ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 3, с. 465–473

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С УСЛОВИЯМИ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ[1)]

А. Ю. Чеботарев[1,*]

[1] 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН;
690922 Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10, ДВФУ,
Региональный научно-образовательный математический центр ДЦМИ, Россия

**e-mail: cheb@iam.dvo.ru*

Поступила в редакцию 10.03.2022 г.
Переработанный вариант 16.09.2022 г.
Принята к публикации 14.11.2022 г.

Рассматривается неоднородная начально-краевая задача для нелинейной параболико-эллиптической системы, моделирующей радиационный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Доказана нелокальная по времени однозначная разрешимость задачи. Библ. 24.

Ключевые слова: квазистационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, неоднородная начально-краевая задача, нелокальная разрешимость.

DOI: 10.31857/S0044466923030055, **EDN:** EBJTPO

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Теоретический анализ моделей радиационно-кондуктивного (сложного) теплообмена представляет интерес для различных приложений, включая, например, процессы лазерной абляции [1]. При изучении процессов сложного теплообмена в средах, компоненты которых имеют большую разницу в коэффициентах преломления, необходимо учитывать эффекты отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления, вносящие, как показано в [2], значительный вклад в распределение температурных полей. При этом будем предполагать, что область, в которой изучается процесс, окружена непрозрачным для излучения материалом, имеющим заданную температуру на границе области.

В [2], [3] представлен вывод стационарной модели сложного теплообмена в рамках P_1 приближения для многокомпонентной трехмерной области и доказана однозначная разрешимость однородной и неоднородной краевых задач. В работе [4] рассмотрена квазистационарная модель сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения, не содержащая внутренних источников.

В данной статье рассматривается начально-краевая задача для уравнений радиационного теплообмена в многокомпонентной среде с внутренними источниками (объемными или поверхностными). Отметим, что анализ неоднородных начально-краевых задач важен для изучения обратных задач и задач оптимального управления сложным теплообменом.

Нелинейные уравнения, моделирующие сложный теплообмен в рамках P_1 приближения и без учета эффектов отражения и преломления на границах подобластей с различными коэффициентами преломления, изучены достаточно полно. Анализ краевых и обратных задач, задач оптимального управления представлен в [5–14]. Отметим также интересные работы [15–23], посвященные анализу полной модели радиационного теплообмена.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00113) и Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8) и соглашение № 075-02-2022-880.

Рассмотрим ограниченную липшицеву область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, содержащую конечное число липшицевых подобластей Ω_j, $j = 1,\ldots,p$, замыкания которых не пересекаются и принадлежат Ω. Через $\Omega_0 = \Omega\setminus\left(\bigcup_{j=1}^p \bar{\Omega}_j\right)$ обозначаем внешнюю подобласть, $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$, $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$, $j = 1,\ldots,p$.

Нестационарный сложный теплообмен в многокомпонентной среде моделируется в каждой из областей Ω_j, $j = 0,\ldots,p$, при $t \in (0,T)$ уравнениями

$$r\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b(\theta^3|\theta| - \varphi) = f, \quad -\alpha\Delta\varphi + \beta(\varphi - \theta^3|\theta|) = g. \tag{1}$$

Здесь θ — нормализованная температура и φ — нормализованная интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные кусочно-постоянные параметры r, a, b, α и β, описывающие свойства среды, определены в [2–4]. Функции f, g описывают тепловые и радиационные источники.

На внешней границе $\Gamma = \partial\Omega$ заданы краевые условия (через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе)

$$a\partial_n\theta + c(\theta - \theta_b)\big|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)\big|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где θ_b — заданная граничная температура, c — коэффициент теплопередачи, $0 < \gamma \le 1/2$ — параметр, зависящий от коэффициента излучения поверхности.

На внутренних границах $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, $j = 1,\ldots,p$, ставятся следующие условия сопряжения для температуры $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$ и интенсивности излучения $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$, полученные в [2] (через ∂_n также обозначаем производную по внешней нормали к $\partial\Omega_j$):

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0\partial_n\theta_0 = a_j\partial_n\theta_j, \tag{3}$$

$$n_0^2\alpha_0\partial_n\varphi_0 = n_j^2\alpha_j\partial_n\varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0\partial_n\varphi_0. \tag{4}$$

Здесь $a_j, \alpha_j, n_j = a, \alpha, n|_{\Omega_j}$, $h_j > 0$ — параметры, зависящие от коэффициентов отражения на внутренних границах. Отметим, что вывод условий (4) основан на френелевских условиях сопряжения на Γ_j для интенсивности излучения I, не усредненной по направлениям, использовании P_1 приближения для I и интегрировании указанных условий по направлениям входящих лучей для каждой подобласти.

Кроме этого задаются начальные условия для температуры,

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{5}$$

Начально-краевая задача (1)–(5), где $f = 0$, $g = 0$ и граничная температура θ_b является ограниченной, рассмотрена в [4]. Изучение уравнений сложного теплообмена с источниками, которые моделируются функционалами или интегрируемыми функциями, представляет не только теоретический интерес. Представленные в настоящей статье оценки решений неоднородной начально-краевой задачи предназначены для анализа задач оптимального управления и обратных задач сложного теплообмена. Отметим, что для неоднородной задачи потребовалась техника получения оценок решения, отличная от использованной в [4].

Основной результат работы состоит в получении новых априорных оценок решения начально-краевой задачи (1)–(5) и доказательстве нелокальной по времени разрешимости задачи.

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Через L^s, $1 \le s \le \infty$, обозначаем пространства Лебега s — интегрируемых функций и, соответственно, через $H^s = W_2^s$ — пространства Соболева. Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ и

$$W = \{w \in H,\ w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j),\ j = 0,\ldots,p\}.$$

Пространство H будем отождествлять с сопряженным пространством H'. Тогда $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$. Далее будем использовать следующие обозначения: (f, v) – значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в H, если $f, v \in H$;

$$\|v\|^2 = (v, v); \quad (v, w)_j = (v, w)_{L^2(\Omega_j)}, \quad \|v\|_j^2 = (v, v)_j; \quad (v, w)_W = \sum_{j=0}^{p} (v, w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Через $L^p(0, T; X)$ (соотв. $C([0, T], X)$) обозначаем пространство строго измеримых функций класса L^p (соотв. непрерывных), определенных на $[0, T]$, со значениями в банаховом пространстве X.

Пусть исходные данные удовлетворяют следующим условиям.

(i) $c, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $c \ge c_0 > 0$, $\gamma \ge \gamma_0 > 0$, $c_0, \gamma_0 = \text{const}$;

(ii) $\{a, b, r, \alpha, \beta, n\}|_{\Omega_j} = \{a_j, b_j, r_j, \alpha_j, \beta_j, n_j\} > 0$, $b = \sigma\beta n^2$, $\sigma = \text{const} > 0$;

(iii) $0 \le \theta_b \in L^\infty(\Gamma \times (0, T))$; $f \in L^2(0, T; V')$, $g \in L^{5/4}(Q)$, $Q = \Omega \times (0, T)$.

Определим операторы $A_1 : V \to V'$, $A_2 : W \to W'$ и функции $f_b \in L^2(0, T; V')$, $g_b \in L^2(0, T; W')$, используя следующие равенства, справедливые для $\theta, \eta \in V$, $\varphi, w \in W$:

$$(A_1\theta, \eta) = (a\nabla\theta, \nabla\eta) + \int_\Gamma c\theta\eta d\Gamma,$$

$$\frac{1}{\sigma}(A_2\varphi, w) = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j n_j^2 (\nabla\varphi, \nabla w)_j + n_0^2 \int_\Gamma \gamma\varphi w d\Gamma + n_0^2 \sum_{j=1}^{p} h_j \int_{\Gamma_j} (\varphi_0 - \varphi_j)(w_0 - w_j) d\Gamma,$$

$$(f_b, \eta) = \int_\Gamma c\theta_b \eta d\Gamma, \quad (g_b, w) = \sigma n_0^2 \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 w d\Gamma.$$

Здесь $\{\varphi_j, w_j\} = \{\varphi, w\}|_{\Omega_j}$.

Скалярное произведение и норму в пространстве V определим, используя оператор A_1, $(u, v)_V = (A_1 u, v)$, $\|v\|_V^2 = (A_1 v, v)$. Такая норма эквивалентна стандартной норме пространства V. Будем также использовать неравенства непрерывности вложений $V \subset L^6(\Omega)$, $W \subset L^6(\Omega)$:

$$\|v\|_{L^6(\Omega)} \le K_1 \|v\|_V, \quad v \in V, \quad \|w\|_{L^6(\Omega)} \le K_2 \|w\|_W, \quad w \in W.$$

Для возрастающей степенной функции используем обозначение $[s]^q = |s|^q \operatorname{sign} s$, $q > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Отметим, что $d[s]^q/dt = q|s|^{q-1}$.

Пусть

$$Y = \left\{ y \in L^2(0, T; V) \cap L^5(0, T; L^5(\Omega)),\ ry' \in L^2(0, T; V') + L^{5/4}(0, T; L^{5/4}(\Omega)) \right\}.$$

Здесь $ry' = d(ry)/dt$.

Отметим, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $y \in Y$. Тогда функция y равна почти всюду некоторой непрерывной функции из $[0, T]$ в H и в смысле скалярных распределений на $(0, T)$ имеет место равенство*

$$\frac{d}{dt}(ry, y) = 2(ry', y). \tag{6}$$

Данная лемма является слегка модифицированной версией классического утверждения [24, лемма 1.2, с. 209] и доказана в конце статьи.

Для вывода слабой формулировки краевой задачи (1)–(4) умножим уравнения (1) на тестовые функции $\eta \in V$ и $\sigma n^2 \psi \in W$ соответственно, проинтегрируем по частям по областям Ω_j, сложим полученные равенства и применим краевые условия (2) и условия сопряжения (3), (4). В результате получаем следующую формулировку.

Определение. Пара $\{\theta,\varphi\}\in Y\times L^{5/4}(0,T;W)$ называется *слабым решением* задачи (1)–(5), если

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4-\varphi) = f_b + f,\quad A_2\varphi + b(\varphi-[\theta]^4) = g_b + \sigma n^2 g,\quad t\in(0,T) \tag{7}$$

и при этом $\theta(0)=\theta_0$.

Заметим, что билинейная форма $\{\varphi,\psi\}\to(A_2\varphi+b\varphi,\psi)$ является непрерывной, симметричной и положительно-определенной в пространстве W. Поэтому из леммы Лакса-Мильграма следует, что для каждого $\eta\in W'$ существует единственное решение $\varphi\in W$ уравнения $A_2\varphi+b\varphi=\eta$ и оператор $(A_2+bI)^{-1}:W'\to W$ непрерывен. Таким образом, пара $\{\theta,\varphi\}\in Y\times L^{5/4}(0,T;W)$ является решением задачи (7), если и только если функция θ является решением следующей задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4-\varphi) = f_b + f,\quad \theta(0)=\theta_0,\quad \text{где}\quad \varphi=(A_2+bI)^{-1}(g_b+\sigma n^2 g + b[\theta]^4). \tag{8}$$

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Определим галёркинские приближения θ_m решения задачи (8) и выведем необходимые для доказательства разрешимости априорные оценки. В пространстве V рассмотрим ортонормированный в H базис $w_1, w_2, \ldots$. Пусть

$$\begin{gathered}\theta_k(t)\in V_k = \operatorname{span}\{w_1,w_2,\ldots,w_k\},\quad t\in(0,T),\\ \left(r\theta_k' + A_1\theta_k + b([\theta_k]^4-\varphi_k) - f_b - f, v\right) = 0\quad \forall v\in V_k,\\ \theta_k(0)=\theta_{0k}.\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $\varphi_k=(A_2+bI)^{-1}(g_b+\sigma n^2 g+b[\theta_k]^4)$, θ_{0k} – ортогональная проекция в H функции θ_0 на подпространство V_k.

Задача Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (9) разрешима на малом временном интервале $(0,T_k)$. Оценки, полученные ниже, позволяют продолжить решение на $(0,T)$.

3.1. Априорные оценки галёркинских приближений

Функция φ_k удовлетворяет равенству

$$A_2\varphi_k + b(\varphi_k - [\theta_k]^4) = g_b + \sigma n^2 g. \tag{10}$$

Пусть $\mu_\varepsilon(s) = s - \varepsilon\operatorname{sign} s$, если $|s|>\varepsilon$ и $\mu_\varepsilon(s)=0$, если $|s|\le\varepsilon$; $\varepsilon>0$. Тогда $\psi_\varepsilon(t)=\mu_\varepsilon([\varphi_k(t)]^{1/4})$ принадлежит пространству W. Умножая скалярно (10) на ψ_ε, также как в [3], выводим после предельного перехода при $\varepsilon\to+0$, что $\zeta(t)=[\varphi_k(t)]^{5/8}\in W$ и справедливо равенство

$$E(\zeta) + (b(\varphi_k-[\theta_k]^4),[\varphi_k]^{1/4}) = \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma\theta_b^4[\zeta]^{2/5}d\Gamma + (\sigma n^2 g,[\zeta]^{2/5}). \tag{11}$$

Здесь

$$E(\zeta) = \frac{16\sigma}{25}\sum_{j=0}^{p}\alpha_j n_j^2\|\nabla\zeta\|_j^2 + \sigma n_0^2\int_\Gamma\gamma\zeta^2 d\Gamma + \sigma n_0^2\sum_{j=1}^{p}h_j\int_{\Gamma_j}([\zeta_0]^{8/5}-[\zeta_j]^{8/5})([\zeta_0]^{2/5}-[\zeta_j]^{2/5})d\Gamma.$$

Отметим сразу, что для квадратичной формы E справедлива следующая оценка.

Лемма 2 (см. [3]). *Существует $K>0$ такое, что*

$$K\|w\|^2 \le E(w)\quad \forall w\in W.$$

Полагая $v = \theta_k$ в (9) и складывая это равенство с (11), получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r\theta_k,\theta_k) + \|\theta_k\|_V^2 + E(\zeta) + (b([\theta_k]^4 - \varphi_k),\theta_k - [\varphi_k]^{1/4}) = \\ = (f_b + f,\theta_k) + \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma\theta_b^4[\zeta]^{2/5}d\Gamma + (\sigma n^2 g,[\zeta]^{2/5}).\end{gathered} \tag{12}$$

Воспользуемся следующими неравенствами для оценки правой части (12):

$$(f_b + f,\theta_k) \le \frac{1}{2}\|f_b + f\|_{V'}^2 + \frac{1}{2}\|\theta_k\|_V^2,$$

$$\theta_b^4[\zeta]^{2/5} \le \frac{1}{5}(\varepsilon^5\zeta^2 + 4\varepsilon^{-5/4}|\theta_b|^5), \quad g[\zeta]^{2/5} \le \frac{1}{5}(\varepsilon^5\zeta^2 + 4\varepsilon^{-5/4}|g|^{5/4}).$$

Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ из (12), с учетом леммы 1, следует оценка

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(r\theta_k,\theta_k) + \|\theta_k\|_V^2 + K\|\zeta\|^2 + (b([\theta_k]^4 - \varphi_k),\theta_k - [\varphi_k]^{1/4}) + \\ + \frac{16\sigma}{25}\sum_{j=0}^{p}\alpha_j n_j^2\|\nabla\zeta\|_j^2 \le \|f_b + f\|_{V'}^2 + C\left(\int_\Gamma |\theta_b|^5 d\Gamma + \int_\Omega |g|^{5/4}dx\right).\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь и далее через $C > 0$ обозначаем постоянные, не зависящие от k.

Проинтегрировав по времени неравенство (13), получаем оценки

$$\|\theta_k(t)\| \le C, \quad \int_0^T \|\theta_k(s)\|_V^2\, ds \le C, \quad \int_0^T \|\zeta\|_W^2\, ds \le C, \quad \int_0^T ([\theta_k]^4 - \varphi_k,\theta_k - [\varphi_k]^{1/4})ds \le C. \tag{14}$$

Из последней оценки в (14) следует, что

$$\int_0^T \left(\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\varphi_k\|_{L^{5/4}(\Omega)}^{5/4}\right)ds \le C + \int_0^T ([\theta_k]^4,[\varphi_k]^{1/4})ds + \int_0^T (\varphi_k,\theta_k)ds.$$

Поскольку

$$\left|[\theta_k]^4\cdot[\varphi_k]^{1/4}\right| = |\theta_k|^4|\zeta|^{2/5} \le \frac{4\varepsilon^{5/4}}{5}|\theta_k|^5 + \frac{1}{5\varepsilon^5}|\zeta|^2, \quad |\varphi_k\theta_k| = |\theta_k||\zeta|^{8/5} \le \frac{\varepsilon^5}{5}|\theta_k|^5 + \frac{4}{5\varepsilon^{5/4}}|\zeta|^2,$$

то, выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получаем

$$\int_0^T \left(\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\varphi_k\|_{L^{5/4}(\Omega)}^{5/4}\right)ds \le C. \tag{15}$$

Далее, используя неравенства вложения $V \subset L^6(\Omega)$, $W \subset L^6(\Omega)$, оценим нелинейность:

$$\left\|[\theta_k]^4\right\|_{V'} \le \sup_{\|v\|_V = 1}\left\|[\theta_k]^4\right\|_{L^{6/5}(\Omega)}\|v\|_{L^6(\Omega)} \le K_1\left(\int_\Omega |\theta|^{24/5}dx\right)^{5/6}.$$

Тогда

$$\int_0^T \left\|[\theta_k]^4\right\|_{V'}^{5/4} dt \le K_1^{5/4}\int_0^T\left(\int_\Omega |\theta_k|^{24/5}dx\right)^{25/24} dt \le K_1^{5/4}|\Omega|^{1/24}\int_Q |\theta_k|^5 dxdt \le C \tag{16}$$

и, аналогично,

$$\int_0^T \left\|[\theta_k]^4\right\|_{W'}^{5/4} dt \le K_2^{5/4}|\Omega|^{1/24}\int_Q |\theta_k|^5 dxdt \le C.$$

Учтем, что $\varphi_k = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + \sigma n^2 g + b[\theta_k]^4)$ и оператор $(A_2 + bI)^{-1} : W' \to W$ непрерывен. Следовательно, из полученной оценки вытекает, что

$$\int_0^T \|\varphi_k\|_W^{5/4}\, dt \le C. \tag{17}$$

Получим оценку равностепенной непрерывности последовательности θ_k в $L^2(0,T;H)$. Рассмотрим (9) в момент времени s, положим $v = \theta_k(s) - \theta_k(t)$ и проинтегрируем по s от t до $t+h$, затем по t от 0 до $T-h$. Тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^{T-h} (r(\theta_k(t+h) - \theta_k(t)), \theta_k(t+h) - \theta_k(t))dt = \int_0^{T-h}\int_t^{t+h} p_k(t,s)dsdt. \tag{18}$$

Здесь

$$p_k(t,s) = (A_1\theta_k(s) + b([\theta_k(s)]^4 - \varphi_k(s)) - f_b(s) - f(s), \theta_k(t) - \theta(s)).$$

Воспользуемся неравенствами

$$(A_1\theta_k(s), \theta_k(t) - \theta_k(s)) \le \frac{1}{2}\|\theta_k(s)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\theta_k(t)\|_V^2,$$

$$(b([\theta_k(s)]^4, \theta_k(t) - \theta_k(s)) \le \max b([\theta_k(s)]^4, \theta_k(t) - \theta_k(s)) \le \max b\left(\frac{4}{5}\int_\Omega |\theta_k(s)|^5 dx + \frac{1}{5}\int_\Omega |\theta_k(t)|^5 dx\right),$$

$$|(b(\varphi_k(s), \theta_k(t) - \theta_k(s))| \le \max b\left(\frac{8}{5}\int_\Omega |\varphi_k(s)|^{5/4} dx + \frac{1}{5}\int_\Omega |\theta_k(s)|^5 dx + \frac{1}{5}\int_\Omega |\theta_k(t)|^5 dx\right),$$

$$|(f_b(s) + f(s), \theta_k(t) - \theta_k(s))| \le \|f_b(s) + f(s)\|_{V'}^2 + \frac{1}{2}\|\theta_k(s)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\theta_k(t)\|_V^2.$$

Эти неравенства позволяют оценить правую часть (18), причем для оценки интегралов от функций, зависящих от s, достаточно поменять порядок интегрирования. В результате получаем оценку

$$\int_0^{T-h} \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t)\|^2\, dt \le C_1 h, \tag{19}$$

где $C_1 > 0$ не зависит от k, h.

Полученные оценки (14)–(19) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что существуют функции θ, φ такие, что

$$\begin{gathered} \theta_k \to \theta \quad \text{слабо в } L^2(0,T;V), L^5(Q), \quad \text{сильно в } L^2(0,T;H), \\ \varphi_k \to \varphi \quad \text{слабо в } L^{5/4}(0,T;W), L^{5/4}(Q). \end{gathered} \tag{20}$$

Результатов о сходимости (20) достаточно для предельного перехода при $k \to \infty$ в системе (9) и доказательства того, что предельные функции $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^{5/4}(0,T;W)$ и выполняются равенства (8). При этом предельный переход в нелинейных членах гарантируется неравенством

$$\|\theta_k - \theta\|_{L^4(Q)}^4 \le \|\theta_k - \theta\|_{L^2(Q)}^{2/3} \|\theta_k - \theta\|_{L^5(Q)}^{10/3}.$$

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii). *Тогда существует слабое решение задачи* (1)–(5).

Замечание 1. Из определений пространств Y и W и вложений $Y \subset C([0,T];H)$, $W \subset L^{5/4}(\Omega)$ следует, что если $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^{5/4}(0,T;W)$ – слабое решение задачи (1)–(5), то $\theta \in C([0,T];H) \cap L^5(Q)$, $\varphi \in L^{5/4}(Q)$.

4. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Пусть $\{\theta_{1,2},\varphi_{1,2}\}\in Y\cap L^5(Q)\times L^{5/4}(0,T;W)\cap L^{5/4}(Q)$ – слабые решения задачи (1)–(5), $\theta=\theta_1-\theta_2$, $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$. Тогда справедливы равенства

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta_1]^4-[\theta_2]^4) = b\varphi,\quad A_2\varphi + b\varphi = b([\theta_1]^4-[\theta_2]^4),\quad t\in(0,T),\quad \theta(0)=0.$$

Умножая скалярно первое уравнение на $\theta(t)$, второе на $\varphi(t)$ и учитывая неравенства

$$([\theta_1]^4-[\theta_2]^4)(\theta_1-\theta_2)\ge 0,\quad \left|[\theta_1]^4-[\theta_2]^4\right|\le 2(|\theta_1|^3+|\theta_2|^3)|\theta|,$$

получаем оценки

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r\theta,\theta)+\|\theta\|_V^2\le(b\varphi,\theta)\le\max b\|\varphi\|_{L^6(\Omega)}\|\theta\|_{L^{6/5}(\Omega)}\le\max b|\Omega|^{1/3}\|\varphi\|_{L^6(\Omega)}\|\theta\|,\tag{21}$$

$$(A_2\varphi,\varphi)+(b\varphi,\varphi)\le 2\max b\int_\Omega(|\theta_1|^3+|\theta_2|^3)|\theta||\varphi|dx.\tag{22}$$

Левую часть (22) оценим снизу, используя непрерывность вложения $W\subset L^6(\Omega)$, а правую сверху, используя неравенство Гёльдера. Тогда

$$K_3\|\varphi\|^2_{L^6(\Omega)}\le 2\max b\|\varphi\|_{L^6(\Omega)}\left(\left(\int_\Omega|\theta_1|^{18/5}|\theta|^{6/5}dx\right)^{5/6}+\left(\int_\Omega|\theta_2|^{18/5}|\theta|^{6/5}dx\right)^{5/6}\right).$$

Здесь $K_3=\min\{\alpha n^2,b\}/K_2$. Заметим, что

$$\left(\int_\Omega|\theta_{1,2}|^{18/5}|\theta|^{6/5}dx\right)^{5/6}\le\|\theta_{1,2}\|^3_{L^5(\Omega)}\|\theta\|^{4/5}_{L^6(\Omega)}\|\theta\|^{1/5}.$$

Поэтому

$$K_3\|\varphi\|_{L^6(\Omega)}\le 2\max b\left(\|\theta_1\|^3_{L^5(\Omega)}+\|\theta_2\|^3_{L^5(\Omega)}\right)\|\theta\|^{4/5}_{L^6(\Omega)}\|\theta\|^{1/5}.$$

Подставляя полученное неравенство для φ в правую часть (21), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r\theta,\theta)+\|\theta\|_V^2\le K_4\left(\|\theta_1\|^3_{L^5(\Omega)}+\|\theta_2\|^3_{L^5(\Omega)}\right)\|\theta\|^{4/5}_{L^6(\Omega)}\|\theta\|^{6/5}.\tag{23}$$

Здесь $K_4=2(\max b)^2|\Omega|^{1/3}/K_3$. Правую часть (23) оценим, используя неравенство Юнга с параметром $\varepsilon>0$,

$$\left(\|\theta_1\|^3_{L^5(\Omega)}+\|\theta_2\|^3_{L^5(\Omega)}\right)\|\theta\|^{4/5}_{L^6(\Omega)}\|\theta\|^{6/5}\le\frac{4\varepsilon^{5/2}}{5}\|\theta\|^2_{L^6(\Omega)}+\frac{3\varepsilon^{-5/3}}{5}\left(\|\theta_1\|^5_{L^5(\Omega)}+\|\theta_2\|^5_{L^5(\Omega)}\right)\|\theta\|^2.$$

Учитывая непрерывность вложения $V\subset L^6(\Omega)$, выводим из (23) при достаточно малом ε оценку

$$\min r\|\theta(t)\|^2\le K_5\int_0^t\left(\|\theta_1(s)\|^5_{L^5(\Omega)}+\|\theta_2(s)\|^5_{L^5(\Omega)}\right)\|\theta(s)\|^2ds,$$

где $K_5>0$ зависит только от K_4,ε. Функция $s\to\left(\|\theta_1(s)\|^5_{L^5(\Omega)}+\|\theta_2(s)\|^5_{L^5(\Omega)}\right)$ интегрируема на $(0,T)$ и поэтому из неравенства Гронуолла следует $\theta=0$, что означает единственность решения.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii). *Тогда существует единственное слабое решение задачи* (1)–(5).

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1

Определим регуляризацию функции $y\in Y$,

$$y_m(t)=\int_0^T y(s)\rho((t-s)m)ds\quad\forall t\in[0,T],$$

где $\rho \in D(\mathbb{R})$, $\int \rho(s)ds = 1$, $\rho(t) = \rho(-t)$, $\operatorname{supp}\rho \subset [-1,1]$; $y_m \in C^\infty([0,T],V)$, $m = 1,2,3\ldots$

Тогда

$$y_m \to y \quad \text{в} \quad L^2_{\text{loc}}((0,T);V) \quad \text{и в} \quad L^5_{\text{loc}}((0,T);L^5(\Omega)).$$

По условию $ry' = f_1 + f_2$, $f_1 \in L^2(0,T;V')$, $f_2 \in L^{5/4}(0,T;L^{5/4}(\Omega))$. Определим регуляризации

$$f_{1m}(t) = \int_0^T f_1(s)\rho((t-s)m)ds, \quad f_{2m}(t) = \int_0^T f_2(s)\rho((t-s)m)ds,$$

$$f_{1m} \to f_1 \quad \text{в} \quad L^2_{\text{loc}}((0,T);V'), \quad f_{2m} \to f_2 \quad \text{в} \quad L^{5/4}_{\text{loc}}((0,T);L^{5/4}(\Omega)).$$

Заметим, что для $\varphi \in D(0,T)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset (1/m, T - 1/m)$ справедливо равенство

$$\int_0^T ry'_m(t)\varphi(t)dt = \int_0^T\int_0^T ry(s)\frac{d}{dt}\rho((t-s)m)ds\varphi(t)dt = -\int_0^T\int_0^T ry(s)\frac{d}{ds}\rho((t-s)m)ds\varphi(t)dt =$$
$$= \int_0^T\int_0^T (f_1(s) + f_2(s))\rho((t-s)m)ds\varphi(t)dt = \int_0^T (f_{1m}(t) + f_{2m}(t))\varphi(t)dt.$$

Поэтому $ry'_m = f_{1m} + f_{2m}$. Следовательно,

$$(ry'_m, y_m) = (f_{1m} + f_{2m}, y_m) \to (f_1, y) + (f_2, y) = (ry', y) \quad \text{в} \quad L^1_{\text{loc}}(0,T).$$

Кроме того, $(ry_m, y_m) \to (ry, y)$ в $L^1_{\text{loc}}(0,T)$. Поэтому мы можем перейти к пределу в равенстве

$$\frac{d}{dt}(ry_m, y_m) = 2(ry'_m, y_m)$$

в смысле теории распределений; в пределе получим (6).

Так как функция $t \to (ry', y)$ интегрируема на $(0,T)$, равенство (6) показывает, что $y \in L^\infty(0,T;H)$. Поэтому [24, Лемма 1.4, с. 211]

$$\forall v \in H \quad \text{функция} \quad t \to (ry(t), v) \quad \text{непрерывна.} \tag{24}$$

Далее, для $t, t_0 \in [0,T]$ используем равенство

$$\left\|\sqrt{r}(y(t) - y(t_0))\right\|^2 = (ry(t), y(t)) + (ry(t_0), y(t_0)) - 2(ry(t), y(t_0)).$$

Если $t \to t_0$, $(ry(t), y(t)) \to (ry(t_0), y(t_0))$. Действительно,

$$(ry(t), y(t)) = (ry(t_0), y(t_0)) + 2\int_0^t (ry'(s), y(s))ds,$$

а в силу (24), $(ry(t), y(t_0)) \to (ry(t_0), y(t_0))$. Поэтому $\left\|\sqrt{r}(y(t) - y(t_0))\right\|^2 \to 0$. Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковтанюк А.Е., Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Использование диффузионного приближения для моделирования радиационных и тепловых процессов в кожном покрове // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 123. № 2. С. 194–199.
2. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. № 57. С. 290–298.
3. *Чеботарев А.Ю.* Неоднородная краевая задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 12. С. 1660–1665.
4. *Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E.* Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 507. 125745.

5. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1-system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
6. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
7. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. № 1. P. 520–528.
8. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 11. С. 1806–1816.
9. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.
10. *Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. V. 289. P. 371–380.
11. *Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
12. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2017. V. 51. № 6. P. 2511–2519.
13. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
14. *Chebotarev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.
15. *Amosov A.* Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative - Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies // Russian J. of Math. Phys. 2016. V. 23. № 3. P. 309–334.
16. *Amosov A.A.* Unique Solvability of Stationary Radiative – Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies // J. of Math. Sc. 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.
17. *Amosov A.A.* Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation // J. Math. Sci. 2018. V. 233. № 6. P. 777–806.
18. *Amosov A.A., Krymov N.E.* On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems // J. of Math. Sc. 2020. V. 244. P. 357–377.
19. *Amosov A.A.* Asymptotic Behavior of a Solution to the Radiative Transfer Equation in a Multilayered Medium with Diffuse Reflection and Refraction Conditions // J Math Sci. 2020. V. 244. P. 541–575.
20. *Amosov A.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. V. 44. № 13. P. 10703–10733.
21. *Amosov A.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a semitransparent body with absolutely black inclusions // Z. Angew. Math. Phys. 2021. V. 72. Article number:104.
22. *Amosov A.A.* Unique solvability of the stationary complex heat transfer problem in a system of gray bodies with semitransparent inclusions // J. Math. Sci. (United States). 2021. V. 255. Issue 4. P. 353–388.
23. *Amosov A.* Nonstationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a Semitransparent Body with Absolutely Black Inclusions // Mathematics. 2021. V. 9. № 13. P. 1471.
24. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.