно неадекватным выводам. Люди различаются по многим параметрам, но в контексте экономического роста ключевую роль играет их различие по степени своей нетерпеливости, которое при построении той или иной модели должно находить свое отражение в предположении о неоднородных коэффициентах дисконтирования агентов.

Еще в начале XIX века шотландский экономист Джон Рэй [4] выдвинул гипотезу о том, что богатство любого индивида связано с его желанием сберегать. По наблюдениям Рэя, члены общества, чье желание накапливать было ниже некоторого среднего показателя для данного общества, постепенно тяготели к бедности. И наоборот, люди с желанием накопления, которое было выше среднего, постепенно становились богаче. Тем самым, капитал перераспределялся от нетерпеливых потребителей к более терпеливым. Чуть позже, в начале двадцатого века, идеи Рэя были развиты Ирвингом Фишером [5].

Наконец, Фрэнк Рамсей в своей классической работе [1] рассмотрел модель с несколькими типами агентов, которые различались своими коэффициентами дисконтирования. Он предположил, что в стационарном равновесии весь капитал в экономике будет принадлежать самому терпеливому агенту. Уровень потребления самого терпеливого агента будет максимально возможным, а все остальные, относительно нетерпеливые агенты, будут потреблять лишь необходимый минимум. Таким образом, Рамсей на математическом языке сформулировал идею о том, что различие в межвременных предпочтениях агентов в экономике ведет к сильному неравенству в распределении дохода и богатства. Данное утверждение в литературе называется гипотезой Рэя—Фишера—Рамсея.

В современной литературе определенный интерес к моделям с неоднородным дисконтированием появился после работ Трута Рейдера [6], [7], Роберта Беккера [8] и Трумана Бьюли [9]. Работ, посвященных таким моделям, довольно много, однако мейнстримом они пока не стали. Настоящая статья является выборочным обзором моделей экономического роста с неоднородным дисконтированием. Мы делаем акцент на работах, связанных с гипотезой Рэя—Фишера—Рамсея, а также обсуждаем недавние результаты относительно агрегирования неоднородных межвременных предпочтений в таких моделях (см. также [10—12]).

Прежде чем переходить к описанию теоретических моделей, надо сказать несколько слов об эмпирических исследованиях нетерпеливости. Современные работы убедительно демонстрируют на практике, что разные люди и разные общества имеют разные коэффициенты дисконтирования. Так, субъективные коэффициенты дисконтирования сильно различаются между странами. Например, измеренный медианный коэффициент дисконтирования изменяется в пределах от 0.88 в Австралии до 0.39 в Боснии и Герцеговине (см. [13]). В то же время терпеливость сильнее различается внутри стран, чем между странами. В [14] показано, что межстрановые различия объясняют только 13.5% общей вариации в терпеливости, в то время как на внутристрановые различия приходятся оставшиеся 86.5%. Терпеливость людей положительно коррелирует с экономическими показателями. Она объясняет около 40% межстранового различия в доходах, а увеличение терпеливости на одно стандартное отклонение повышает доход на душу населения на величину от 43 до 78% (см. [15]). Таким образом, эмпирические данные свидетельствуют о том, что неоднородность в межвременных предпочтениях необходимо принимать во внимание в экономическом моделировании.

Структура дальнейшей работы такова. В разд. 2 описывается устройство моделей рамсеевского типа с неоднородным дисконтированием и определяется равновесие. Разд. 3 посвящен равновесной динамике и асимптотике равновесных траекторий, а разд. 4 обсуждает устройство оптимальных по Парето траекторий в таких моделях. В разд. 5 рассматривается модель, в которой субъективные коэффициенты дисконтирования являются не экзогенно заданными, а социально обусловленными. В разд. 6 описывается модель с общественным потреблением и затрагиваются вопросы общественного выбора и голосования. Разд. 7 содержит некоторые заключительные замечания.

2. МОДЕЛИ РАМСЕЕВСКОГО ТИПА С НЕОДНОРОДНЫМ ДИСКОНТИРОВАНИЕМ

В данном разделе мы описываем устройство моделей рамсеевского типа с неоднородным дисконтированием. В зависимости от предположений относительно задачи, которую решает потребитель, выделяются два типа моделей: модель Рамсея—Бьюли и модель Рамсея—Беккера. Мы вводим определение равновесия в обеих моделях и обсуждаем существование равновесных траекторий.

2.1. Общие предпосылки

Опишем основные строительные блоки моделей рамсеевского типа с неоднородным дисконтированием. Время дискретно ($t = 0,1,\ldots$). В экономике производится единственный товар, который в каждом периоде времени можно потреблять или инвестировать. Производственный сектор представлен одним репрезентативным производителем, а население состоит из $N > 1$ различных бесконечно живущих потребителей (агентов).

Технология репрезентативного производителя задается неоклассической положительно-однородной производственной функцией $F(K, L)$, заданной на $\mathbb{R}^2_+$. Здесь K – количество используемого капитала, а L – затраты труда. Далее мы будем пользоваться производственной функцией в интенсивной форме, которая определяется равенством

$$f(k) = F(k,1).$$

Если интерпретировать величину $k = K/L$ как капиталовооруженность труда, то $f(k) = F(K, L)/L$ представляет собой производительность труда (в зависимости от капиталовооруженности). Мы предполагаем, что каждый агент обладает одной единицей рабочей силы. Поэтому в предположении, что рабочая сила используется полностью ($L = N$), $k = K/N$ представляет собой капитал на душу населения, а $f(k) = F(K, N)/N$ – это выпуск товара на душу населения.

Мы предполагаем, что $f(k)$ обладает следующими стандартными свойствами:

$$f(0) = 0, \quad f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \quad \lim_{k\to 0} f'(k) = +\infty, \quad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

Кроме того, мы предполагаем, что капитал полностью выбывает в течение одного периода времени, а производственный сектор действует в условиях совершенной конкуренции и максимизирует прибыль. Тем самым, в состоянии равновесия ставка процента r определяется предельной производительностью капитала, а ставка заработной платы w – предельной производительностью труда:

$$1 + r = f'(k), \quad w = f(k) - f'(k)k.$$

Что касается потребителей, то предпочтения агента $i = 1,\dots, N$ описываются межвременной функцией полезности

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t u_i(c_t^i), \tag{2.1}$$

где c_t^i – потребление агента i в периоде t, β_i – его коэффициент дисконтирования, а $u_i(c)$ – мгновенная (краткосрочная) функция полезности, которая задана на $\mathbb{R}_+$, дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_{++}$ и, кроме того,

$$u_i'(c) > 0, \quad u_i''(c) < 0, \quad \lim_{c\to 0} u_i'(c) = +\infty, \quad \lim_{c\to\infty} u_i'(c) = 0.$$

Большинство результатов, которые мы описываем в этой статье, верны с небольшими модификациями и для случая, когда функции $u_i(c)$ для всех i заданы на $\mathbb{R}_{++}$ и удовлетворяют некоторым дополнительным предположениям, которым, в частности, удовлетворяют так называемые функции с постоянной эластичностью межвременного замещения вида

$$u(c) = \begin{cases} \dfrac{c^{1-\eta} - 1}{1 - \eta}, & 1 \neq \eta > 0; \\ \ln c, & \eta = 1. \end{cases}$$

Если все коэффициенты дисконтирования β_i одинаковы, то разница в поведении агентов незначительна, и модель по своим свойствам оказывается близкой к модели с репрезентативным потребителем. Далее мы будем считать, если в явном виде не оговорено иное, что агенты имеют различные коэффициенты дисконтирования и упорядочены по этим коэффициентам, причем первый агент является самым терпеливым:

$$1 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_N > 0. \tag{2.2}$$

2.2. Задача потребителя

Предположим, что в периоде времени t агент i получает доход в виде заработной платы w_t и, кроме того, в его распоряжении имеются накопления в размере $(1 + r_t)s_{t-1}^i$, где s_{t-1}^i — это сбережения, которые он сделал в периоде $t - 1$, а r_t — ставка процента в периоде t. В этом случае средства, которыми располагает агент i в периоде t, составляют сумму $(1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t$, которую он делит на текущее потребление c_t^i и сбережения s_t^i. Иными словами, бюджетное ограничение этого агента в рассматриваемом периоде имеет вид

$$c_t^i + s_t^i = (1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t. \tag{2.3}$$

Начальные сбережения в размере $s_{-1}^i = \hat{s}_{-1}^i$ заданы. Неотрицательные и ненулевые последовательности $\{1 + r_t\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$ принимаются агентом как заданные и известные (как обычно, нами предполагается совершенное предвидение цен со стороны экономических агентов).

Основное предположение о поведении потребителей состоит в том, что в периоде 0 каждый агент i решает задачу максимизации своей межвременной функции полезности (2.1) при бюджетных ограничениях (2.3), которые должны выполняться для всех $t = 0,1,\ldots$, а также некоторых дополнительных ограничениях, которые мы ниже обсудим.

Дело в том, что если допустить возможность неограниченно брать в долг, то задача потребителя окажется бессмысленной: в этом случае агент сможет обеспечить себе любой уровень потребления в любом периоде за счет займов, проценты по которым будут выплачены посредством еще больших займов в следующих периодах. Для того чтобы исключить возможность строительства таких финансовых пирамид и сформулировать содержательную задачу потребителя, можно поступить двумя способами, которые приводят к двум разным типам моделей.

Во-первых, можно позволить агентам брать в долг, т.е. допустить отрицательные сбережения, но добавить к задаче потребителя так называемое условие недопустимости строительства финансовых пирамид (No-Ponzi Game condition):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{s_t^i}{(1 + r_1)\cdots(1 + r_t)} \geq 0.$$

Это условие требует, чтобы приведенная к начальному периоду времени величина долга на бесконечности не оказалась положительной. При этом, что любопытно, сам долг может расти, но только темпом, меньшим, чем ставка процента. В этом случае задача потребителя для агента i принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t u_i(c_t^i), \\ \text{s.t.} \quad c_t^i + s_t^i = (1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t, \quad t = 0,1,\ldots, \quad s_{-1}^i = \hat{s}_{-1}^i, \\ \lim_{t\to\infty} \frac{s_t^i}{(1 + r_1)\cdots(1 + r_t)} \geq 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Этот способ восходит к Труману Бьюли [9], поэтому получающуюся в результате модель уместно называть *моделью Рамсея–Бьюли*.

Заметим, что с учетом условия No-Ponzi Game в задаче (2.4), последовательность бюджетных ограничений агента можно переписать в виде единого межвременного бюджетного ограничения на бесконечном горизонте:

$$c_0^i + \frac{c_1^i}{1 + r_1} + \ldots + \frac{c_t^i}{(1 + r_1)\cdots(1 + r_t)} + \ldots \leq (1 + r_0)\hat{s}_{-1}^i + w_0 + \frac{w_1}{1 + r_1} + \ldots + \frac{w_t}{(1 + r_1)\cdots(1 + r_t)} + \ldots.$$

Это неравенство означает, что приведенный к начальному периоду времени поток потреблений агента i не должен превосходить его совокупного дохода на протяжении всей жизни (также приведенного к периоду 0), состоящего из начальных сбережений и потока заработных плат.

Как видно, задача (2.4) является обыкновенной бесконечномерной задачей максимизации полезности на бюджетном ограничении. Для нее необходимыми условиями первого порядка являются равенства

$$\beta_i(1 + r_{t+1})u_i'(c_{t+1}^i) = u_i'(c_t^i), \tag{2.5}$$

которые должны выполняться в каждом периоде времени $t = 0,1,\ldots$.

Во-вторых, можно добавить к задаче потребителя условие неотрицательности сбережений в каждом периоде. Содержательно это означает отказ от условия полноты рынка капитала: агенты не могут брать в долг под свои будущие заработные платы. В этом случае задача потребителя для агента i имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t u_i(c_t^i), \\ \text{s.t.} \quad c_t^i + s_t^i = (1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t, \quad s_t^i \geq 0, \quad t = 0,1,\ldots, \quad s_{-1}^i = \hat{s}_{-1}^i. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Этот подход использовал Роберт Беккер [8], поэтому данную модель мы будем называть *моделью Рамсея–Беккера*.

Решение задачи (2.6) удовлетворяет условию отсутствия арбитража в каждом периоде:

$$\beta_i(1 + r_{t+1})u_i'(c_{t+1}^i) \leq u_i'(c_t^i) \quad (= \text{если } s_t^i > 0). \tag{2.7}$$

Действительно, пусть для данных цен факторов производства некоторая последовательность $\{c_t^i, s_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ максимизирует полезность агента i. Тогда полезность не может быть увеличена за счет увеличения сбережений на бесконечно малую величину в периоде t (однопериодного необратимого арбитража). Предельные издержки от этой операции (уменьшение потребления в периоде t на $u_i'(c_t^i)$) обязаны быть не ниже, чем предельная выгода (увеличение потребления в периоде $t+1$, $u_i'(c_{t+1}^i)$, за счет получения дополнительного дохода от сбережений по ставке процента $1 + r_{t+1}$), приведенная к периоду t (посредством коэффициента дисконтирования β_i). Если сбережения потребителя в периоде t положительны, то точно такое же рассуждение применимо и к уменьшению сбережений на бесконечно малую величину в период времени t. Тогда неравенство в условии (2.7) справедливо и в обратную сторону, так что условие максимизации полезности принимает вид уравнения Эйлера:

$$\beta_i(1 + r_{t+1})u_i'(c_{t+1}^i) = u_i'(c_t^i),$$

которое, как легко заметить, совпадает с условием (2.5).

Кроме того, решение задачи (2.6) должно удовлетворять условию трансверсальности, которое в данном случае имеет вид

$$\lim_{t\to\infty} \beta_i^t u_i'(c_t^i)s_t^i = 0. \tag{2.8}$$

Обсудим условие (2.8). Про задачу с бесконечным горизонтом планирования можно думать как о пределе задач с конечным горизонтом планирования. Очевидно, что решение задачи с конечным горизонтом планирования T удовлетворяет условию $s_T^i = 0$: так как периода $T+1$ не будет, сберегать в периоде T ничего не нужно. Оказывается, что в пределе при $T \to \infty$, условие $s_T^i = 0$ превращается в условие (2.8), которое содержательно означает, что полезность агента не может быть увеличена за счет приобретения дополнительной единицы капитала в периоде t и постоянного хранения этой единицы капитала (арбитража с открытым концом).

Отметим, что в случае с условием трансверсальности требуется проявлять некоторую осторожность. Хорошо известно, что условия (2.7), (2.8) являются достаточными условиями решения задачи потребителя (2.6). В то же время необходимость условия трансверсальности является открытым и сложным вопросом, который нужно для каждой модели проверять отдельно. В нашем случае, в [16] показано, что для рассматриваемой задачи условия (2.7), (2.8) являются также и необходимыми условиями.

2.3. Равновесные траектории

Когда в рамках моделей рамсеевского типа идет речь о конкурентном равновесии, предполагается, что агенты обладают совершенным предвидением ставок процента и заработных плат. Производственный сектор в каждом периоде времени решает задачу о максимизации прибыли и формирует спрос на капитал и рабочую силу. В потребительском секторе каждый агент решает задачу о максимизации своей межвременной функции полезности (2.1), определяя планируемые последовательности потребления и сбережений (предложения капитала). В модели Рамсея—Бьюли задача потребителя имеет вид (2.4), а в модели Рамсея—Беккера – вид (2.6). Это единственное различие между двумя моделями, однако, как мы увидим, оно играет существенную роль, поскольку две модели приводят к различным выводам. В равновесии в каждом периоде времени спрос на капитал равен предложению капитала, а спрос на рабочую силу совпадает с предложением рабочей силы. Формально говоря, равновесие определяется следующим образом.

Предположим, что к началу периода времени 0 каждый агент $i = 1,\dots,N$ обладает начальными сбережениями $\hat{s}_{-1}^i$. Суммарные начальные сбережения формируют начальный запас капитала: $N\hat{k}_0 = \sum_{i=1}^N \hat{s}_{-1}^i > 0$. *Равновесной траекторией* в модели Рамсея—Бьюли, исходящей из начального состояния $(\hat{s}_{-1}^i)_{i=1}^N$, называется последовательность

$$\{k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty,$$

которая характеризуется следующими условиями.

Условие 1. Для каждого i последовательность $\{c_t^{i*}, s_t^{i*}\}_{t=0}^\infty$ является решением задачи (2.4) при $1 + r_t = 1 + r_t^*$ и $w_t = w_t^*$, $t = 0,1,\dots$.

Условие 2. $1 + r_t^* = f'(k_t^*)$, $t = 0,1,\dots$.

Условие 3. $w_t^* = f(k_t^*) - f'(k_t^*)k_t^*$, $t = 0,1,\dots$.

Условие 4. $Nk_0^* = \sum_{i=1}^N \hat{s}_{-1}^i$, $Nk_{t+1}^* = \sum_{i=1}^N s_t^{i*}$, $t = 0,1,\dots$.

Равновесной траекторией в модели Рамсея—Беккера, исходящей из начального состояния $(\hat{s}_{-1}^i)_{i=1}^N$ (где $\hat{s}_{-1}^i \ge 0$ для всех i), называется последовательность $\{k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$, характеризующаяся следующим образом.

Условие 1'. Для каждого i последовательность $\{c_t^{i*}, s_t^{i*}\}_{t=0}^\infty$ является решением задачи (2.6) при $1 + r_t = 1 + r_t^*$ и $w_t = w_t^*$, $t = 0,1,\dots$, и условиями 2–4.

Заметим, что на равновесной траектории как в модели Рамсея—Бьюли, так и в модели Рамсея—Беккера, автоматически имеет место равновесие на рынке произведенного продукта:

$$\sum_{i=1}^N (c_t^{i*} + s_t^{i*}) = Nf(k_t^*),$$

что является следствием закона Вальраса.

2.4. Существование равновесных траекторий

Первый вопрос, на который надо отвечать после того как введено понятие равновесия, – это *вопрос о существовании равновесия*. Существует несколько различных способов доказывать теоремы существования в моделях общего экономического равновесия, но все они в конечном итоге сводятся к применению теорем о неподвижной точке. В конечномерном случае доказательство теоремы существования обычно не составляет особой проблемы.

Формально говоря, модели рамсеевского типа являются моделями с бесконечным числом товаров и поэтому они представляют собой бесконечномерные модели общего экономического равновесия. В бесконечномерном случае ситуация несколько сложнее, чем в конечномерном. Но и тут уже наработан достаточный опыт. При сделанных предположениях положительный ответ на вопрос о существовании равновесной траектории, исходящей из заданного начального состояния, для модели Рамсея—Бьюли можно дать, если наложить на начальные сбережения агентов некоторые разумные ограничения. Важно, чтобы сбережения не оказались “слишком” отрицательными, например, достаточно, чтобы они были положительными. Для доказательства теоремы существования в данном случае можно позаимствовать несложное рассуждение из [17].

Доказательство существования равновесных траекторий для модели Рамсея—Беккера является несколько более сложным, чем в случае модели Рамсея—Бьюли, но оно тоже опирается на теорему о неподвижной точке (см., например, [18]).

3. РАВНОВЕСНАЯ ДИНАМИКА

В данном разделе мы рассматриваем сходимость равновесных траекторий в моделях Рамсея—Бьюли и Рамсея—Беккера к соответствующим стационарным равновесиям, и обсуждаем взаимосвязь стационарных равновесий с гипотезой Рэя—Фишера—Рамсея.

3.1. Модель Рамсея с репрезентативным потребителем

Заметим, что когда агент только один, никакой разницы между моделью Рамсея—Бьюли и моделью Рамсея—Беккера нет. Обе модели сводятся к равновесной версии модели Рамсея с репрезентативным потребителем. Более того, при заданном начальном состоянии (в случае репрезентативного потребителя оно определяется начальными сбережениями $\hat{s}_{-1} > 0$, которые совпадают с начальным запасом капитала, $\hat{k}_0 = \hat{s}_{-1}$) равновесная траектория в такой модели по существу совпадает с оптимальной траекторией, т.е., с решением задачи:

$$\begin{gathered}\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t),\\ \text{s.t.}\ \ c_t + k_{t+1} = f(k_t), \quad t = 0,1,\ldots, \quad k_0 = \hat{k}_0,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где β — коэффициент дисконтирования репрезентативного потребителя, а $u(c)$ — его мгновенная функция полезности.

Таким образом, в модели Рамсея с репрезентативным потребителем вопрос об асимптотическом поведении равновесных траекторий сводится к вопросу о том, как ведут себя оптимальные траектории (решения задачи 3.1). Хорошо известно, что вне зависимости от начального состояния на оптимальной траектории $\{c_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$ капиталовооруженность k_t сходится при $t \to \infty$ к стационарному значению k^{β}, которое вместе с соответствующей ставкой процента r^{β} однозначно задается следующими соотношениями:

$$\frac{1}{1+r^{\beta}} = \beta, \quad 1 + r^{\beta} = f'(k^{\beta}).$$

Эти соотношения составляют суть так называемого *модифицированного золотого правила*, согласно которому стационарная равновесная ставка процента r^{β} полностью определяется коэффициентом дисконтирования репрезентативного потребителя, а стационарная равновесная капиталовооруженность, в свою очередь, определяется ставкой процента.

В дальнейшем под k^{β} мы всегда будем понимать капиталовооруженность, которая соответствует модифицированному золотому правилу с коэффициентом дисконтирования β.

3.2. Асимптотика равновесных траекторий в модели Рамсея—Бьюли

Естественно предположить, что и в рассматриваемых нами моделях равновесные траектории сходятся к стационарным равновесиям.

Стационарным равновесием в модели рамсеевского типа с неоднородным дисконтированием (как в модели Рамсея—Бьюли, так и в модели Рамсея—Беккера) называется набор $\{k^*, 1+r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$, такой что последовательность $\{k_t^*, 1+r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^{\infty}$, где для всех $t = 0,1,\ldots,$

$$k_t^* = k^*, \quad 1 + r_t^* = 1 + r^*, \quad w_t^* = w^*, \quad c_t^{i*} = c^{i*}, \quad s_t^{i*} = s^{i*}, \quad i = 1,\ldots,N,$$

является равновесной траекторией в этой модели, исходящей из начального состояния $(s^{i*})_{i=1}^N$.

Заметим, что в стационарном равновесии для любого агента i выполняется равенство

$$c^{i*} = r^* s^{i*} + w^*.$$

Оно говорит о том, что агент тратит на потребление весь процентный доход от своих сбережений, равный $r^*\, s^{i*}$, и всю свою заработную плату w^*. Тем самым, чем богаче агент, тем выше его уровень потребления (если, конечно, $r^* > 0$).

Несложно проверить, что в модели Рамсея–Бьюли существует стационарное равновесие $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$, которое однозначно задается следующими соотношениями:

$$k^* = k^{\beta_1}, \tag{3.2}$$

$$1 + r^* = f'(k^*) \quad \left(= \frac{1}{\beta_1}\right), \tag{3.3}$$

$$w^* = f(k^*) - f'(k^*)k^*, \tag{3.4}$$

$$s^{1*} = Nk^* + (N - 1)\frac{w^*}{r^*}, \tag{3.5}$$

$$r^*\, s^{i*} = -w^*, \quad i = 2,\ldots, N, \tag{3.6}$$

$$c^{1*} = N(f(k^*) - k^*), \tag{3.7}$$

$$c^{i*} = 0, \quad i = 2,\ldots, N. \tag{3.8}$$

Равенство (3.2) означает, что стационарная равновесная капиталовооруженность задается модифицированным золотым правилом, но только в данном случае k^* однозначно определяется коэффициентом дисконтирования самого терпеливого агента β_1. Соотношения (3.3), (3.4) показывают, что в стационарном равновесии цены совпадают с предельными продуктами факторов производства. Соотношения (3.5), (3.6) говорят о том, что в стационарном равновесии все агенты, за исключением самого терпеливого, имеют такие долги, что вся их заработная плата уходит на выплату процентов по их долгам. Держателем всех этих долгов является самый терпеливый агент, который одновременно является и собственником всего капитала. Соотношения (3.7), (3.8) означают, что в стационарном равновесии позволить себе положительный уровень потребления может только самый терпеливый агент; именно ему достается все потребление в экономике, тогда как все остальные агенты имеют нулевой уровень потребления.

Как видно, в стационарном равновесии, задаваемом соотношениями (3.2)–(3.8), множество всех агентов делится на два класса – "богатых" и "бедных", – причем к классу "богатых" принадлежит только самый терпеливый агент.

Является ли охарактеризованное выше стационарное равновесие единственным? Формально говоря, ответ на этот вопрос отрицательный. В модели Рамсея–Бьюли существуют и другие стационарные равновесия: для любого $m = 1,\ldots, N$ существует такое стационарное равновесие $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$, в котором только агент m имеет положительное потребление; это стационарное равновесие задается следующими соотношениями: $k^* = k^{\beta_m}$, $1 + r^* = f'(k^*)$, $w^* = f(k^*) - f'(k^*)k^*$, $s^{m*} = Nk^* + (N - 1)\dfrac{w^*}{r^*}$, $r^*\, s^{i*} = -w^*$, $i \neq m$, $c^{m*} = N(f(k^*) - k^*)$, $c^{i*} = 0$, $i \neq m$. Однако при $m \neq 1$ такое стационарное равновесие не представляет особого интереса для описания асимптотики равновесных траекторий.

Если начальное состояние $(\hat{s}_{-1}^i)_{i=1}^N$ таково, что сбережения всех агентов не очень малы (например, неотрицательны), то на равновесной траектории $\{k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$, исходящей из этого начального состояния, потребление всех агентов положительно во все периоды времени, а сама эта траектория сходится именно к стационарному равновесию, задаваемому соотношениями (3.2)–(3.8). Отметим, что равновесная траектория не сойдется к стационарному равновесию, задаваемому соотношениями (3.2)–(3.8), только в том случае, если на этой траектории потребление агента 1 с самого начала в точности равняется нулю, что возможно только в случае специально подобранных начальных сбережений.

Ключевым здесь является тот факт, что потребление всех агентов, за исключением агента 1, сходится к нулю. Это напрямую следует из условий первого порядка в задаче потребителя (2.4). Действительно, с учетом (2.5), если $c_t^{i*} > 0$ для всех i и t, то для $i \neq 1$ мы имеем

$$\frac{u_i'(c_{t+1}^{i*})}{u_1'(c_{t+1}^{1*})} = \frac{\beta_1}{\beta_i}\frac{u_i'(c_t^{i*})}{u_1'(c_t^{1*})}, \quad t = 0, 1, \ldots.$$

Поскольку, очевидно, последовательность $\{c_t^{1*}\}_{t=0}^{\infty}$ ограничена сверху и, значит, последовательность $\{u_1'(c_t^{1*})\}_{t=0}^{\infty}$ отделена от нуля, мы заключаем, что $c_t^{i*} \to 0$ при $t \to \infty$.

Если предположить, что для всех i мгновенные функции полезности $u_i(c)$ обладают тем свойством, что $u_i'(0) < +\infty$, то потребление всех агентов, за исключением самого терпеливого, не просто сойдется к нулю, а станет с некоторого периода времени в точности равным нулю.

Указанные свойства асимптотического поведения равновесных траекторий в модели Рамсея—Бьюли вызывают некоторые сомнения в дескриптивной значимости этой модели. Совершенно непонятно, почему агенты, потребление которых стремится с течением времени к нулю, будут продолжать осуществлять предложение на рынке труда.

3.3. Равновесная динамика в модели Рамсея—Беккера

Поскольку модель Рамсея—Бьюли не очень удовлетворительна с дескриптивной точки зрения, более широкое распространение получила модель Рамсея—Беккера (см. обзор [10]), которая, за счет невозможности заимствований, обеспечивает положительное потребление для каждого агента в каждом периоде.

В модели Рамсея—Беккера естественным кандидатом на роль стационарного равновесия является набор $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$, который однозначно задается соотношениями (3.2)—(3.4) вместе с соотношениями

$$s^{1*} = Nk^*,$$

$$s^{i*} = 0, \quad i = 2,\ldots,N,$$

$$c^{1*} = N(f(k^*) - k^*) - (N-1)w^* \left(= r^* Nk^* + w^*\right),$$

$$c^{i*} = w^*, \quad i = 2,\ldots,N.$$

В [8] показано, что этот набор действительно является стационарным равновесием в модели Рамсея—Беккера, и, более того, единственным стационарным равновесием. Как мы видим, в стационарном равновесии тоже происходит деление на “богатых” и “бедных”, но не в такой радикальной форме, как в модели Рамсея—Бьюли: в то время как весь капитал принадлежит “богатым” (наиболее терпеливому агенту), все остальные агенты все-таки не “умирают с голоду”, а проедают свою заработную плату, что как раз и соответствует гипотезе Рэя—Фишера—Рамсея.

Здесь следует указать, как устроены стационарные равновесия в модели Рамсея—Беккера в случае, когда самых терпеливых агентов несколько, т.е., если коэффициенты дисконтирования таковы, что $1 > \beta_1 = \ldots = \beta_M > \beta_{M+1} > \ldots > \beta_N > 0$, где $M > 1$. В этом случае множество стационарных равновесий представляет собой континуум, так как в стационарных равновесиях весь капитал, принадлежащий самым терпеливым агентам, может быть распределен между этими агентами произвольным образом. Формально, стационарным равновесием является любой набор $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$ такой, что $s^{i*} \geq 0$ и $c^{i*} \geq 0$ для всех i, а также выполняются соотношения (3.2)—(3.4) вместе с соотношениями

$$\sum_{i=1}^{M} s^{i*} = Nk^*,$$

$$s^{i*} = 0, \quad i = M+1,\dots,N,$$

$$\sum_{i=1}^{M} c^{i*} = N(f(k^*) - k^*) - (N-M)w^*,$$

$$c^{i*} = w^*, \quad i = M+1,\dots,N.$$

Заметим, что вполне возможна ситуация, когда сбережения одного из терпеливых агентов равны нулю. Тем самым, тот факт, что агент принадлежит к группе самых терпеливых агентов, не гарантирует ему принадлежность к классу “богатых”. Точнее, сам класс “богатых” в данном случае является менее четко выраженным. В то же время класс “бедных” выделяется достаточно четко. Все относительно нетерпеливые агенты с неизбежностью попадают именно в класс “бедных”.

Вернемся к случаю, в котором существует единственный самый терпеливый агент (выполнено условие (2.2)), и зададимся вопросом, сходятся ли равновесные траектории к стационарному равновесию в модели Рамсея–Беккера. Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо проследить эволюцию сбережений каждого из агентов на равновесных траекториях. Если сходимость имеет место, то в динамике либо все относительно нетерпеливые агенты должны перестать сберегать начиная с какого-то периода времени, либо их сбережения должны стремиться к нулю. Однако ключевым отличием модели Рамсея–Беккера от модели Рамсея–Бьюли является тот факт, что каждый агент в каждом периоде получает свою заработную плату. Даже если этот агент не делал сбережений в прошлом периоде, в текущем периоде у него все равно есть принципиальная возможность оставить положительные сбережения. Если в модели Рамсея–Бьюли картина довольна простая, поскольку необходимые условия для решения задачи потребителя имеют вид (2.5), то в модели Рамсея–Беккера необходимые условия имеют несколько более замысловатый вид (2.7), (2.8). Именно с этим связаны основные трудности при анализе равновесной динамики модели Рамсея–Беккера.

Наиболее общее свойство, которому удовлетворяет любая равновесная траектория в модели Рамсея–Беккера, – это свойство *повторяемости нулевых сбережений*: каждый агент, за исключением самого терпеливого, оказывается в положении с нулевыми сбережениями бесконечно часто. Более точно, имеет место следующий факт (см. [19]): на любой равновесной траектории $\{k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ в модели Рамсея–Беккера, для любого агента, за исключением самого терпеливого, положение с нулевыми сбережениями является повторяющимся, а именно, для каждого $i \neq 1$ существует подпоследовательность $\{t_m\}_{m=1}^\infty$, такая что $s_{t_m}^{i*} = 0$, $m = 1, 2, \dots$, и, кроме того, $\liminf_{t\to\infty} c_t^{i*} > 0$. Последнее неравенство говорит, что ни для какого агента потребление не может сходиться к нулю, что качественно отличает модель Рамсея–Беккера от модели Рамсея–Бьюли.

Из вышесказанного не следует, однако, что, однажды перестав сберегать на равновесной траектории, нетерпеливый агент останется навсегда в положении с нулевыми сбережениями. Можно указать два условия, которые гарантируют, что все агенты, за исключением самого терпеливого, с некоторого периода навсегда останутся в положении с нулевыми сбережениями. Во-первых, в [20] отмечено, что для того чтобы, начиная с некоторого периода времени, выполнялось равенство

$$s_t^{i*} = 0, \quad i = 2,\dots,N, \tag{3.9}$$

достаточно, чтобы β_i было существенно меньше, чем β_1 для всех $i \neq 1$. Во-вторых, в [19] доказано, что если существует $\lim_{t\to\infty} k_t^*$, то этот предел равен k^{β_1}, и для всех достаточно больших t выполняется (3.9).

Интересно отметить, что из того, что для всех достаточно больших t выполняется (3.9), не следует сходимость последовательности $\{k_t^*\}_{t=0}^\infty$. В [19] построен пример равновесной траектории в модели с двумя агентами, в котором нетерпеливый агент с самого начала ничего не сберегает (всем капиталом владеет только терпеливый агент), но при этом суммарный запас капитала не сходится к своему стационарному значению k^{β_1}, а осциллирует вокруг него с периодом 2.

Для того чтобы гарантировать сходимость равновесных траекторий к стационарному равновесию, достаточно наложить на производственную функцию следующее условие:

$$\frac{d}{dk}(f'(k)k) > 0, \quad k > 0. \tag{3.10}$$

Это условие означает, что совокупный доход капитала растет с ростом капиталовооруженности. Такое условие заведомо выполняется для неоклассических двухфакторных производственных функций $F(K, L)$ с эластичностью замещения между трудом и капиталом большей либо равной единице (в частности, это верно для производственной функции Кобба–Дугласа). В [19] показано, что при выполнении (3.10) любая равновесная траектория в модели Рамсея–Беккера сходится к стационарному равновесию. Как только что было отмечено, в этом случае для всех достаточно больших t выполняется (3.9).

Если же (3.10) не выполняется, то равновесная динамика в модели Рамсея–Беккера может быть устроена очень сложным образом. В частности, можно построить пример периодического равновесия, в котором для всех относительно нетерпеливых агентов как положение с нулевыми сбережениями, так и положение с положительными сбережениями является повторяющимся (см. [10]). Более того, могут существовать равновесия с циклами любого нечетного периода (см. [21]), а также хаотические равновесия (см. [22]).

Для полноты описания, заметим, что в модели с непрерывным временем равновесная динамика устроена гораздо проще и разительно отличается от динамики модели с дискретным временем. В [23] показано, что в модели Рамсея–Беккера с непрерывным временем существует единственное стационарное равновесие, которое является глобально асимптотически устойчивым, и на любой равновесной траектории, начиная с какого-то конечного периода времени, всем запасом капитала владеет самый терпеливый агент.

3.4. Модель Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования

В модели Рамсея–Беккера агентам в каждый конкретный период времени запрещено брать в долг. В модели Рамсея–Бьюли, напротив, займы ограничены довольно необременительным условием No-Ponzi Game. Вполне естественно задаться вопросом, что происходит в промежуточном случае. Этот вопрос рассматривается в [24], [25], где предложена модель, которую можно назвать моделью Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования. Потребители в этой модели могут брать в долг под свою будущую заработную плату, но этот долг должен быть таким, что его можно выплатить за фиксированный промежуток времени T.

Задача потребителя для агента i в модели Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования имеет вид

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t u_i(c_t^i),$$

$$\text{s.t.} \quad c_t^i + s_t^i = (1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t, \quad t = 0,1,\ldots, \quad s_{-1}^i = \hat{s}_{-1}^i,$$

$$s_t^i + \frac{w_{t+1}}{1 + r_{t+1}} + \ldots + \frac{w_{t+T}}{(1 + r_{t+1})\cdots(1 + r_{t+T})} \geq 0, \quad t = 0,1,\ldots,$$

где $T \geq 1$ – заданное число. Иначе говоря, сбережения агентов могут быть отрицательными в любом периоде t, но они ограничены снизу приведенной к периоду t суммой заработных плат в периоды $t + 1, t + 2, \ldots, t + T$.

Равновесные траектории и стационарные равновесия в такой модели можно ввести по аналогии с соответствующими определениями в обычной модели Рамсея–Беккера. Существование равновесия для $T = 1$ доказано в [24], а для $T \geq 2$ – в [25].

Кроме того, в [25] доказано, что в модели Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования единственное стационарное равновесие $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$ однозначным образом задается соотношениями (3.2)–(3.4) вместе с соотношениями

$$s^{1*} = Nk^* + (N - 1)\left(\frac{w^*}{1 + r^*} + \ldots + \frac{w^*}{(1 + r^*)^T}\right),$$

$$s^{i*} = -\left(\frac{w^*}{1+r^*} + \ldots + \frac{w^*}{(1+r^*)^T}\right), \quad i = 2,\ldots,N,$$

$$c^{1*} = N(f(k^*) - k^*) - (N-1)\left[w^* - r^*\left(\frac{w^*}{1+r^*} + \ldots + \frac{w^*}{(1+r^*)^T}\right)\right],$$

$$c^{i*} = w^* - r^*\left(\frac{w^*}{1+r^*} + \ldots + \frac{w^*}{(1+r^*)^T}\right), \quad i = 2,\ldots,N.$$

В стационарном равновесии долг всех относительно нетерпеливых агентов является максимально возможным (они занимают ровно столько, сколько позволено), а самый терпеливый агент, как и в модели Рамсея–Бьюли, владеет всем капиталом и долгами всех остальных агентов.

Заметим, что суммарный уровень потребления в стационарном равновесии не зависит от T и определяется, как обычно, модифицированным золотым правилом для самого терпеливого агента. Однако распределение потребления в обществе напрямую зависит от числа периодов, на которые позволено занимать. Чем сильнее ослаблены ограничения на заимствования, тем беднее оказываются относительно нетерпеливые агенты и тем меньше их уровень потребления. Легко проверить, что индекс Джини по неравенству в потреблении в стационарном состоянии в зависимости от T принимает наименьшее значение для модели Рамсея–Беккера (с полным запретом на заимствования) и монотонно увеличивается по T, достигая максимума в модели Рамсея–Бьюли (без ограничений на заимствования).

Этот результат вполне соответствует гипотезе Ирвинга Фишера [5] о том, что чем более развиты кредитные рынки и чем более рыночной является экономика, тем сильнее различия в терпеливости людей влияют на процесс перераспределения капитала в пользу более терпеливых потребителей, и тем выше уровень неравенства в обществе в долгосрочной перспективе.

Как устроена равновесная динамика в модели с ослабленными ограничениями на заимствования? Достаточно полный ответ на этот вопрос имеется для случая $T = 1$. В [24] доказано, что при $T = 1$ любая равновесная траектория в модели Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования сходится к стационарному равновесию. Важно подчеркнуть, что, в отличие от обычной модели Рамсея–Беккера, в данном случае для сходимости равновесных траекторий не нужно делать никаких специальных предположений об устройстве производственной функции, в частности не требуется выполнение условия (3.10).

Как отмечено в [26], случай $T = 1$ соответствует тому, что заработная плата выплачивается *ex ante* (до начала производственного периода), а не *ex post* (в конце производственного периода). Таким образом, модель Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования при $T = 1$ можно интерпретировать в духе классической политической экономии: заработная плата в такой модели представляет собой часть авансированного капитала.

Если же $T \geq 2$, то для сходимости равновесных траекторий необходимо, по-видимому, делать какие-то дополнительные предположения об устройстве модели. В [25] доказано, что если на равновесной траектории в модели Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования капиталовооруженность сходится к стационарному значению, то и сама равновесная траектория сходится. При этом все агенты, за исключением самого терпеливого, начиная с некоторого периода времени, будут находиться в положении с максимально возможным долгом. В то же время для случая $T = 2$ в [25] построен пример равновесной траектории в модели с двумя агентами, на которой нетерпеливый агент все время находится в положении с максимально возможным долгом, но при этом капиталовооруженность не сходится к своему стационарному значению k^{β_1}, а осциллирует вокруг него с периодом 2.

4. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО ПАРЕТО

Важный вопрос, который возникает при анализе любой модели общего экономического равновесия, – является ли равновесная траектория оптимальной по Парето? В данном разделе мы обсуждаем свойства оптимальных по Парето траекторий в моделях Рамсея–Бьюли и Рамсея–Беккера.

4.1. Устройство оптимальных по Парето траекторий

В рамках рассматриваемых нами моделей понятие оптимальности по Парето выглядит традиционно. Предположим, что начальная капиталовооруженность $\hat{k}_0 > 0$ задана. Последовательность $\{k_t, (c_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ называется *допустимой траекторией*, исходящей из начального состояния $\hat{k}_0$, если $k_0 = \hat{k}_0$ и для всех $t = 0,1,\ldots$ выполняются следующие соотношения:

$$0 \le k_{t+1} \le f(k_t), \quad 0 \le \sum_{i=1}^N c_t^i \le f(k_t) - k_{t+1}, \quad c_t^i \ge 0, \quad i = 1,\ldots,N.$$

Допустимая траектория $\{k_t, (c_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$, исходящая из $\hat{k}_0$, называется *оптимальной по Парето*, если не существует другой допустимой траектории $\{\tilde{k}_t, (\tilde{c}_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$, исходящей из того же начального состояния $\hat{k}_0$, такой что для всех $i = 1,\ldots,N$ выполняются неравенства

$$\sum_{t=0}^\infty \beta_i^t u_i(\tilde{c}_t^i) \ge \sum_{t=0}^\infty \beta_i^t u_i(c_t^i),$$

причем хотя бы для одного i это неравенство строгое.

Заметим сразу, что в определениях допустимой траектории и оптимальности по Парето не нужно уточнять, идет ли речь о модели Рамсея—Бьюли или о модели Рамсея—Беккера. Важно только то, что нам даны производственная функция и функции полезности всех потребителей. При этом, в отличие от определения равновесных траекторий, под начальным состоянием понимается только начальная капиталовооруженность, так как вести в данном контексте речь о (начальных) сбережениях не имеет никакого смысла.

Поскольку производственная функция в интенсивной форме и мгновенные функции полезности строго вогнуты, естественный способ поиска оптимальных по Парето траекторий состоит в максимизации "центральным планировщиком" функции общественного благосостояния, представляющей собой взвешенную сумму межвременных полезностей всех агентов с взвешивающими коэффициентами $\lambda_0^1 \ge 0,\ldots,\lambda_0^N \ge 0$ ($\sum_{i=1}^N \lambda_0^i = 1$) на множестве всех допустимых траекторий, т.е., в решении задачи вида

$$\begin{gathered} \max \sum_{i=1}^N \lambda_0^i \sum_{t=0}^\infty \beta_i^t u_i(c_t^i), \\ \text{s.t.} \ \sum_{i=1}^N c_t^i + k_{t+1} = f(k_t), \quad t = 0,1,\ldots, \quad k_0 = \hat{k}_0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Очевидно, что решение задачи (4.1) зависит от набора $(\lambda_0^i)_{i=1}^N$. При этом любую оптимальную по Парето траекторию в модели Рамсея с неоднородным дисконтированием можно получить как решение задачи (4.1) с соответствующим образом подобранными весами агентов.

В [27] доказано, что решение такой задачи существует и единственно, а также что если $\lambda_0^1 > 0$, то для решения $\{k_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ задачи (4.1) выполняются следующие предельные соотношения:

$$\lim_{t\to\infty} k_t^* = k^{\beta_1}, \quad \lim_{t\to\infty} c_t^{1*} = N(f(k^{\beta_1}) - k^{\beta_1}), \quad \lim_{t\to\infty} c_t^{i*} = 0, \quad i = 2,\ldots,N.$$

В любом случае оптимальная по Парето траектория обладает тем свойством, что потребление всех агентов, за исключением одного, сходится к нулю. Иными словами, в случае неоднородного дисконтирования на любой оптимальной по Парето траектории в долгосрочной перспективе все потребители за исключением одного счастливца (которым, скорее всего, окажется самый терпеливый агент) буквально "умирают с голоду".

В экономической теории оптимальность по Парето является центральным понятием. Считается, что как бы мы ни определили оптимальность, оптимальное состояние обязательно должно быть оптимальным по Парето. Однако в рассматриваемом нами случае оптимальность по Парето выглядит довольно удивительно и вряд ли может обладать нормативной привлекательностью.

Нетрудно проверить, что любая равновесная траектория в модели Рамсея—Бьюли является оптимальной по Парето. При этом взвешивающие коэффициенты $(\lambda_0^i)_{i=1}^N$, соответствующие этой траектории, при естественных предположениях все положительны. Коэффициент λ_0^i будет равняться нулю только в том случае, если потребление агента i равно нулю с самого начала.

Что касается модели Рамсея—Беккера, то в ней, как мы отмечали, на равновесных траекториях ни для какого агента потребление не сходится к нулю. Это означает, что равновесные траектории в модели Рамсея—Беккера не являются оптимальными по Парето. В то же время любая равновесная траектория в модели Рамсея—Беккера является *технологически эффективной* (см. [28]). Это более слабое свойство, чем оптимальность по Парето. Оно означает, что на равновесной траектории не происходит перенакопления капитала, и общество не может увеличить уровень своего суммарного потребления в каком-то периоде, не уменьшив его в другом периоде (вне зависимости от того, как это суммарное потребление распределено между разными агентами).

4.2. Взвешивающие коэффициенты

Вернемся к задаче “центрального планировщика” (4.1), предполагая что все взвешивающие коэффициенты положительны: $\lambda_0^i > 0, i = 1,\ldots,N$. Решение задачи (4.1) обладает свойством временнóй согласованности: если посмотреть на “хвост” этого решения, начинающийся с $t = 1$, то окажется, что он представляет собой решение “хвоста” исходной задачи. А именно, последовательность $\{k_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=1}^\infty$ является решением задачи

$$\begin{gathered} \max \sum_{i=1}^N \lambda_0^i \sum_{t=1}^\infty \beta_i^t u_i(c_t^i), \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^N c_t^i + k_{t+1} = f(k_t), \quad t = 1,2,\ldots, \quad k_1 = k_1^*. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Несложно заметить, что целевую функцию в задаче (4.2) с точностью до умножения на положительную константу можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_1^i \sum_{t=0}^\infty \beta_i^t u_i(c_{t+1}^i),$$

где

$$\lambda_1^1 = \frac{\beta_1 \lambda_0^1}{\sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_0^i}, \quad \ldots, \quad \lambda_1^N = \frac{\beta_N \lambda_0^N}{\sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_0^i}.$$

Таким образом, как и в задаче (4.1), в задаче (4.2) целевая функция представляет собой взвешенную сумму межвременных функций полезности отдельных потребителей с положительными коэффициентами $(\lambda_1^i)_{i=1}^N$, в сумме дающими единицу. При этом важно обратить внимание на тот факт, что взвешивающие коэффициенты не совпадают с коэффициентами в задаче (4.1). Более того, очевидно, что в периоде времени 1 по сравнению с периодом 0 взвешивающий коэффициент самого терпеливого агента увеличивается, а взвешивающий коэффициент самого нетерпеливого агента уменьшается: $\lambda_1^1 > \lambda_1^0$, $\lambda_N^1 < \lambda_N^0$. Если рассматривать целевые функции в задачах (4.1) и (4.2) как функции общественного благосостояния в периодах времени 0 и 1, то априорно не совсем понятно, почему эта функция должна меняться с течением времени в пользу самого терпеливого агента.

Если процедуру пересчета взвешивающих коэффициентов продолжить, то в каждый будущий период времени τ взвешивающие коэффициенты $(\lambda_\tau^i)_{i=1}^N$ будут задаваться следующим образом:

$$\lambda_\tau^1 = \frac{\beta_1^\tau \lambda_0^1}{\sum_{i=1}^N \beta_i^\tau \lambda_0^i}, \quad \ldots, \quad \lambda_\tau^N = \frac{\beta_N^\tau \lambda_0^N}{\sum_{i=1}^N \beta_i^\tau \lambda_0^i}.$$

Очевидно, что взвешивающий коэффициент самого терпеливого агента сходится к единице, а все остальные – к нулю:

$$\lim_{\tau\to\infty}\lambda_\tau^1 = 1, \quad \lim_{\tau\to\infty}\lambda_\tau^i = 0, \quad i = 2,\ldots,N.$$

Этот факт с еще одной стороны высвечивает ту роль, которую играет агент с наибольшим коэффициентом дисконтирования в моделях с неоднородным дисконтированием.

5. СОЦИАЛЬНО ОБУСЛОВЛЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

До сих пор коэффициенты дисконтирования агентов предполагались постоянными и экзогенно заданными. В то же время есть все основания считать, что эти коэффициенты являются социально обусловленными, т.е. эндогенными с точки зрения модели в целом. В данном разделе мы описываем модель рамсеевского типа, в которой коэффициенты дисконтирования агентов формируются эндогенно и определяются их относительным богатством. Мы предполагаем, что богатые более терпеливы, чем бедные, поскольку это согласуется со здравым смыслом и эмпирическими данными. Такое предположение сделано в работах [29], [30] в рамках AK-модели, которая отличается от модели Рамсея (AK-модель является моделью эндогенного роста), однако все утверждения, приводимые в данном разделе, можно доказать с помощью рассуждений, которые почти дословно повторяют рассуждения из работ [29], [30].

5.1. Стационарные равновесия

Предположим, что коэффициент дисконтирования β каждого агента в текущем периоде задается равенством

$$\beta = \phi\left(\frac{z}{y}\right), \tag{5.1}$$

где $\phi : \mathbb{R}_+ \to (0,1)$ – непрерывная и монотонно возрастающая функция, z – богатство, которым располагает агент в рассматриваемом периоде времени, а y – средняя величина располагаемого богатства в экономике.

Предположим, что неотрицательные сбережения агентов $(s^i)_{i=1}^N$ (где $s^i \geq 0$ для всех i) в какой-то период времени заданы. В этом случае капиталовооруженность равна $k = \dfrac{\sum_{i=1}^N s^i}{N}$, а ставка процента r и ставка заработной платы w определяются как $1 + r = f'(k)$, $w = f(k) - f'(k)k$. В этой ситуации располагаемое богатство потребителя i равно $(1 + r)s^i + w$, тогда как среднее располагаемое богатство представляет собой величину

$$\frac{\sum_{i=1}^N ((1+r)s^i + w)}{N} = f(k).$$

Тем самым, можно определить коэффициент дисконтирования β_i потребителя i, который оказывается равен

$$\beta_i = \phi\left(\frac{(1+r)s^i + w}{f(k)}\right).$$

Сделанное предположение означает, что коэффициент дисконтирования агента является возрастающей функцией не абсолютного, а относительного уровня его богатства. Следует подчеркнуть, что функция $\phi(\cdot)$ одинакова для всех агентов. Тем самым, модель с социально обусловленными коэффициентами дисконтирования качественно отличается от моделей с экзогенно заданными коэффициентами дисконтирования: в данной модели все агенты абсолютно идентичны по своим экзогенным характеристикам.

В отличие от модели с экзогенно заданными коэффициентами дисконтирования, прежде чем давать определение равновесной траектории, удобно определить стационарные равновесия.

Набор $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$ называется *стационарным равновесием* в модели с социально обусловленными коэффициентами дисконтирования, если он является стационарным равновесием в модели Рамсея—Беккера с коэффициентами дисконтирования $(\beta_i)_{i=1}^N$, задаваемыми равенствами

$$\beta_i = \phi\left(\frac{(1 + r^*)s^{i*} + w^*}{f(k^*)}\right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Следует подчеркнуть, что здесь не предполагается упорядочивание коэффициентов дисконтирования по убыванию, как это делалось при описании модели Рамсея—Беккера.

Как устроено множество стационарных равновесий в данной модели? В отличие от модели Рамсея—Беккера, где агент с наибольшим коэффициентом дисконтирования с самого начала является главным претендентом на то, чтобы оказаться владельцем всего капитала, в данном случае все агенты равноправны — каждый из них в стационарном состоянии может оказаться или не оказаться владельцем капитала. Более точно, для любого непустого подмножества I множества агентов существует такое стационарное равновесие $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$, что

$$s^{i*} = \frac{Nk^*}{|I|}, \quad i \in I,$$

$$s^{i*} = 0, \quad i \notin I,$$

$$c^{i*} = r^* \frac{Nk^*}{|I|} + w^*, \quad i \in I,$$

$$c^{i*} = w^*, \quad i \notin I,$$

где $|I|$ — число элементов множества I. Никаких других стационарных равновесий в модели не существует.

Таким образом, в каждом стационарном равновесии множество всех агентов делится на две группы, которые можно условно назвать “богатые” и “бедные”, причем внутри каждой из двух групп агенты находятся в абсолютно одинаковом положении. Первые владеют всем капиталом ($\sum_{i \in I} s^{i*} = Nk^*$), а сбережения вторых равны нулю, и они проедают всю свою заработную плату. Отметим, что деление множества всех агентов на “богатых” и “бедных” в стационарном равновесии может быть любым, за исключением случая, когда множество “богатых” пусто.

В стационарном равновесии коэффициент дисконтирования “богатых” агентов равен

$$\beta = \phi\left(\frac{(1 + r^*)\frac{N}{|I|}k^* + w^*}{f(k^*)}\right) = \phi\left(1 + \frac{N - |I|}{|I|}\frac{k^*}{f(k^*)}\right).$$

В то же время устройство стационарного равновесия в модели Рамсея—Беккера таково, что именно этот коэффициент дисконтирования определяет равновесную капиталовооруженность k^* посредством равенства $\beta = 1/f'(k^*)$. Отсюда вытекает, что при заданном числе “богатых” $|I|$ равновесная капиталовооруженность k^* определяется как решение уравнения

$$\phi\left(1 + \frac{N - |I|}{|I|}\frac{k}{f(k)}\right) = \frac{1}{f'(k)}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим функции $L(k) = \phi\left(1 + \frac{N - |I|}{|I|}\frac{k}{f(k)}\right)$ и $R(k) = 1/f'(k)$. Из свойств производственной функции вытекает, что $R(k)$ растет с ростом k, причем $R(0) = 0$ и $R(k) \to +\infty$ при $k \to \infty$. Для каждого фиксированного $|I|$, $L(k)$ растет с ростом k, причем $L(0) = \phi(1) > 0$ и $\lim_{k\to\infty} L(k) < 1$. Таким образом, при каждом $|I|$, уравнение (5.2) обязательно имеет решение $k^* > 0$, причем в точке решения $L'(k^*) < R'(k^*)$.

Хотелось бы, чтобы при заданном числе "богатых" $|I|$ стационарное равновесие k^* было единственным. Для этого нужны дополнительные условия, но, скорее всего, не очень обременительные. Например, если производственная функция в интенсивной форме является функцией Кобба–Дугласа ($f(k) = ak^{\alpha}$, $a > 0$, $0 < \alpha < 1$), то для существования единственного решения уравнения (5.2) достаточно, чтобы функция $\phi(\cdot)$ была вогнутой, что вполне согласуется со здравым смыслом.

Таким образом, при некоторых разумных дополнительных условиях, уравнение (5.2) имеет единственное решение k^*. Заметим также, что $L(k)$ при каждом фиксированном k убывает с ростом $|I|$. Отсюда следует, что чем больше $|I|$, тем меньше k^*. Таким образом, чем больше число "богатых" в стационарном равновесии, тем меньше стационарная капиталовооруженность. Действительно, если "богатых" много, то капитал равномерно распределяется между бóльшим количеством "богатых", и на каждого из них приходится меньшее количество капитала. Поэтому относительный уровень богатства каждого из них ниже, чем при меньшем числе "богатых", а значит ниже и коэффициент дисконтирования. А именно этот коэффициент дисконтирования и определяет стационарную капиталовооруженность.

Легко заметить, что с ростом числа "богатых" в стационарном равновесии уменьшается уровень неравенства по богатству и доходам, измеряемый, например, с помощью индекса Джини. Действительно, если всем капиталом владеет один агент, то неравенство очень велико, а если капитал распределен равномерно между всеми, то неравенство отсутствует. Отсюда следует, что в рамках наших предположений капиталовооруженность и выпуск в стационарных равновесиях увеличиваются с ростом неравенства. Однако сделанные предположения не учитывают тот факт, что коэффициенты дисконтирования потребителей отражают не только степень их индивидуальной нетерпеливости, но их горизонт планирования, который зависит, среди прочего, от уровня социальной напряженности в обществе. В свою очередь, социальная напряженность в значительной степени определяется уровнем неравенства в распределении богатства и доходов.

Для того чтобы учесть эту зависимость, следует слегка скорректировать предположение о формировании коэффициентов дисконтирования и заменить (5.1) на следующее выражение:

$$\beta = (1 - p(G))\phi\left(\frac{z}{y}\right), \tag{5.3}$$

где G – индекс неравенства в распределении богатства, а $p(G)$ – фактор понижения коэффициента дисконтирования в зависимости от уровня неравенства. Его можно интерпретировать как вероятность того, что в течение ближайшего промежутка времени произойдут серьезные социальные потрясения, ведущие к серьезной перестройке экономической жизни. Естественно считать, что функция $p(G)$ монотонно возрастает с ростом G, причем сначала медленно, а затем, начиная с какого-то критического значения неравенства, быстро увеличивается вплоть до единицы. В этом случае зависимость капиталовооруженности k^* и выпуска $f(k^*)$ от неравенства в стационарном равновесии будет иметь перевернутую U-образную форму: при малых значениях неравенства его увеличение приведет к росту капиталовооруженности и выпуска, а при значительных – к падению (см. также [31]).

5.2. Скользящие равновесные траектории

Как мы видели, в стационарном равновесии в модели с социально обусловленными коэффициентами дисконтирования агенты делятся на "богатых" и "бедных". Возникает естественный вопрос о том, как экономика придет и придет ли вообще в это стационарное равновесие. Можно предположить, что многое зависит от начального состояния, точнее, от начального распределения богатства.

Для того чтобы попытаться ответить на поставленный вопрос, нужно в первую очередь определить, что такое равновесная траектория. Один из возможных подходов к этому определению рассматривается в [29], где предложено понятие *скользящей равновесной траектории*.

Идея скользящего равновесия применительно к рассматриваемой модели состоит в следующем. Предположим, что изначально экономика находится в состоянии, где сбережения агентов задаются неотрицательным вектором $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$. Потребители строят свои коэффициенты дисконтирования по следующему правилу:

$$\beta_i = (1 - p(G_0))\phi\left(\frac{(1+r_0)s_{-1}^i + w_0}{f(k_0)}\right), \quad i = 1,\ldots,N, \tag{5.4}$$

где

$$Nk_0 = \sum_{i=1}^N s_{-1}^i, \quad 1 + r_0 = f'(k_0), \quad w_0 = f(k_0) - f'(k_0)k_0,$$

а G_0 – соответствующий вектору $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$ индекс неравенства в распределении богатства. При коэффициентах дисконтирования, построенных по правилу (5.4), строится равновесная траектория модели Рамсея–Беккера, исходящая из начального состояния $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$, и первый шаг этой траектории реализуется.

В результате экономика попадает в новое состояние, где сбережения агентов задаются некоторым неотрицательным вектором $(s_0^i)_{i=1}^N$. Коэффициенты дисконтирования пересчитываются по правилу:

$$\beta_i = (1 - p(G_1))\phi\left(\frac{(1+r_1)s_0^i + w_1}{f(k_1)}\right), \quad i = 1,\ldots,N, \tag{5.5}$$

где

$$Nk_1 = \sum_{i=1}^N s_0^i, \quad 1 + r_1 = f'(k_1), \quad w_1 = f(k_1) - f'(k_1)k_1,$$

а G_1 – соответствующий вектору $(s_0^i)_{i=1}^N$ индекс неравенства в распределении богатства. И снова строится равновесная траектория модели Рамсея–Беккера, только на этот раз используются коэффициенты дисконтирования, построенные по правилу (5.5), а исходит она из начального состояния $(s_0^i)_{i=1}^N$. После того как первый шаг этой траектории реализуется, экономика попадает в состояние, где сбережения агентов задаются неотрицательным вектором $(s_1^i)_{i=1}^N$.

Продолжив эту процедуру до бесконечности, мы получим последовательность $\{k_t, 1 + r_t, w_t, (c_t^i)_{i=1}^N, (s_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$, которая называется *скользящей равновесной траекторией*, исходящей из начального состояния $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$.

Предположим для простоты, что агенты упорядочены по убыванию начальных сбережений, а сбережения самых состоятельных M агентов абсолютно одинаковы:

$$s_{-1}^1 = s_{-1}^2 = \ldots = s_{-1}^M > s_{-1}^{M+1} \geq s_{-1}^{M+2} \geq \ldots \geq s_{-1}^N. \tag{5.6}$$

Рассмотрим скользящую равновесную траекторию $\{k_t, 1 + r_t, w_t, (c_t^i)_{i=1}^N, (s_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$, исходящую из начального состояния $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$, и попытаемся понять, какова будет динамика сбережений различных агентов. Можно предположить, что эта динамика будет подчиняться следующей логике событий.

Если изначально агент i принадлежит к группе самых состоятельных ($i \leq M$), то он окажется в группе самых терпеливых и его коэффициент дисконтирования будет выше, чем у менее состоятельного агента $j > M$. Поэтому и сбережения агента i в периоде $t = 0$ окажутся выше, чем у агента j, причем разрыв в уровне сбережений увеличится так, что $s_0^i/s_0^j > s_{-1}^i/s_{-1}^j$. Поэтому относительный уровень богатства агента i вырастет, т.е. будет выполняться неравенство

$$\left(\frac{(1+r_1)s_0^i + w_1}{f(k_1)}\right) > \left(\frac{(1+r_0)s_{-1}^i + w_0}{f(k_0)}\right).$$

В результате коэффициент дисконтирования агента i вырастет по сравнению с коэффициентом дисконтирования агента j (заметим, что в абсолютном выражении коэффициент дисконтирования может и упасть, что возможно, если увеличится индекс неравенства). На следующем шаге история повторится, и в долгосрочной перспективе скользящая равновесная траектория сойдется к стационарному равновесию, в котором класс “богатых” будет состоять только из тех, кто принадлежал в самом начале к группе самых состоятельных. А все те, кто изначально был хоть чуть менее состоятелен, окажутся в классе “бедных”.

При некоторых предположениях проведенное рассуждение оказывается верным. А именно, если коэффициенты дисконтирования не зависят от неравенства ($p(G) = \mathrm{const}$), производственная функция является функцией Кобба–Дугласа, а мгновенные функции полезности – логарифмическими ($u_i(c) = \ln c$, $i = 1,\ldots,N$), то на любой скользящей равновесной траектории $\{k_t, 1 + r_t, w_t, (c_t^i)_{i=1}^N, (s_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$, исходящей из начального состояния $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$, удовлетворяющего (5.6), начиная с некоторого периода времени сбережения всех агентов, за исключением первых M, равны нулю, и траектория сходится к стационарному равновесию, в котором класс “богатых” состоит из первых M агентов, а класс “бедных” – из всех остальных.

По-видимому, требование $p(G) = \mathrm{const}$ здесь не является существенным и его можно значительно ослабить. Что касается предположений об устройстве производственной функции и функций полезности, то, скорее всего, без каких-нибудь специальных предположений обойтись вряд ли возможно.

5.3. Равновесные траектории

Отличительная особенность скользящих равновесных траекторий состоит в том, что в каждом периоде времени агенты строят равновесные траектории в модели Рамсея–Беккера и делают один шаг, не учитывая того, что на следующем шаге они изменят свои коэффициенты дисконтирования. С точки зрения современной экономической теории такая ситуация интерпретируется как признак неполной рациональности агентов. Поэтому интересно понять, что получится, если агенты способны принимать во внимание изменение своего относительного уровня богатства с течением времени и изменение своих коэффициентов дисконтирования. Правда, приписывать экономическим агентам столь высокий уровень рациональности не представляется реалистичным.

Предположим, что агент i в периоде времени 0 знает, что одна единица полезности, полученная в периоде 1, равноценна для него $\beta_{i,1}$ единиц полезности, полученных в периоде 0; одна единица полезности, полученная в периоде 2, равноценна для него $\beta_{i,2}$ единиц полезности, полученных в периоде 1; и так далее. В этом случае межвременная функция полезности агента i задается как

$$u_i(c_0^i) + \beta_{i,1}u_i(c_1^i) + \beta_{i,2}\beta_{i,1}u_i(c_2^i) + \ldots,$$

а задача потребителя принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}\max u_i(c_0^i) + \beta_{i,1}u_i(c_1^i) + \beta_{i,2}\beta_{i,1}u_i(c_2^i) + \ldots,\\ \text{s.t.}\quad c_t^i + s_t^i = (1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t, \quad s_t^i \geq 0, \quad t = 0,1,\ldots, \quad s_{-1}^i = \hat{s}_{-1}^i.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Соответственно, *равновесной траекторией* в модели с социально обусловленными коэффициентами дисконтирования, исходящей из начального состояния $(\hat{s}_{-1}^i)_{i=1}^N$ (где $\hat{s}_{-1}^i \geq 0$ для всех i), естественно назвать последовательность $\{(\beta_{i,t+1}^*)_{i=1}^N, k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$, которая характеризуется следующим образом.

Условие 1''. Для каждого i последовательность $\{c_t^{i*}, s_t^{i*}\}_{t=0}^\infty$ является решением задачи (5.7) при

$$1 + r_t = 1 + r_t^*, \quad w_t = w_t^*,$$
$$\beta_{i,t+1}^* = (1 - p(G_t^*))\phi\left(\frac{(1 + r_t^*)s_{t-1}^{i*} + w_t^*}{f(k_t^*)}\right), \quad t = 0,1,\ldots,$$

где G_t^* – значение индекса неравенства в периоде t, и условиями 2–4.

Можно доказать, что равновесные траектории существуют. Кроме того, легко заметить, что стационарные равновесия в случае скользящих равновесных траекторий и равновесных траекторий суть одно и то же. Что касается равновесной динамики, то в данном случае авторам про нее практически ничего не известно, хотя естественно предполагать, что при каких-то дополнительных условиях должен работать тот же механизм деления общества на “богатых” и “бедных”, что и в случае скользящих равновесных траекторий.

6. ОБЩЕСТВЕННЫЙ ВЫБОР И ГОЛОСОВАНИЕ

До сих пор мы рассматривали рыночное равновесие в моделях, где потребление агентов было частным. Однако множество важных экономических задач связано с общественным потреблением. Например, качество окружающей среды является глобальным общественным благом, поэтому для принятия решений о борьбе с глобальным изменением климата необходимо агрегировать неоднородные предпочтения всех членов общества. Вопрос о том, какова оптимальная экономическая политика с точки зрения неоднородного общества, находится на стыке теории экономического роста и теории общественного выбора. В данном разделе мы описываем основные трудности, связанные с общественным выбором в моделях с неоднородным дисконтированием, и намечаем пути их преодоления (см. также [32]).

6.1. Отсутствие победителя по Кондорсе

Вопросы коллективного принятия межвременных решений естественно рассматривать в рамках модели рамсеевского типа с общественным потреблением. Предположим, что агенты потребляют единственный товар совместно или делят выпуск поровну. В этом случае потребление можно рассматривать как количество добытого исчерпаемого или возобновляемого природного ресурса (общественного блага). Пусть k_t — это запас ресурса на начало периода t, а $f(k_t)$ — запас ресурса, доступный к концу периода t, с учетом процессов регенерации. В этот момент потребители должны решить, какое количество ресурса извлечь и потребить. Тогда динамику изменения запаса ресурса можно записать в стандартном виде $c_t + k_{t+1} = f(k_t)$. Если ресурс исчерпаемый, то $f(k) = k$. Если ресурс возобновляемый, то можно считать, что $f(k)$ удовлетворяет тем же свойствам, что и неоклассическая производственная функция в интенсивной форме. Начальный запас ресурса $\hat{k}_0 > 0$ задан.

Предпочтения агента i описываются межвременной функцией полезности $\sum_{t=0}^{\infty}\beta_i^t u_i(c_t)$, где, как и выше, β_i — коэффициент дисконтирования агента i, но теперь аргументом мгновенной функции полезности $u_i(c)$ выступает общее для всех агентов потребление. У каждого агента i имеется своя оптимальная траектория общественного потребления (отвечающая коэффициенту дисконтирования β_i), представляющая собой решение задачи (3.1) при $\beta = \beta_i$ и $u(c) = u_i(c)$. Поскольку агенты различаются своими коэффициентами дисконтирования, все эти оптимальные траектории разные. Какую траекторию выберет общество, состоящее из неоднородных агентов?

Предположим, что агенты выбирают траекторию общественного потребления путем голосования. Естественно считать, что результат голосования неоднородных агентов будет совпадать с оптимальной траекторией для медианного агента. Трудность, однако, в том, что голосование за оптимальную траекторию является бесконечномерным, поскольку голосовать нужно за бесконечную последовательность потреблений. Хорошо известно, что в общем случае победителя по Кондорсе в многомерном голосовании не существует, причем это верно, даже если агенты неоднородны только по одному параметру, например, коэффициенту дисконтирования (см., в частности, [33], [34]).

Кроме того, в [35] доказано утверждение, напоминающее теорему Эрроу о невозможности: если множество альтернатив является достаточно большим, то любое правило голосования, отличное от диктатуры (в частности, голосование большинством и взвешенным квалифицированным большинством), не может быть транзитивным. Это утверждение означает, что предпочтения любого отдельного агента (например, медианного) не могут определять равновесный исход голосования, так как в этом случае итоговое правило окажется транзитивным. Таким образом, до недавнего времени в литературе доминировала точка зрения, что голосование в моделях с неоднородным дисконтированием в принципе не может привести к однозначному результату.

Проиллюстрируем отсутствие транзитивности и победителя по Кондорсе на примере простой трехпериодной модели с тремя агентами. Предположим, что $f(k) = k$, а $u_i(c) = \ln c$ для всех $i = 1,2,3$, так что полезность агента i имеет вид $U^i = \ln c_0 + \beta_i \ln c_1 + \beta_i^2 \ln c_2$. Агенты различаются только своими коэффициентами дисконтирования, а условие (2.2) имеет вид $1 > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 0$, так что агент 2 обладает медианным коэффициентом дисконтирования.

Каждый агент i имеет свою оптимальную траекторию общественного потребления, $\mathbf{C}^{i*} = \{c_0^{i*}, c_1^{i*}, c_2^{i*}\}$, которая представляет собой решение задачи

$$\max \ln c_0 + \beta_i \ln c_1 + \beta_i^2 \ln c_2, \quad \text{s.t.} \;\; c_0 + c_1 + c_2 = \hat{k}_0. \tag{6.1}$$

Легко проверить, что в этом случае

$$c_0^{i*} = \frac{\hat{k}_0}{1 + \beta_i + \beta_i^2}, \quad c_1^{i*} = \frac{\beta_i \hat{k}_0}{1 + \beta_i + \beta_i^2}, \quad c_2^{i*} = \frac{\beta_i^2 \hat{k}_0}{1 + \beta_i + \beta_i^2}.$$

В начальном периоде 0 агенты голосуют по поводу траектории общественного потребления. Множество допустимых траекторий (альтернатив) имеет вид $\mathscr{C} = \{(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^3 \,|\, c_0 + c_1 + c_2 = \hat{k}_0\}$. Покажем прежде всего, что если победитель по Кондорсе существует, то он совпадает с оптимальной траекторией для агента 2 с медианным коэффициентом дисконтирования. Действительно, предположим противное, – победитель по Кондорсе – это некоторая траектория $\mathbf{C}^* = \{c_0^*, c_1^*, c_2^*\} \in \mathscr{C}$, которая не совпадает с $\mathbf{C}^{2*}$. Тогда либо $c_1^* \neq \beta_2 c_0^*$, либо $c_2^* \neq \beta_2 c_1^*$. Предположим для определенности, что $c_1^* > \beta_2 c_0^*$ (все остальные случаи можно рассмотреть аналогично). В этом случае также $c_1^* > \beta_3 c_0^*$.

Рассмотрим скалярное произведение ∇U^i в точке (c_0^*, c_1^*, c_2^*) на вектор $z = (1, -1, 0)$:

$$\nabla U^i(c_0^*, c_1^*, c_2^*) \cdot z = \left(\frac{1}{c_0^*}, \frac{\beta_i}{c_1^*}, \frac{\beta_i^2}{c_2^*}\right) \cdot (1, -1, 0) = \frac{1}{c_0^*} - \frac{\beta_i}{c_1^*} = \frac{c_1^* - \beta_i c_0^*}{c_0^* c_1^*}.$$

Очевидно, что это произведение положительно для $i = 2$ и $i = 3$. Таким образом, для достаточно маленького возмущения (c_0^*, c_1^*, c_2^*) в направлении z (чуть больше потребления в периоде 0 и чуть меньше потребления в периоде 1), найдется траектория $\mathbf{C}' \in \mathscr{C}$, которую агенты 2 и 3 предпочтут перед $\mathbf{C}^*$. Таким образом, $\mathbf{C}^*$ не является победителем по Кондорсе. Это означает, что победитель по Кондорсе (если он существует) совпадает с $\mathbf{C}^{2*}$, оптимальной траекторией для агента 2.

Покажем теперь, что $\mathbf{C}^{2*}$ не является победителем по Кондорсе. Рассмотрим скалярное произведение ∇U^i в точке $(c_0^{2*}, c_1^{2*}, c_2^{2*})$ на вектор $z = (1, -2, 1)$:

$$\nabla U^i(c_0^{2*}, c_1^{2*}, c_2^{2*}) \cdot z = \left(1 - 2\frac{\beta_i}{\beta_2} + \frac{\beta_i^2}{\beta_2^2}\right)\frac{1 + \beta_2 + \beta_2^2}{k_0} = \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_2}\right)^2 \frac{1 + \beta_2 + \beta_2^2}{k_0}.$$

Это произведение положительно для $i = 1$ и $i = 3$. Таким образом, для достаточно маленького возмущения (c_0^*, c_1^*, c_2^*) в направлении z (чуть больше потребления в периодах 0 и 2, чтобы удовлетворить нетерпеливого агента 3 и терпеливого агента 1 соответственно, и чуть меньше потребления в периоде 1, чтобы остаться в множестве допустимых альтернатив) найдется траектория $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathscr{C}$, которую агенты 1 и 3 предпочтут перед $\mathbf{C}^{2*}$. Таким образом, $\mathbf{C}^{2*}$ тоже не является победителем по Кондорсе, а значит, победителя по Кондорсе в таком голосовании не существует.

6.2. Межвременное электоральное равновесие

Каким образом можно преодолеть такое “проклятие многомерности” в голосовании? Одним из способов является сужение множества допустимых альтернатив. В [36] показано, что если агенты различаются только своими коэффициентами дисконтирования и выбирают не из бесконечномерного множества всех возможных траекторий, а только из множества индивидуально оптимальных траекторий, то победителем по Кондорсе оказывается оптимальная траектория для агента с медианным коэффициентом дисконтирования. Фактически, такую процедуру можно интерпретировать как голосование за коэффициент дисконтирования.

В нашем примере эту процедуру можно описать следующим образом. Предположим, что агенты выбирают не из множества всех альтернатив $\mathscr{C}$, а из множества, состоящего из трех элементов $\{\mathbf{C}^{1*}, \mathbf{C}^{2*}, \mathbf{C}^{3*}\}$. Покажем, что $\mathbf{C}^{2*}$ побеждает во всех попарных голосованиях, и тем самым является победителем по Кондорсе. Действительно, рассмотрим выбор между $\mathbf{C}^{2*}$ и $\mathbf{C}^{1*}$. Очевидно, что агент 1 предпочитает свою оптимальную траекторию $\mathbf{C}^{1*}$, а агент 2 предпочитает $\mathbf{C}^{2*}$. Решающий голос принадлежит агенту 3, и легко понять, что агент 3 предпочитает $\mathbf{C}^{2*}$ перед $\mathbf{C}^{1*}$. В самом деле, величина $c_0^{i*} = \hat{k}_0/(1 + \beta_i + \beta_i^2)$ убывает по β_i, так что $c_0^{3*} > c_0^{2*} > c_0^{1*}$. Раз агент 2 предпочитает $\mathbf{C}^{2*}$ перед $\mathbf{C}^{1*}$, это тем более верно для еще более нетерпеливого агента 3, который еще сильнее предпочитает потребление в начальные периоды времени. Аналогично, при выборе между $\mathbf{C}^{2*}$ и $\mathbf{C}^{3*}$, агенты 1 и 2 предпочтут траекторию $\mathbf{C}^{2*}$. Впрочем, как видно, существование однозначного исхода голосования в данном случае гарантируется за счет ограничения множества альтернатив.

Другой способ получить разумный результат голосования — слегка видоизменить определение победителя. В [37] рассматривается модель рамсеевского типа с общественным потреблением и предлагается новый подход к динамическому голосованию, основанный на понятии межвременного электорального равновесия. Данный подход базируется на трех ключевых принципах: 1) агенты голосуют пошагово; 2) агенты голосуют не по поводу абсолютной величины (уровня потребления), а по поводу относительной величины (нормы потребления); 3) агенты обладают совершенным предвидением исходов будущих голосований.

Формально, в каждом периоде агенты голосуют только за норму потребления в данном периоде, имея некоторые ожидания относительно будущих норм потребления. В таком одномерном голосовании существует единственный победитель по Кондорсе. *Межвременное электоральное равновесие* — это последовательность победителей по Кондорсе в одномерных голосованиях, полученная при условии совершенного предвидения исходов будущих голосований. В [37] показано, что если агенты неоднородны только по одному параметру (все агенты имеют одинаковые ожидания и мгновенные функции полезности, а различаются только коэффициентами дисконтирования), то победителем по Кондорсе в одномерном голосовании оказывается предпочтительная норма потребления для агента с медианным коэффициентом дисконтирования. В этом случае в модели существует единственное межвременное электоральное равновесие, и оно однозначно соответствует оптимальной траектории общественного потребления для агента с медианным коэффициентом дисконтирования.

Проиллюстрируем межвременное электоральное равновесие в нашем примере. Перепишем задачу (6.1) для агента i в терминах норм потребления $e_0 = c_0/k_0$, $e_1 = c_1/k_1$ и $e_2 = c_2/k_2$:

$$\max \ln(e_0\hat{k}_0) + \beta_i \ln(e_1(1 - e_0)\hat{k}_0) + \beta_i^2 \ln(e_2(1 - e_1)(1 - e_0)\hat{k}_0).$$

Решение этой задачи, оптимальная траектория норм потребления для агента i, $\mathbf{E}^{i*} = \{e_0^{i*}, e_1^{i*}, e_2^{i*}\}$, имеет вид

$$e_0^{i*} = \frac{1}{1 + \beta_i + \beta_i^2}, \quad e_1^{i*} = \frac{1}{1 + \beta_i}, \quad e_2^{i*} = 1.$$

Очевидно, что между оптимальной траекторией в терминах уровней потреблений $\mathbf{C}^{i*}$ и оптимальной траекторией в терминах норм потребления $\mathbf{E}^{i*}$ существует взаимно однозначное соответствие — в задаче оптимизации для агента i не важно, какую из переменных использовать в качестве переменной управления. Однако такая замена переменных полностью меняет дело в контексте голосования.

Покажем прежде всего, что идея последовательности одномерных голосований не работает для уровней потреблений. Пусть в периоде времени 0 агенты имеют общие ожидания относительно будущих потреблений, $\overline{c}_1$ и $\overline{c}_2$, и голосуют относительно c_0. Предпочтительный уровень потребления в периоде 0 для агента i является решением задачи

$$\max \ln c_0, \quad \text{s.t.} \ \ c_0 + \overline{c}_1 + \overline{c}_2 = \hat{k}_0.$$

Легко видеть, что данная задача оптимизации вырождена. Если будущие уровни потребления зафиксированы, то межвременное бюджетное ограничение полностью определяет предпочтительный уровень сегодняшнего потребления. Более того, предпочтительное значение c_0 одинаково для всех агентов: для каждого агента оптимально потребить сегодня как можно больше, учитывая будущее потребление и начальный запас ресурса. Точно такая же логика применима к одномерному голосованию относительно c_1 и c_2. Таким образом, любая траектория $\{c_0, c_1, c_2\}$, такая что $c_0 + c_1 + c_2 = \hat{k}_0$, может быть получена как результат пошагового голосования относительно уровней потребления при совершенном предвидении будущих исходов. Так что в этом случае голосование тоже не приводит к однозначному результату.

Однако, если агенты формируют ожидания по поводу норм потребления, то ситуация с голосованием меняется. Пусть в периоде времени 0 агенты имеют общие ожидания по поводу будущих норм потребления, $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$, и голосуют относительно e_0. Предпочтительная норма потребления в периоде 0 для агента i является решением задачи

$$\max \ln(e_0\hat{k}_0) + \beta_i \ln(\overline{e}_1(1-e_0)\hat{k}_0) + \beta_i^2 \ln(\overline{e}_2(1-\overline{e}_1)(1-e_0)\hat{k}_0),$$

и нетрудно убедиться, что она совпадает с e_0^{i*}, оптимальной нормой потребления в периоде 0 для агента i. Поскольку предпочтения агентов в одномерном голосовании относительно e_0 однопиковые, и e_0^{i*} убывает по β_i, существует единственный победитель по Кондорсе, и это предпочтительная норма потребления в периоде 0 для агента 2 с медианным коэффициентом дисконтирования: $e_0^* = e_0^{2*}$.

Далее, пусть в периоде времени 1 агенты имеют общие ожидания относительно $\overline{e}_2$ и голосуют по поводу e_1 с учетом уже выбранной e_0^*. Предпочтительная норма потребления в периоде 1 для агента i является решением задачи

$$\max \ln(e_1(1-e_0^*)\hat{k}_0) + \beta_i \ln(\overline{e}_2(1-e_1)(1-e_0^*)\hat{k}_0),$$

и снова легко видеть, что она совпадает с e_1^{i*}, оптимальной нормой потребления в периоде 1 для агента i. Единственным победителем по Кондорсе в одномерном голосовании относительно e_1 является предпочтительная норма потребления в периоде 1 для агента 2, $e_1^* = e_1^{2*}$.

В конечный период времени 2, предпочтительная норма потребления для агента i является решением задачи

$$\max \ln(e_2(1-e_1^*)(1-e_0^*)\hat{k}_0),$$

и она равна $e_2^{i*} = 1$. Агенты голосуют единогласно, и единственный победитель по Кондорсе – это $e_2^* = 1$.

Таким образом, межвременное электоральное равновесие в нашем примере – последовательность победителей по Кондорсе в одномерных голосованиях за нормы потребления в периодах 0, 1 и 2, – имеет вид

$$\mathbf{E}^* = \left\{\frac{1}{1+\beta_2+\beta_2^2}, \frac{1}{1+\beta_2}, 1\right\}.$$

Заметим, что в данном простом примере победитель по Кондорсе в каждом периоде не зависит от ожиданий, хотя в общем случае это, конечно, будет уже не так. Очевидно, что $\mathbf{E}^*$ совпадает с оптимальной траекторией в терминах норм потребления для агента 2, $\mathbf{E}^{2*}$, и однозначно соответствует оптимальной траектории общественного потребления для агента 2 с медианным коэффициентом дисконтирования, $\mathbf{C}^{2*}$.

Таким образом, предложенный в [37] простой и естественный подход к голосованию обеспечивает микрооснования для выбора предпочтений медианного агента в качестве предпочтений общества в целом. Межвременное электоральное равновесие успешно применяется в динамических моделях общего равновесия с производственной функцией Кобба–Дугласа и логарифмическими мгновенными функциями полезности. В подобных моделях оказывается возможным в явном виде отыскать победителя по Кондорсе в одномерных голосованиях по поводу тех или иных параметров экономической политики. В частности, в [38] рассмотрена модель рамсеевского типа с неоднородным дисконтированием и исчерпаемыми природными ресурсами, в которой агенты голосуют относительно нормы извлечения ресурсов. В [39] рассмотрена модель, где агенты голосуют относительно ставок налогообложения и долей производительных и потребительских общественных благ в общем выпуске. В обоих случаях, если агенты неоднородны только по своим коэффициентам дисконтирования, то исход голосования определяется предпочтениями агента с медианным коэффициентом дисконтирования.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Межвременные предпочтения, характеризующиеся субъективным коэффициентом дисконтирования, занимают центральное место в современной экономической теории. Рассмотренные нами в данном обзоре модели показывают, что неоднородность в межвременных предпочтениях (различие в экзогенно заданных коэффициентах дисконтирования или различие в начальном уровне богатства в случае социально обусловленных коэффициентов дисконтирования) приводит в долгосрочной перспективе к делению общества на два неравных класса: “богатых” и “бедных”. В то время как “богатые” (самые терпеливые) обладают всем запасом капитала в экономике, “бедные” (относительно нетерпеливые) ничего не сберегают и потребляют лишь необходимый минимум.

Хотя обсуждаемые нами модели с неоднородным дисконтированием носят чисто теоретический характер, они оказываются полезными и для анализа более прикладных вопросов. Например, с их помощью можно анализировать влияние той или иной экономической политики на экономический рост и неравенство (см., в частности, [40–42]) и даже осуществлять расчеты по реальным данным (см. [43], [44]). При этом схема анализа обычно основана на принципах сравнительной статики или сравнительной динамики. Вопрос, на который исследователи пытаются дать ответ, выглядит примерно так: что произойдет, если изменятся те или иные параметры экономической политики?

В то же время хотелось бы понимать, как эти параметры выбираются. Здесь теория экономического роста встречается с теорией общественного выбора. Ряд рассмотренных нами в данном обзоре моделей показывает, что в динамическом голосовании относительно выбора параметров экономической политики существует однозначный результат, который определяется предпочтениями агента с медианным коэффициентом дисконтирования. Модели общественного выбора в условиях неоднородного дисконтирования тоже могут оказаться полезными на практике, хотя их применение наталкивается на любопытную трудность. Согласно недавним экспериментальным исследованиям, коллективные решения являются более терпеливыми, чем индивидуальные: когда люди делают выбор для общества, они гораздо чаще склонны отложить текущее потребление ради будущей выгоды, чем когда они делают выбор только для себя (см., например, [45]).

Таким образом, теоретические модели экономического роста, в которых агенты различаются своими коэффициентами дисконтирования, позволяют успешно анализировать процессы перераспределения богатства в обществе, а также проблемы коллективного принятия межвременных решений. В то же время наше рассмотрение явно указывает на необходимость заниматься более прикладными моделями, которые позволили бы приблизить исследуемые вопросы к практике. Мы надеемся, что данный обзор послужит этой цели.

Авторы благодарны Александру Шананину за крайне полезные замечания и вдумчивые комментарии. К.Ю. Борисов выражает благодарность ПАО “Северсталь” за поддержку в ходе работы над статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ramsey F.P.* A Mathematical Theory of Saving // Economic Journal. 1928. V. 38. P. 543–559.
2. *Cass D.* Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation // Review of Economic Studies. 1965. V. 32. P. 233–240.
3. *Koopmans T.C.* On the Concept of Optimal Economic Growth. In: Study Week on the Econometric Approach to Development Planning. Amsterdam: North-Holland, 1965. 38 p.
4. *Rae J.* Statement of Some New Principles of Political Economy. Boston: Hilliard, Gray, and Co, 1834.
5. *Fisher I.* The Rate of Interest. New York: Macmillan, 1907.
6. *Rader T.* The Economics of Feudalism. New York: Gordon and Breach, 1971.
7. *Rader T.* Theory of General Economic Equilibrium. New York: Academic Press, 1972.
8. *Becker R.A.* On the Long-run Steady State in a Simple Dynamic Model of Equilibrium with Heterogeneous Households // Quarterly J. of Economics. 1980. V. 95. I. 2. P. 375–382.
9. *Bewley T.F.* An Integration of Equilibrium Theory and Turnpike Theory // J. of Mathematical Economics. 1982. V. 10. P. 233–267.
10. *Becker R.A.* Equilibrium Dynamics with Many Agents. In: Mitra T., Dana R.-A., Le Van C., Nishimura K., editors, Handbook on Optimal Growth 1. Discrete Time. Heidelberg: Springer, 2006. P. 385–442.

11. *Борисов К.Ю., Пахнин М.А.* О некоторых подходах к моделированию деления общества на бедных и богатых // Ж. новой экономической ассоциации. 2018. Т. 4. № 40. С. 32–59.
12. *Борисов К.Ю., Пахнин М.А.* Общественное благосостояние в моделях экономического роста с неоднородными потребителями // Вестник СПбГУ: Экономика. 2019. Т. 35. № 2. С. 173–196.
13. *Wang M., Rieger M.O., Hens T.* How Time Preferences Differ: Evidence from 53 Countries // J. of Economic Psychology. 2016. V. 52. P. 115–135.
14. *Falk A., Becker A., Dohmen T., Enke B., Huffman D., Sunde U.* Global Evidence on Economic Preferences // Quarterly J. of Economics. 2018. V. 133. I. 4. P. 1645–1692.
15. *Hübner M., Vannoorenberghe G.* Patience and Long-run Growth // Economics Letters. 2015. V. 137. P. 163–167.
16. *Kamihigashi T.* A Simple Proof of the Necessity of the Transversality Condition // Economic Theory. 2002. V. 20. I. 2. P. 427–433.
17. *Duran J., Le Van C.* Simple Proof of Existence of Equilibrium in a One-Sector Growth Model with Bounded or Unbounded Returns From Below // Macroeconomic Dynamics. 2003. V. 7. P. 317–332.
18. *Becker R.A., Boyd III J.H., Foias C.A.* The Existence of Ramsey Equilibrium // Econometrica. 1991. V. 59. P. 441–460.
19. *Becker R.A., Foias C.A.* Characterization of Ramsey Equilibrium // J. of Economic Theory. 1987. V. 41. P. 173–184.
20. *Becker R.A., Tsyganov E.N.* Ramsey Equilibrium in a Two-Sector Model with Heterogeneous Households // J. of Economic Theory. 2002. V. 105. P. 188–225.
21. *Sorger G.* On the Structure of Ramsey Equilibrium: Cycles, Indeterminacy, and Sunspots // Economic Theory. 1994. V. 4. P. 745–764.
22. *Sorger G.* Chaotic Ramsey Equilibrium // International J. of Bifurcation and Chaos. 1995. V. 5. P. 373–380.
23. *Mitra T., Sorger G.* On Ramsey's Conjecture // J. of Economic Theory. 2013. V. 148. I. 5. P. 1953–1976.
24. *Borissov K., Dubey R.S.* A Characterization of Ramsey Equilibrium in a Model with Limited Borrowing // J. of Mathematical Economics. 2015. V. 56. P. 67–78.
25. *Becker R.A., Borissov K., Dubey R.S.* Ramsey Equilibrium with Liberal Borrowing // J. of Mathematical Economics. 2015. V. 61. P. 296–304.
26. *Borissov K., Dubey R.S.* Growth with Many Agents and Wages Paid *ex ante* // Economic Modelling. 2020. V. 89. P. 101–107.
27. *Le Van C., Vailakis Y.* Existence of a Competitive Equilibrium in a One Sector Growth Model with Heterogeneous Agents and Irreversible Investment // Economic Theory. 2003. V. 22. I. 4. P. 743–771.
28. *Becker R.A., Mitra T.* Efficient Ramsey Equilibria // Macroeconomic Dynamics. 2012. V. 16, I. S1, P. 18–32.
29. *Borissov K.* Growth and Distribution in a Model with Endogenous Time Preferences and Borrowing Constraints // Mathematical Social Sciences. 2013. V. 66. P. 117–128.
30. *Borissov K., Lambrecht S.* Growth and Distribution in an AK-model with Endogenous Impatience // Economic Theory. 2009. V. 39. I. 1. P. 93–112.
31. *Борисов К.Ю., Подкорытова О.А.* О влиянии неравенства в распределении доходов на темпы экономического роста // Вестник СПбГУ: Экономика. 2006. Т. 1. С. 155–168.
32. *Pakhnin M.* Collective Choice with Heterogeneous Time Preferences // J. of Economic Surveys. 2022. P. 1–32.
33. *Boylan R.T., McKelvey R.D.* Voting over Economic Plans // American Economic Review. 1995. V. 85. I. 4. P. 860–871.
34. *Boylan R.T., Ledyard J., McKelvey R.D.* Political Competition in a Model of Economic Growth: Some Theoretical Results // Economic Theory. 1996. V. 7. P. 191–205.
35. J*ackson M.O., Yariv L.* Collective Dynamic Choice: The Necessity of Time Inconsistency // American Economic Journal: Microeconomics. 2015. V. 7. I. 4. P. 150–178.
36. *Beck N.* Social Choice and Economic Growth // Public Choice. 1978. V. 33. I. 2. P. 33–48.
37. *Borissov K., Pakhnin M., Puppe C.* On Discounting and Voting in a Simple Growth Model // European Economic Review. 2017. V. 94. P. 185–204.
38. *Borissov K., Pakhnin M.* Economic Growth and Property Rights on Natural Resources // Economic Theory. 2018. V. 65. I. 2. P. 423–482.
39. *Borissov K., Hanna J., Lambrecht S.* Public Goods, Voting, and Growth // J. of Public Economic Theory. 2019. V. 21. I. 6. P. 1221–1265.
40. *Mankiw N.G.* The Savers-Spenders Theory of Fiscal Policy // American Economic Review. 2000. V. 90. I. 2. P. 120–125.
41. *Palivos T.* Optimal Monetary Policy with Heterogeneous Agents: A Case for Inflation // Oxford Economic Papers. 2005. V. 57. I. 1. P. 34–50.
42. Smetters K. Ricardian Equivalence: Long-run Leviathan // J. of Public Economics. 1999. V. 73. I. 3. P. 395–421.
43. *Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А.* Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 1034–1056.
44. *Shananin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V.* Consumer Loan Demand Modeling // Communications in Computer and Information Science. 2021. V. 1476. P. 417–428.
45. *Glätzle-Rützler D., Lergetporer P., Sutter M.* Collective Intertemporal Decisions and Heterogeneity in Groups // Games and Economic Behavior. 2021. V. 130. P. 131–147.