
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА–ФОККЕРА–ПЛАНКА¹⁾

© 2023 г. Н. В. Трусов^{1,2,*}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 119991 Москва, Ленинские горы, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: trunick.10.96@gmail.com

Поступила в редакцию 15.09.2022 г.
Переработанный вариант 15.09.2022 г.
Принята к публикации 17.11.2022 г.

В работе исследуется математическое описание экономического поведения домашних хозяйств с помощью уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка. Данное уравнение описывает динамику плотности распределения домашних хозяйств по двум характеристикам: финансовому состоянию и доходам. Основываясь на статистических данных Росстата об экономическом положении домашних хозяйств России, исследуется вопрос о согласованности статистических данных с решением уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка. Задача формализована в виде минимизации отклонения решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка от статистических данных за счет управления расходами домашних хозяйств. Представлено численное решение экстремальной задачи, приведены результаты расчетов. Библ. 10. Фиг. 11. Табл. 1.

DOI: 10.31857/S0044466923030110, EDN: DZONBT

1. ВВЕДЕНИЕ

Моделирование экономического поведения домашних хозяйств опирается на концепцию рационального репрезентативного экономического агента и восходит к работе Ф. Рамсея [1]. Модели поведения репрезентативного домашнего хозяйства для различных социальных слоев разрабатывались в [2], [3] и использовались для анализа состояния рынка потребительского кредита. Динамика поведения репрезентативного домашнего хозяйства характеризует “среднее” поведение домашних хозяйств в рассматриваемом социальном слое. Исследование поведения большого количества домашних хозяйств в рамках социального слоя позволяет более качественно отслеживать их экономическую динамику. Большое количество домашних хозяйств можно описывать плотностью их распределения по финансовому состоянию и доходам. Финансовое состояние – величина, характеризующая разницу между доступными ликвидными средствами с депозитарными счетами домашнего хозяйства и его задолженностью перед банковским сектором. Динамику эволюции плотности распределения можно описать с помощью уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (см. [4]).

В данной работе исследуется вопрос о качестве моделирования экономического поведения домашних хозяйств с помощью уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка в сравнении со статистическими данными обследования бюджетов домашних хозяйств (ОБДХ) в России за период 2015–2020 гг. [5]. В разд. 2 поставлена задача согласованности наблюдаемой статистики с динамикой распределения домашних хозяйств, описываемой уравнением Колмогорова–Фоккера–Планка. В разд. 3 представлен алгоритм численного решения данной задачи, результаты которого апробированы на данных российской статистики и представлены в разд. 4. В заключение (разд. 5) обсуждаются пути дальнейших исследований.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (Грант 23-11-00129).

2. ЗАДАЧА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Мы полагаем, что доходы домашнего хозяйства S являются стохастическим процессом и описываются стохастическим дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} dS &= S(\gamma dt + \sigma dW), \\ S(0) &= S_0, \end{aligned}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ характеризует темп роста доходов, dW – стохастический дифференциал винеровского процесса W , $\sigma > 0$. Пусть $M(t)$ – ликвидные средства домашнего хозяйства, которые описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{dM}{dt} = S(t) - p(t)C(t) + H_L(t) - H_D(t), \quad (1)$$

где $C(t)$ – расходы домашнего хозяйства; $p(t)$ – индекс потребительских цен, растущий с темпом инфляции j , т.е. $p(t) = p_0 e^{jt}$, $p_0 > 0$; величина $H_L(t) \in \mathbb{R}$ описывает заимствования по потребительскому кредиту, а величина $H_D(t) \in \mathbb{R}$ характеризует пополнение/снятие сбережений в форме депозитов в коммерческих банках. Изменение задолженности $L(t) \geq 0$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dL}{dt} = H_L(t) + r_L L(t), \quad (2)$$

где $r_L > 0$ является процентной ставкой по потребительскому кредиту. Изменение сбережений в форме депозитов $D(t) \geq 0$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dD}{dt} = H_D(t) + r_D D(t), \quad (3)$$

где $r_D > 0$ является процентной ставкой по депозитам, причем предполагается выполнение условия отсутствия арбитража, т.е. $r_L > r_D > 0$. Закон Фишера связывает между собой ликвидные средства $M(t)$ с потребительскими расходами домашнего хозяйства $C(t)$ через величину $\frac{1}{\theta} > 0$, характеризующую скорость обращения денег

$$M(t) = \theta p(t)C(t).$$

Пусть $x(t)$ – финансовое состояние домашнего хозяйства. Оно задается выражением

$$x(t) = M(t) + D(t) - L(t). \quad (4)$$

Рациональное поведение предполагает, что домашнее хозяйство не имеет задолженности по потребительскому кредиту и сбережений в коммерческих банках одновременно, поэтому

$$\begin{aligned} L(t) &= \max\{M(t) - x(t), 0\} = (M(t) - x(t))_+, \\ D(t) &= (x(t) - M(t))_+. \end{aligned}$$

Дифференцируя уравнение (4) в силу уравнений (1)–(3), мы получаем динамику изменения финансового состояния домашнего хозяйства

$$\frac{dx}{dt} = S - \frac{1}{\theta} M - r_L (M - x)_+ + r_D (x - M)_+, \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

Таким образом, финансовое состояние x домашнего хозяйства и его доходы S описываются динамической системой

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= S - \frac{1}{\theta} M - r_L (M - x)_+ + r_D (x - M)_+, \\ dS &= S(\gamma dt + \sigma dW), \\ x(0) &= x_0, \\ S(0) &= S_0. \end{aligned}$$

В работе [2] исследуется задача рамсеевского типа о максимизации дисконтированного потребления репрезентативного домашнего хозяйства, которое управляет потреблением $C(t)$. Условие расплаты по потребительскому кредиту к конечному моменту времени влечет ограничение на финансовое состояние $x \geq \frac{-S}{r_L - \gamma}$. Если данное неравенство нарушается, то домашнее хозяйство не может расплатиться с потребительским кредитом при сложившейся конъюнктуре (см. [2]).

Пусть $m(x, S, t)$ описывает плотность распределения домашних хозяйств по финансовым состояниям x и доходам S в момент времени t . В [4] выведено уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка, которое описывает эволюцию плотности распределения $m(x, S, t)$

$$\frac{\partial m(x, S, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (S \sigma^2(x, S) m(x, S, t)) + \frac{\partial}{\partial S} (S m(x, S, t) \gamma(x, S)) + \frac{\partial}{\partial x} (m f(x, S)) = 0, \quad (6)$$

с начальными условиями

$$m(x, S, 0) = m_0(x, S), \quad (7)$$

где $f(x, S)$ является правой частью дифференциального уравнения (5), т.е.

$$f(x, S) = S - \frac{1}{\theta} M - r_L (M - x)_+ + r_D (x - M)_+. \quad (8)$$

Замечание 1. Отметим, что $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} m(x, S, t) dS dx = C$, $\forall t \in [0, T]$ в уравнении (6), $C > 0$.

Пусть $\tilde{m}(x, S, t)$ — наблюдаемая статистика плотности распределения домашних хозяйств на временном отрезке $[0, T]$. В данной работе исследуется задача воспроизведения статистической плотности распределения $\tilde{m}(x, S, t)$ с помощью уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (6), (7) за счет управления ликвидными средствами $M(t)$, т.е.

$$\frac{\partial m(x, S, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (S \sigma^2(x, S) m(x, S, t)) + \frac{\partial}{\partial S} (S m(x, S, t) \gamma(x, S)) + \frac{\partial}{\partial x} (m(x, S, t) f(x, S)) = 0, \quad (9)$$

$$m(x, S, 0) = \tilde{m}(x, S, 0), \quad (10)$$

$$J = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t))^2 dS dx dt \rightarrow \min_{M(x, S, t) \geq \mu(x, S, t)}, \quad (11)$$

где $\mu(x, S, t) = \theta(x, S, t) C_{\min}(t)$, $C_{\min}(t)$ — минимальное потребление в момент времени $t \in [0, T]$.

Для решения экстремальной задачи (9)–(11) необходимо выписать сопряженное уравнение. Пусть $v(x, S, t)$ — гладкая функция с компактным носителем. Построим лагранжиан экстремальной задачи (9)–(11), где в качестве множителя Лагранжа выступает функция $v(x, S, t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m, v) = & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} [\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t)]^2 dS dx dt + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} [m(x, S, T) v(x, S, T) - \\ & - \tilde{m}(x, S, 0) v(x, S, 0)] dS dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} m(x, S, t) \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial v}{\partial S} + f \frac{\partial v}{\partial x} \right] dS dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Замечание 2. Для получения лагранжиана (12) используется интегрирование по частям в уравнении Колмогорова–Фоккера–Планка.

Сопряженное уравнение для экстремальной задачи (9)–(11) имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial v}{\partial S} + f \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

с терминальным условием

$$v(x, S, T) = 0. \quad (14)$$

Представим алгоритм решения экстремальной задачи (9)–(11):

Шаг 1. Задаем начальное управление $M^0(x, S)$.

Шаг 2. Решаем уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (9), (10) в прямом времени.

Шаг 3. Решаем сопряженное уравнение (13), (14) в попятном времени.

Шаг 4. Находим новое управление $M^k(x, S)$, где $k \in \mathbb{N}$ – номер итерации:

$$M^k(x, S) := M^{k-1}(x, S) + hm \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{1}{\theta} + r_L \cdot \mathbb{I}_{M^{k-1} > x} + r_D \cdot \mathbb{I}_{M^{k-1} < x} \right),$$

где $h > 0$ – шаг сходимости,

$$\mathbb{I}_{a > b} = \begin{cases} 1, & \text{если } a > b, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Шаг 5. Переходим к шагу 2 до тех пор, пока не будет выполнен критерий останова

$$|\sqrt{J^k} - \sqrt{J^{k-1}}| < \varepsilon.$$

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

3.1. Разностная схема для уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка

Ограничим множество финансовых состояний x и множество доходов S . Пусть $x \in [-L_1, L_2]$, $S \in [S_1, S_2]$, где $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, $S_2 > S_1 \geq 0$. Разобьем диапазон финансовых состояний на $M + 1$ узлов, диапазон доходов на $H + 1$ узлов, временной отрезок на $N + 1$ узлов. Будем полагать, что все разбиения равномерны. Определим длины отрезков: $\Delta x = \frac{L_1 + L_2}{M}$, $\Delta S = \frac{S_2 - S_1}{H}$, $\Delta t = \frac{T}{N}$. Для адвективной части уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (9) мы используем противоточную схему Годунова первого порядка. Разностные схемы такого вида были успешно применены в работах [6–8].

Будем придерживаться следующих обозначений. Пусть $m_{j,k}^i$ характеризует значение функции $m(x, S, t)$ в точке $(j\Delta x, k\Delta S, i\Delta t)$, $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{1, H-1}$, $i = \overline{0, N}$. Разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (9) представляется в виде

$$\begin{aligned} m_{j,k}^{i+1} = & m_{j,k}^i + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \left(m_{j,k+1}^i S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k+1}^i)^2 - 2m_{j,k}^i S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 + m_{j,k-1}^i S_{k-1}^2 (\sigma_{j,k-1}^i)^2 \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left(m_{j,k+\frac{1}{2}}^i S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i - m_{j,k-\frac{1}{2}}^i S_{k-\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-\frac{1}{2}}^i \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(m_{j+\frac{1}{2},k}^i f_{j+\frac{1}{2},k}^i - m_{j-\frac{1}{2},k}^i f_{j-\frac{1}{2},k}^i \right), \end{aligned} \quad (15)$$

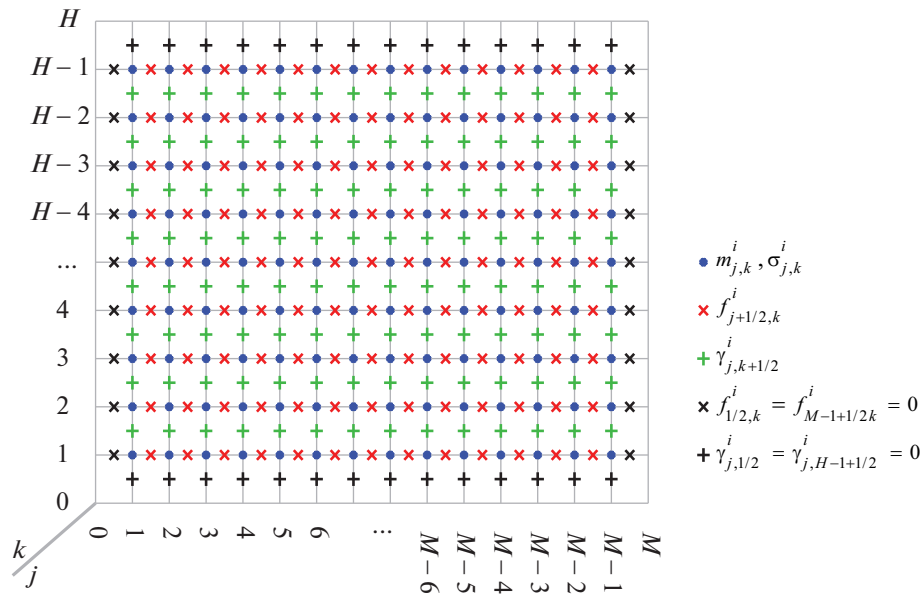
$$j = \overline{2, M-2}, \quad k = \overline{2, H-2}, \quad i = \overline{0, N-1},$$

где

$$m_{j,k+\frac{1}{2}}^i = \begin{cases} m_{j,k+1}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i < 0, \\ m_{j,k}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \geq 0, \end{cases} \quad m_{j+\frac{1}{2},k}^i = \begin{cases} m_{j+1,k}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0, \\ m_{j,k}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} f_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq 0. \end{cases}$$

Мы накладываем гомогенные условия Неймана на границе области: $f_{\frac{1}{2},k}^i = f_{M-1+\frac{1}{2},k}^i = \gamma_{j,\frac{1}{2}}^i = \gamma_{j,H-1+\frac{1}{2}}^i = 0$, и граничные условия $m_{j,1}^i = m_{j,H-1}^i = m_{1,k}^i = m_{M-1,k}^i = 0$, где $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{1, H-1}$, $i = \overline{0, N-1}$.

Схематично, разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка может быть представлена в следующем виде (фиг. 1).



Фиг. 1. Разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка.

Естественным требованием является неотрицательность плотности распределения. Выражение этого требования можно обеспечить за счет условий из следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $m^i \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (H-1)}$ является матрицей с неотрицательными компонентами. Пусть $\tilde{\sigma} = \max_{i \in I, j \in J, k \in K} \sigma_{j,k}^i$, где $I \in \{0, \dots, N-1\}$, $J \in \{1, \dots, M-1\}$, $K \in \{1, \dots, H-1\}$. Если выполнены ограничения (16), (17) на $f_{j+1/2,k}^i$, $j = \overline{1, M-2}$, $k \in K$, $i \in I$, и $\gamma_{j,k+1/2}^i$, $j \in J$, $k = \overline{1, H-2}$, $i \in I$, тогда матрица $m^{i+1} \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (H-1)}$ состоит из неотрицательных элементов.

$$\frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) \leq f_{j+1/2,k}^i \leq \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 \right), \quad (16)$$

$$\frac{\Delta S}{2S_{k+1/2}} \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) \leq \gamma_{j,k+1/2}^i \leq \frac{\Delta S}{2S_{k+1/2}} \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 \right), \quad (17)$$

где $\hat{S}_{k+1} = \min\{S_{k+1}, S_2\}$.

Доказательство. Зафиксируем i, j, k . Нам необходимо показать, что компоненты $m_{j-1,k}^i, m_{j,k+1}^i, m_{j,k}^i, m_{j,k-1}^i, m_{j+1,k}^i$ являются неотрицательными величинами. Для этого необходимо рассмотреть всевозможные комбинации знаков величин $f_{j+1/2,k}^i, f_{j-1+1/2,k}^i, \gamma_{j,k+1/2}^i, \gamma_{j,k-1+1/2}^i$. Легко видеть, что величины $f_{j+1/2,k}^i, f_{j-1+1/2,k}^i$ перемещаются горизонтально вдоль компонентов $m_{j-1,k}^i, m_{j,k}^i, m_{j+1,k}^i$ в зависимости от своих знаков, тогда как величины $\gamma_{j,k+1/2}^i, \gamma_{j,k-1+1/2}^i$ перемещаются вертикально вдоль компонентов $m_{j,k-1}^i, m_{j,k}^i, m_{j,k+1}^i$.

При компонентах $m_{j-1,k}^i, m_{j,k+1}^i, m_{j,k-1}^i, m_{j+1,k}^i$ знаки величин $f_{j+1/2,k}^i, f_{j-1+1/2,k}^i, \gamma_{j,k+1/2}^i, \gamma_{j,k-1+1/2}^i$, входящие со своими множителями в уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (15) положительны

(например, если $f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0$, тогда эта величина соответствует узлу $m_{j+1,k}^i$ и входит со множителем $-\frac{\Delta t}{\Delta x} < 0$, таким образом, знак в узле $m_{j+1,k}^i$ положителен).

Прежде чем переходить к рассмотрению значения $m_{j,k}^i$ в центральном узле (i, j, k) , рассмотрим подробнее лапласиан в уравнении (15). Пусть

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k+1}^i)^2, \quad \varphi_2 = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2, \quad \varphi_3 = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_{k-1}^2 (\sigma_{j,k-1}^i)^2.$$

Очевидно, что $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_3 \geq 0$. Величина $\varphi_2 \geq 0$ в соответствии с условиями Куранта о сходимости явной разностной схемы параболического уравнения (15) (см. [9]). Мы накладываем ограничения Куранта в виде $\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_2^2 < \frac{1}{2}$, где S_2 является правой границей фазового пространства S .

Теперь рассмотрим центральный узел (i, j, k) . Если мы докажем, что значение $m_{j,k}^i$ является неотрицательным для случая $f_{j+\frac{1}{2},k}^i > 0$, $f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i < 0$, $\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i > 0$, $\gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i < 0$, тогда для других возможных случаев сочетания знаков величин $f_{j+\frac{1}{2},k}^i$, $f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i$, $\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i$, $\gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i$ значение $m_{j,k}^i$ также будет неотрицательным. Рассмотрим компоненты $m_{j,k}^i$ для данного случая для узла (i, j, k) . Согласно ограничениям (16), (17) мы получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i + \frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i - \frac{\Delta t}{\Delta x} f_{j+\frac{1}{2},k}^i + \frac{\Delta t}{\Delta x} f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \geq \\ & \geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_k^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) - \\ & \quad - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) = \\ & = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \hat{S}_k^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{4} \geq \\ & \geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{4} \geq \\ & \geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}^2 \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что значения коэффициентов, соответствующие компонентам $m_{j-1,k}^i$, $m_{j,k+1}^i$, $m_{j,k}^i$, $m_{j,k-1}^i$, $m_{j+1,k}^i$, при ограничениях (16)–(17) являются неотрицательными. Лемма доказана.

3.2. Разностная схема для сопряженного уравнения

Прежде чем переходить к разностной схеме для сопряженного уравнения, отметим, что дискретное уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (15) может быть записано через индикаторные функции:

$$\begin{aligned} m_{j,k}^{i+1} = & m_{j,k}^i + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \left(m_{j,k+1}^i S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k+1}^i)^2 - 2m_{j,k}^i S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 + m_{j,k-1}^i S_{k-1}^2 (\sigma_{j,k-1}^i)^2 \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left(m_{j,k+1}^i S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i < 0} + m_{j,k}^i S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \geq 0} - \right. \\ & \left. - m_{j,k}^i S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i < 0} - m_{j,k-1}^i S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \geq 0} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(m_{j+1,k}^i f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0} + m_{j,k}^i f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq 0} - \right. \\
& \left. - m_{j,k}^i f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i < 0} - m_{j-1,k}^i f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \geq 0} \right),
\end{aligned}$$

где $j = \overline{2, M-2}$, $k = \overline{2, H-2}$, $i = \overline{0, N-1}$. Чтобы избавиться от громоздких выражений, для простоты введем следующие обозначения: пусть

$$\begin{aligned}
a_{j,k}^i &= S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k}^i)^2, \quad \bar{b}_{j,k+\frac{1}{2}}^i = S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i < 0}, \quad b_{j,k+\frac{1}{2}}^i = S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \geq 0}, \\
\bar{c}_{j+\frac{1}{2},k}^i &= f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0}, \quad c_{j+\frac{1}{2},k}^i = f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq 0}.
\end{aligned}$$

Тогда дискретная запись экстремальной задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{m_{j,k}^{i+1} - m_{j,k}^i}{\Delta t} - \frac{1}{2\Delta S^2} (m_{j,k+1}^i a_{j,k+1}^i - 2m_{j,k}^i a_{j,k}^i + m_{j,k-1}^i a_{j,k-1}^i) + \\
& + \frac{1}{\Delta S} \left(m_{j,k+1}^i \bar{b}_{j,k+\frac{1}{2}}^i + m_{j,k}^i \left(b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) - m_{j,k-1}^i b_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) + \\
& + \frac{1}{\Delta x} \left(m_{j+1,k}^i \bar{c}_{j+\frac{1}{2},k}^i + m_{j,k}^i \left(c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) - m_{j-1,k}^i c_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$m_{j,k}^0 = \tilde{m}_{j,k}^0, \tag{19}$$

$$J = \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{H-1} (\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i)^2 \rightarrow \min_{M_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq \theta_{j+\frac{1}{2},k}^i C_{\min}^i}. \tag{20}$$

С учетом нулевых граничных условий, лагранжиан к дискретной экстремальной задаче (18)–(20) имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(m, v) &= \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{H-1} (\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i)^2 + \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=2}^{M-2} \sum_{k=2}^{H-2} v_{j,k}^i \left[\frac{m_{j,k}^{i+1} - m_{j,k}^i}{\Delta t} - \right. \\
& - \frac{1}{2\Delta S^2} (m_{j,k+1}^i a_{j,k+1}^i - 2m_{j,k}^i a_{j,k}^i + m_{j,k-1}^i a_{j,k-1}^i) + \\
& + \frac{1}{\Delta S} \left(m_{j,k+1}^i \bar{b}_{j,k+\frac{1}{2}}^i + m_{j,k}^i \left(b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) - m_{j,k-1}^i b_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) + \\
& \left. + \frac{1}{\Delta x} \left(m_{j+1,k}^i \bar{c}_{j+\frac{1}{2},k}^i + m_{j,k}^i \left(c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) - m_{j-1,k}^i c_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) \right].
\end{aligned} \tag{21}$$

Выделим слагаемые с компонентами $m_{j,k}^i$. С учетом граничных условий на плотность распределения m и терминального условия на сопряженную функцию $v_{j,k}^{N-1} = 0$, $j = \overline{2, M-2}$, $k = \overline{2, H-2}$, лагранжиан (21) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(m, v) &= \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{H-1} (\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i)^2 + \\
& + \Delta t \Delta x \Delta S \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=3}^{M-3} \sum_{k=3}^{H-3} m_{j,k}^i \left[\frac{v_{j,k}^{i-1} - v_{j,k}^i}{\Delta t} - \frac{1}{2\Delta S^2} a_{j,k}^i (v_{j,k-1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k+1}^i) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta S} \left(\bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i v_{j,k-1}^i + \left(b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,k}^i - b_{j,k+\frac{1}{2}}^i v_{j,k+1}^i \right) + \\
& + \frac{1}{\Delta x} \left(\bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i v_{j-1,k}^i + \left(c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{j,k}^i - c_{j+\frac{1}{2},k}^i v_{j+1,k}^i \right) \Big] + \sum_{j=2}^{M-2} \sum_{k=2}^{H-2} \left[\frac{-m_{j,k}^0 v_{j,k}^0}{\Delta t} \right] - \\
& - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=2}^{M-2} \left[m_{j,H-2}^i a_{j,H-2}^i v_{j,H-3}^i - 2m_{j,2}^i a_{j,2}^i v_{j,2}^i - 2m_{j,H-2}^i a_{j,H-2}^i v_{j,H-2}^i + m_{j,2}^i a_{j,2}^i v_{j,3}^i \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta S} \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=2}^{M-2} \left[m_{j,H-2}^i \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i v_{j,H-3}^i + m_{j,2}^i \left(b_{j,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,1+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,2}^i + \right. \\
& \quad \left. + m_{j,H-2}^i \left(b_{j,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,H-2}^i + m_{j,2}^i b_{j,2+\frac{1}{2}}^i v_{j,3}^i \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{k=2}^{H-2} \left[m_{M-2,k}^i \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},k}^i v_{M-3,k}^i + m_{2,k}^i \left(c_{2+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{2,k}^i + \right. \\
& \quad \left. + m_{M-2,k}^i \left(c_{M-2+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{M-2,k}^i + m_{2,k}^i c_{2+\frac{1}{2},k}^i v_{3,k}^i \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

Откуда получаем уравнение на сопряженную переменную в попятном времени

$$\begin{aligned}
v_{j,k}^{i-1} &= v_{j,k}^i + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} a_{j,k}^i \left(v_{j,k-1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k+1}^i \right) - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left(\bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i v_{j,k-1}^i + \left(b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,k}^i - b_{j,k+\frac{1}{2}}^i v_{j,k+1}^i \right) - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i v_{j-1,k}^i + \left(c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{j,k}^i - c_{j+\frac{1}{2},k}^i v_{j+1,k}^i \right) + 2\Delta t \left(\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i \right), \\
& i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{3, M-3}, \quad k = \overline{3, H-3},
\end{aligned} \tag{22}$$

терминальное условие

$$v_{j,k}^{N-1} = 0, \quad j = \overline{2, M-2}, \quad k = \overline{2, H-2}, \tag{23}$$

а также граничные условия. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
h_3^{1,i} &= \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},3}^i, \quad h_{H-3}^{1,i} = \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-3}^i, \quad h_3^{2,i} = \frac{1}{\Delta x} \left(c_{M-2+\frac{1}{2},3}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},3}^i \right), \\
h_{H-3}^{2,i} &= \frac{1}{\Delta x} \left(c_{M-2+\frac{1}{2},H-3}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-3}^i \right), \quad \tilde{h}_3^{1,i} = \frac{1}{\Delta x} \left(c_{2+\frac{1}{2},3}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},3}^i \right), \\
\tilde{h}_{H-3}^{1,i} &= \frac{1}{\Delta x} \left(c_{2+\frac{1}{2},H-3}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},H-3}^i \right), \quad h_3^{2,i} = -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},3}^i, \quad h_{H-3}^{2,i} = -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},H-3}^i, \\
g_{2,H-3}^i &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \bar{b}_{2,H-3+\frac{1}{2}}^i, \quad g_{2,3}^i = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,2}^i - \frac{1}{\Delta S} b_{2,2+\frac{1}{2}}^i, \\
g_{2,H-2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{2,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{2,H-3+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(c_{2+\frac{1}{2},H-2}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},H-2}^i \right), \\
g_{2,2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{2,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{2,1+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(c_{2+\frac{1}{2},2}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},2}^i \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{3,H-2}^i &= -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},H-2}^i, & g_{3,2}^i &= -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},2}^i, \\
g_{M-2,H-3}^i &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \bar{b}_{M-2,H-3+\frac{1}{2}}^i, \\
g_{M-2,3}^i &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,2}^i - \frac{1}{\Delta S} b_{M-2,2+\frac{1}{2}}^i, \\
g_{M-2,H-2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{M-2,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{M-2,H-3+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(c_{M-2+\frac{1}{2},H-2}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-2}^i \right), \\
g_{M-2,2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{M-2,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{M-2,1+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(c_{M-2+\frac{1}{2},2}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},2}^i \right), \\
g_{M-3,H-2}^i &= \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-2}^i, & g_{M-3,2}^i &= \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},2}^i, \\
g_{j,H-3}^i &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i, & j &= \overline{3, M-3}, \\
g_{j,3}^i &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,2}^i - \frac{1}{\Delta S} b_{j,2+\frac{1}{2}}^i, & j &= \overline{3, M-3}, \\
g_{j,H-2}^i &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{j,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i \right), & j &= \overline{3, M-3}, \\
g_{j,2}^i &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{j,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,1+\frac{1}{2}}^i \right), & j &= \overline{3, M-3}, \\
r_{j,k}^i &= 2(\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i).
\end{aligned}$$

Тогда граничные условия задаются следующим образом:

$$v_{M-3,H-2}^{i-1} = \frac{r_{M-3,H-2}^{i-1} - g_{M-3,H-3}^{i-1} v_{M-3,H-3}^i}{g_{M-3,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (24)$$

$$v_{M-3,2}^{i-1} = \frac{r_{M-3,2}^{i-1} - g_{M-3,3}^{i-1} v_{M-3,3}^i}{g_{M-3,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (25)$$

$$v_{M-2,H-3}^{i-1} = \frac{r_{M-2,H-3}^{i-1} - h_{H-3}^{1,i-1} v_{M-3,H-3}^i}{h_{H-3}^{2,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (26)$$

$$v_{M-2,3}^{i-1} = \frac{r_{M-2,3}^{i-1} - h_3^{1,i-1} v_{M-3,3}^i}{h_3^{2,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (27)$$

$$v_{M-2,H-2}^{i-1} = \frac{r_{M-2,H-2}^{i-1} - g_{M-2,H-3}^{i-1} v_{M-2,H-3}^i - g_{M-3,H-2}^{i-1} v_{M-3,H-2}^i}{g_{M-2,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (28)$$

$$v_{M-2,2}^{i-1} = \frac{r_{M-2,2}^{i-1} - g_{M-2,3}^{i-1} v_{M-2,3}^i - g_{M-3,2}^{i-1} v_{M-3,2}^i}{g_{M-2,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (29)$$

$$v_{2,H-3}^{i-1} = \frac{r_{2,H-3}^{i-1} - \tilde{h}_{H-3}^{2,i-1} v_{3,H-3}^i}{\tilde{h}_{H-3}^{1,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (30)$$

$$v_{2,3}^{i-1} = \frac{r_{2,3}^{i-1} - \tilde{h}_3^{2,i-1} v_{3,3}^i}{\tilde{h}_3^{1,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (31)$$

$$v_{3,H-2}^{i-1} = \frac{r_{3,H-2}^{i-1} - g_{3,H-3}^{i-1} v_{3,H-3}^i}{g_{3,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (32)$$

$$v_{3,2}^{i-1} = \frac{r_{3,2}^{i-1} - g_{3,3}^{i-1} v_{3,3}^i}{g_{3,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (33)$$

$$v_{2,H-2}^{i-1} = \frac{r_{2,H-2}^{i-1} - g_{2,H-3}^{i-1} v_{2,H-3}^i - g_{3,H-2}^{i-1} v_{3,H-2}^i}{g_{2,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (34)$$

$$v_{2,2}^{i-1} = \frac{r_{2,2}^{i-1} - g_{2,3}^{i-1} v_{2,3}^i - g_{3,2}^{i-1} v_{3,2}^i}{g_{2,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (35)$$

Таким образом, сопряженное уравнение задается динамическим уравнением (22), терминальным условием (23) и краевыми условиями (24)–(35).

Замечание 3. Если знаменатель обращается в ноль в уравнениях (24)–(35), то это соответствует нулевой плотности распределения в данной точке, и значение сопряженной переменной может быть любым. Для определенности будем считать, что сопряженная переменная в этой точке равна нулю.

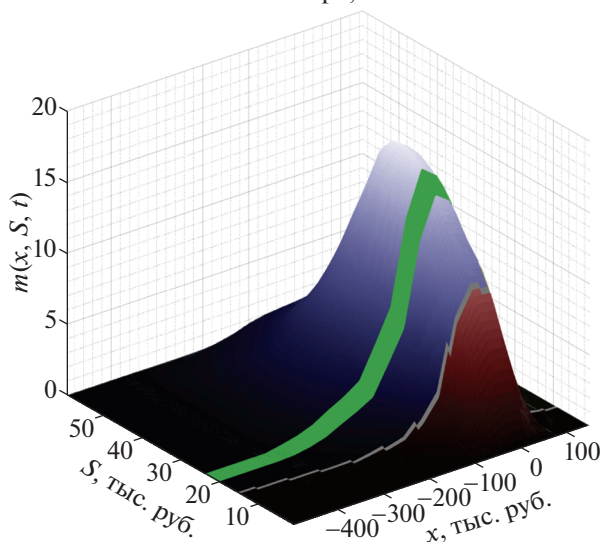
4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Статистические данные ОБДХ собираются Росстатом ежеквартально и охватывают около 50000 домашних хозяйств из 82 регионов России. На основе данных по уровню потребления на душу населения эти регионы были разделены на 3 группы: богатую, среднюю и бедную. Согласно статистике ОБДХ, около половины домашних хозяйств из бедной группы регионов проживают в городском типе населенного пункта, а оставшееся половина в селе. Поскольку стиль жизни в городе отличается от села, то данная группа регионов была разделена еще на две. В каждой группе регионов выделяются слои населения с разными уровнями доходов и расходов.

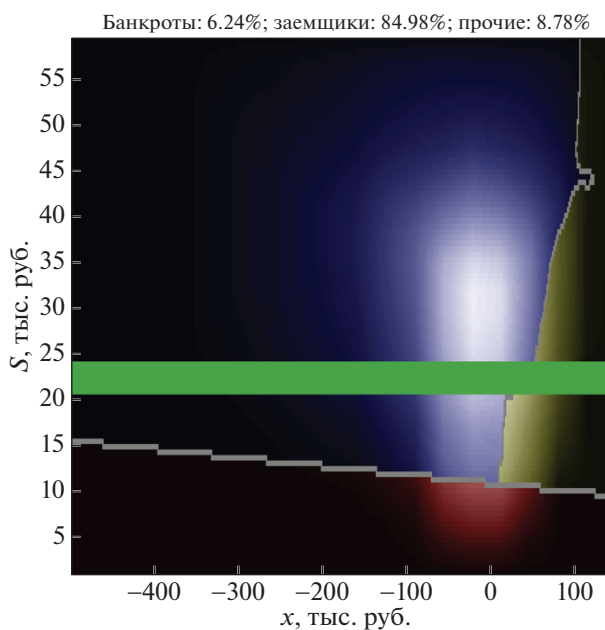
Среди участников опроса ОБДХ мы выделили заемщиков в каждой группе регионов. Заемщики делятся на два типа: низкодоходные и высокодоходные. Они имеют разные поведенческие параметры, такие как скорость обращения денег $\frac{1}{\theta}$, темп роста доходов γ , параметр волатильности доходов σ . Граница разделения заемщиков на низкодоходных и высокодоходных проводится с помощью программного комплекса [10]. Чтобы обеспечить непрерывность этих параметров, вводится “серая зона”, центром которой является граница разделения заемщиков, склеивающая параметры θ , σ , γ по непрерывности.

Участники опроса ОБДХ меняются каждый год, но в течение каждого года опрашиваются одни и те же домашние хозяйства. Исходя из этого, алгоритм идентификации статистической плотности распределения проводился в каждом году независимо с 2015 по 2020 г. В качестве примера рассмотрим домашние хозяйства, проживающие в средней группе регионов в 2020 г. Статистическую плотность распределения построим на плоскости S , x , основываясь практически на 5000 домашних хозяйств, которые оказались заемщиками из средней группы регионов. Обозначим через D_1 низкодоходных заемщиков, а через D_2 – высокодоходных. Пусть $\sigma_{D_1} = 0.01$, $\sigma_{D_2} = 0.02$, $\theta_{D_1} = 1$, $\theta_{D_2} = 3$. Для удобства масштабирования денежные единицы будем понимать в тысячах рублей. Параметры сетки: $L_1 = 500$, $L_2 = 150$, $S_1 = 0$, $S_2 = 60$, $M = 400$, $H = 100$, $N = 100$. Временной горизонт $T = 1$, параметры оптимизационного алгоритма $h = 4$, $\varepsilon = 10^{-4}$. Ограничим вариацию управления на каждой итерации величиной 0.2. Оптимизацию будем проводить в области платежеспособных заемщиков, в случае, если домашнее хозяйство находится в области банкротства, мы считаем, что его потребление находится на минимуме. Функционал экстремальной задачи также рассматривается на области платежеспособных заемщиков.

Январь, 2020

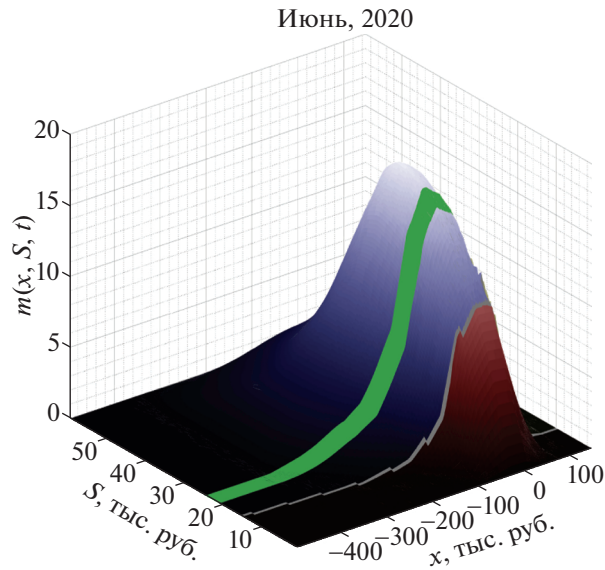


Фиг. 2. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в январе 2020 г.

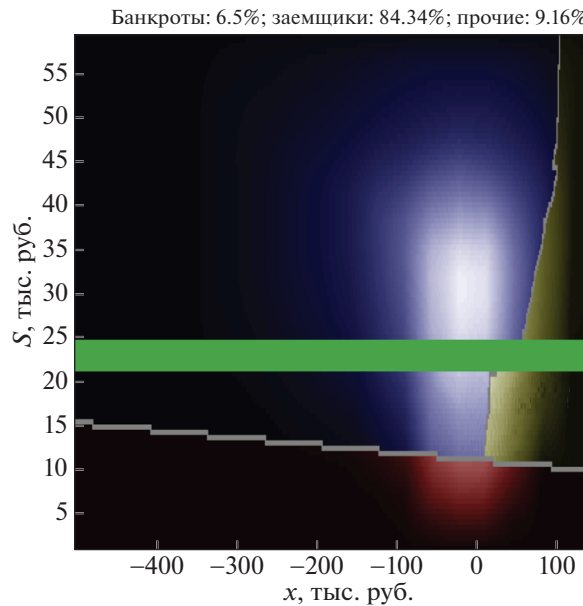


Фиг. 3. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в январе 2020 г. (вид сверху).

На фиг. 2–7 представлены расчетные данные, полученные с помощью решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка в различные временные периоды 2020 г. На фиг. 2, 4, 6 показаны плотности распределения в трехмерном отображении, а на фиг. 3, 5, 7 – в проекции на плоскость доходов и финансового состояния. Синим цветом изображены заемщики, красным – банкроты, которые не имеют возможности расплатиться с потребительским кредитом при текущей экономической ситуации. Оранжевым изображены домашние хозяйства, которые не берут займы по потребительскому кредиту. Зеленая полоса вдоль оси x – “серая зона”, склеивающая до непрерывности параметры низкодоходных и высокодоходных заемщиков.



Фиг. 4. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в июне 2020 г.

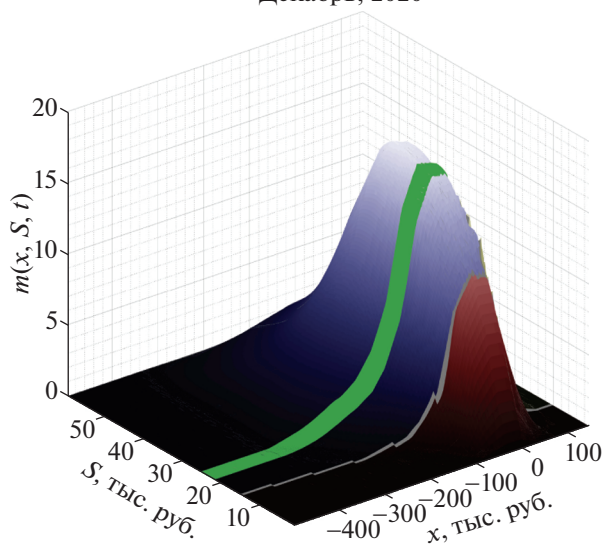


Фиг. 5. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в июне 2020 г. (вид сверху).

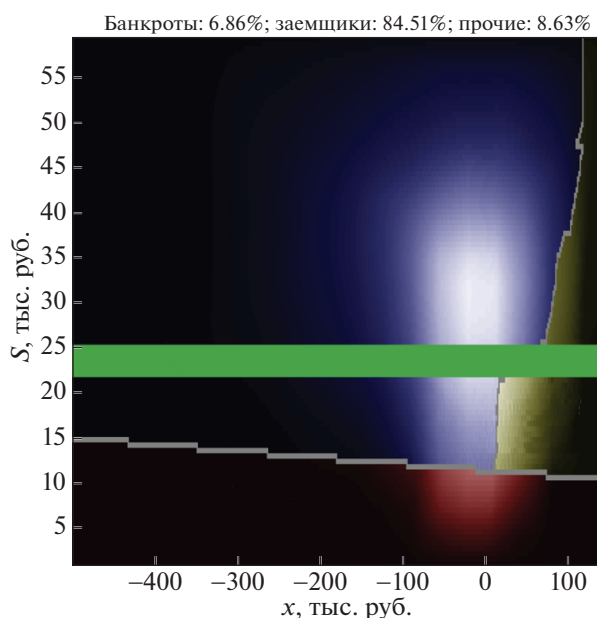
Для данного примера среднее отклонение плотности распределения, полученной при решении уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка, по сравнению со статистической плотностью распределения составляет 9.4%, т.е.

$$\frac{\int_0^T \int_{\Omega} |\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t)| dx dS dt}{\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{m}(x, S, t) dx dS dt} = 0.094,$$

Декабрь, 2020



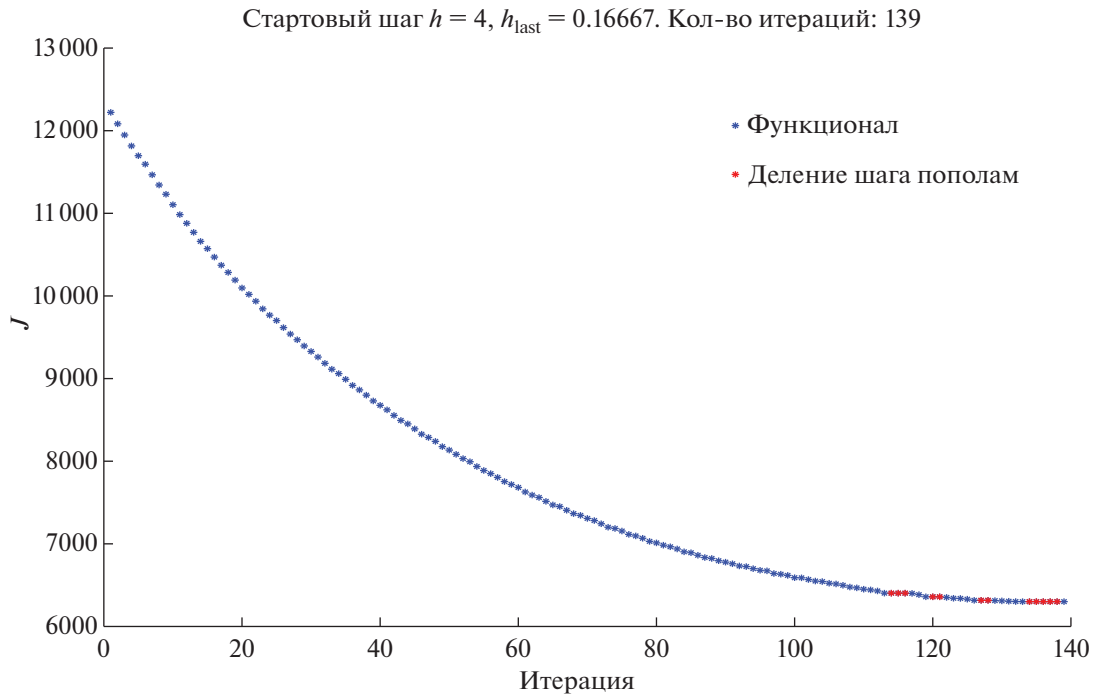
Фиг. 6. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в декабре 2020 г.



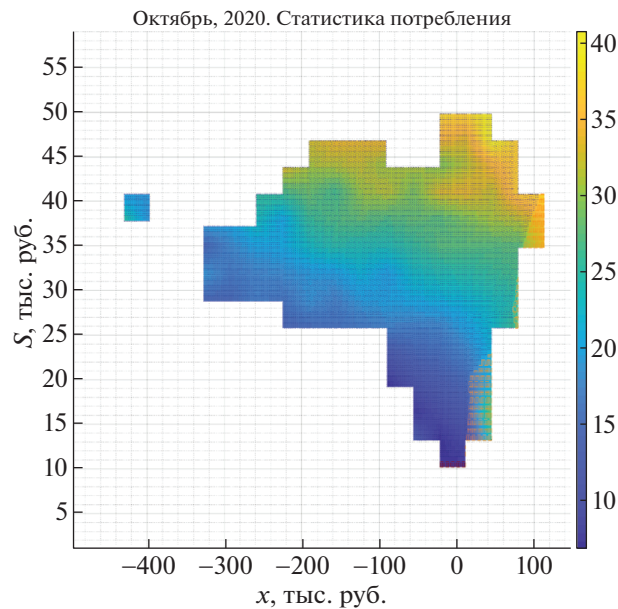
Фиг. 7. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в декабре 2020 г. (вид сверху).

где Ω — область платежеспособных заемщиков на плоскости x и S . Средние отклонения для остальных групп регионов на всех рассматриваемых периодах представлены в Приложении.

Отметим, что для данного примера были проведены 139 итераций алгоритма поиска минимизатора, представленного в разд. 2. Поскольку мы ищем локальный экстремум задачи, нет гарантии монотонности итерационного алгоритма. В случае нарушения монотонности, воспроизводится предыдущая итерация и делится шаг сходимости h пополам. Динамика итерационной сходимости представлена на фиг. 8.

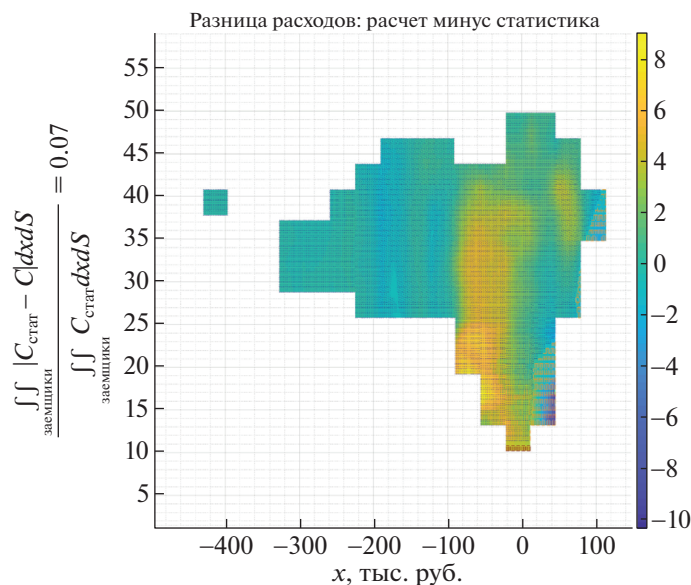


Фиг. 8. Значение функционала экстремальной задачи в зависимости от номера итерации оптимизационного алгоритма.

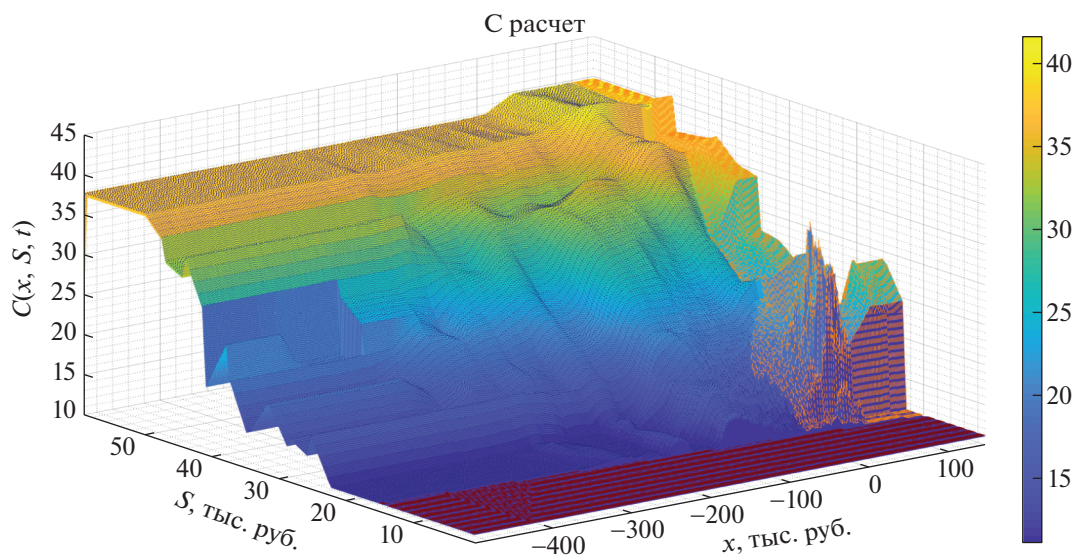


Фиг. 9. Статистическое потребление по данным ОБДХ.

Представим значение потребления, полученного при решении экстремальной задачи и сравним его со статистическими данными в октябре 2020 г. (см. фиг. 9–11). Как видно, найденное потребление сопоставляется со статистическими данными, погрешность составляет порядка 7%.



Фиг. 10. Разница рассчитанного потребления и статистического.



Фиг. 11. Рассчитанное потребление.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовался вопрос согласованности статистических данных ОБДХ с динамикой плотности распределения домашних хозяйств по доходам и финансовым состояниям с решением уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка. Множество всевозможных решений уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка формирует подпространство, на которое искалась проекция статистических данных. Задача формализована в виде экстремальной, представлен итерационный алгоритм поиска проекции, построены соответствующие разностные схемы. Численные результаты демонстрируют возможность описания эволюции экономического поведения домашних хозяйств с помощью уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка на качественном уровне.

Темой для дальнейшего исследования может служить использование построенной проекции в качестве входных данных для определения поведенческих характеристик домашних хозяйств: отвращения к риску и коэффициента дисконтирования, как это было реализовано для репрезентативного домашнего хозяйства (см. [2]); настройка поведенческих характеристик домашних хозяйств для идентификации полученного потребления в разрезе социальных слоев на региональном уровне, построение прогнозных сценариев.

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю, Александру Алексеевичу Шананину за руководство и помощь в исследовании стохастических задач рамсеевского типа.

Приложение

Отклонение от статистических данных.

Таблица 1.
$$\frac{\int_0^T \int_{\Omega} |\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t)| dx dS dt}{\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{m}(x, S, t) dx dS dt}$$

Год	Бедная группа регионов, город	Бедная группа регионов, село	Средняя группа регионов	Богатая группа регионов
2015	8.5%	12.3%	10.3%	7.5%
2016	9.3%	11.3%	9.2%	12.5%
2017	9.6%	8.4%	11.4%	9%
2018	10.2%	7.4%	7.3%	9%
2019	8.9%	11.3%	8.3%	7.3%
2020	11.2%	8.6%	9.4%	13.3%

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ramsey F.P. A mathematical theory of savings // The Economic Journal. 1928. V. 152. № 38. P. 543–559.
2. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 1034–1056.
3. Shanani A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V. Consumer Loan Demand Modeling // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. 2021. CCIS. V. 1476. P. 417–428.
4. Shanani A.A., Trusov N.V. The household behaviour modelling based on Mean Field Games approach // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. № 7. P. 1738–1752.
5. Обследование бюджетов домашних хозяйств [Электронный ресурс] / Федеральная служба государственной статистики. 2015–2020. <https://obdx.gks.ru/> (дата обращения: 15.10.2022)
6. Lachapelle A., Salomon J., Turinici G. Computation of Mean Field equilibria in economics // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2010. V. 20. P. 567–588.
7. Trusov N. Numerical solution of Mean Field Games problems with turnpike effect // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 4. P. 559–573.
8. Trusov N. Numerical study of the stock market crises based on mean field games approach. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2021. V. 29. № 6. P. 849–865.
9. Гулин А.В., Самарский А.А. Численные методы. Москва, 1989.
10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No. 2022619524. “Анализ спроса на потребительский кредит в РФ”. Правообладатель: Трусов Николай Всеволодович. Заявка No. 2022618580. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2022 г.