ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 3, с. 474–490

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.862

ВЕКТОР ШЕПЛИ ОДНОРОДНЫХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР[1)]

© 2023 г. В. А. Васильев[1,*]

[1] 630090 Новосибирск, пр-т акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

*e-mail: vasilev@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 20.08.2022 г.
Переработанный вариант 09.09.2022 г.
Принята к публикации 17.11.2022 г.

Для полиномиальных кооперативных игр дается описание интегрального представления вектора Шепли. Это представление осуществляется с помощью так называемого функционала Шепли. Анализируется взаимосвязь предложенного варианта вектора Шепли и полярных форм однородных полиномиальных игр как для конечного, так и для бесконечного числа участников. Особое внимание уделяется некоторым классам однородных кооперативных игр, порожденных произведениями неатомических мер. Отличительной чертой предлагаемого подхода является систематическое использование продолжений полиномиальных функций множества до отвечающих им мер на симметрических степенях исходных измеримых пространств. Библ. 19.

Ключевые слова: вектор Шепли, функционал Шепли, однородная кооперативная игра, полярная форма однородной игры, v-интеграл.

DOI: 10.31857/S0044466923030122, **EDN:** EBLFKN

ВВЕДЕНИЕ

К числу главных задач теории кооперативных игр относятся конструирование и анализ различных арбитражных схем, реализующих принципы справедливого распределения гарантированного дохода $v(Q)$ “большой” коалиции Q между участниками игры $\Gamma = \langle Q, \Sigma, v\rangle$. При этом важнейшим условием является максимальный учет возможностей “малых” коалиций участников, описываемых алгеброй Σ. Одна из наиболее популярных арбитражных схем состоит в использовании так называемого *вектора Шепли* $\Phi(v)$ (см. [1], [2]) (в литературе применяется также синоним *значение Шепли*, см. [3–5]). Исследованию вектора Шепли неатомических игр, моделирующих условия совершенной конкуренции, посвящена фундаментальная монография [3]. Здесь, как и в ряде работ других авторов (см., например, [6] и имеющуюся там обширную библиографию), анализируются, преимущественно, специальные классы игр, порожденные суперпозициями вида $v = f \circ \mu$, где f — вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0,1]$, непрерывная в его концах и принимающая нулевое значение в точке 0, а μ — неатомическая вероятностная мера на борелевской σ-алгебре этого отрезка.

В настоящей работе не накладывается никаких специальных ограничений на способ порождения рассматриваемых классов игр. Предлагаемый подход основан на анализе полиномиальных игр в рамках теории K-пространств Л.В. Канторовича (см. [7], [8], а также [9]). Используя традиционную теоретико-игровую терминологию (см. [1], [3]), под кооперативной игрой всюду далее понимается упоминавшийся уже объект вида $\Gamma = \langle Q, \Sigma, v\rangle$, где Q — некоторое непустое множество, Σ — какая-либо алгебра его подмножеств, а v — функция, заданная на алгебре Σ. Элементы множества Q называются игроками, а подмножества $e \subseteq Q$, принадлежащие алгебре Σ, — коалициями игроков. Значения функции v на элементах алгебры Σ трактуются как максимальный гарантированный доход соответствующих коалиций. Говоря нестрого, исследуемый в работе вектор Шепли представляет собой специальный линейный оператор, сопоставляющий некоторым кооперативным играм Γ один из разумных вариантов распределения их максимального

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 19-10-00910) и программы фундаментальных научных исследований СО РАН (номер темы FWNF-2022-0019) и РФФИ (грант 19-10-00910).

дохода $v(Q)$, достигнутого совместными усилиями участников "большой" коалиции Q. Что касается формальной стороны, то излагаемые в следующих разделах результаты относятся к интегральным представлениям вектора Шепли (см. [5], [10]), облегчающим его отыскание для широкого класса кооперативных игр. Эти результаты получены как для конечного, так и бесконечного числа игроков. В последнем случае особое внимание уделяется однородным играм, порожденным произведениями неатомических вероятностных мер. Продолжаются исследования взаимосвязи между вектором Шепли и полярными формами однородных игр, начатые в [2], [11], [12]. Главный акцент делается на вычислительных аспектах (для некоторых важных случаев даются новые формулы, определяющие вектор Шепли как достаточно простую функцию параметров, задающих рассматриваемую кооперативную игру). Основные из используемых результатов, полученных в предыдущих работах [2], [5], [13], как правило, снабжены более короткими, упрощенными доказательствами. Кроме того, приводятся усовершенствованные критерии однородности как в общем случае, так и для некоторых специальных классов игр.

Главной отличительной чертой предлагаемого подхода к исследованию вектора Шепли однородных кооперативных игр является систематическое использование продолжений рассматриваемых полиномиальных функций множества до отвечающих им мер на симметрических степенях исходных измеримых пространств.

1. ОДНОРОДНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

1.1. KB-пространство V и его подпространства $V^n, V^{(n)}$ и pV

Переходя к описанию изучаемых классов игр, введем необходимые понятия и обозначения. Положим $\mathcal{V} = \{v : \Sigma \to \mathbb{R} \mid v(\varnothing) = 0\}$. Пусть e — произвольный элемент алгебры Σ. Обозначим $H(e)$ совокупность всех конечных Σ-измеримых разбиений множества e. Согласно определению, каждый элемент $\eta \in H(e)$ имеет вид $\eta = \{e_a\}_A$, где A — какое-либо непустое конечное множество, все e_a принадлежат алгебре Σ, $e_a \cap e_{a'} = \varnothing$ при $a \neq a'$ и, наконец, выполняется равенство

$$\bigcup\nolimits_{a \in A} e_a = e.$$

Положим $H = \bigcup\nolimits_{e \in \Sigma} H(e)$ и для каждого разбиения $\eta = \{e_a\}_A \in H$ и функции $v \in \mathcal{V}$ определим ее полиномиальную разность $v(\eta) = v(\{e_a\}_A)$ формулой

$$v(\eta) := \sum_{\omega \subseteq A} (-1)^{|A \setminus \omega|} v\left(\bigcup_{a \in \omega} e_a\right) \tag{1.1}$$

(здесь и далее $|A \setminus \omega|$ — число элементов конечного множества $A \setminus \omega$). Величину $|A|$ будем называть порядком разности $v(\{e_a\}_A)$.

Отметим сразу же два полезных тождества (см. [2]): при $m \geq 3$ и $A = \{1, \ldots, m-1, m, m+1\}$ для любой полиномиальной разности $v(\{e_a\}_A)$ выполняется соотношение

$$v(\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}) = v(\{e_1, \ldots, e_{m-1}, e_m \cup e_{m+1}\}) - v(\{e_1, \ldots, e_{m-1}, e_m\}) - v(\{e_1, \ldots, e_{m-1}, e_{m+1}\}). \tag{1.2}$$

Кроме того, для любых $e \in \Sigma$ и $\eta = \{e_a\}_A \in H(e)$ справедливы равенства

$$v(e) = \sum_{\omega \subseteq A} v(\eta^{\omega}), \quad v \in \mathcal{V}, \tag{1.3}$$

где $\eta^{\omega} = \{e_a\}_{\omega}$ — разбиения множеств $\bigcup\nolimits_{a \in \omega} e_a$, а величины $v(\eta^{\omega})$ определяются, согласно формуле (1.1), равенствами

$$v(\eta^{\omega}) = \sum_{\omega' \subseteq \omega} (-1)^{|\omega \setminus \omega'|} v\left(\bigcup_{a \in \omega'} e_a\right), \quad \omega \subseteq A.$$

Далее $\Omega(\eta)$ обозначает множество индексов разбиения $\eta = \{e_a\}_A \in H$:

$$\Omega(\eta) = A, \quad \eta = \{e_a\}_A \in H.$$

Определение 1 (см. [14]). Величину

$$\|v\|_0 = \sup\left\{\sum_{\omega\subseteq\Omega(\eta)} |v(\eta^\omega)| \,|\, \eta \in H(Q)\right\}$$

будем называть *полиномиальной вариацией функции* v. Будем говорить, что функция $v \in V$ имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если $\|v\|_0 < \infty$. Положим

$$V = \{v \in \mathcal{V} \,|\, \|v\|_0 < \infty\}.$$

Опишем конус вполне положительных функций, наделяющий векторное пространство V с нормой $\|\cdot\|_0$ структурой KB-пространства.

Определение 2 (см. [14]). Будем говорить, что функция $v \in \mathcal{V}$ *вполне положительна*, если ее полиномиальные разности неотрицательны: $v(\eta) \geq 0$ для всех $\eta \in H$. Выпуклый конус вполне положительных функций $v \in \mathcal{V}$ обозначим V_+.

Ясно, что конус V_+ содержится в V и определяемый им (частичный) порядок

$$u \geq_0 v \Leftrightarrow u - v \in V_+$$

вместе с нормой $\|\cdot\|_0$ и операциями поточечного сложения и умножения функций наделяет пространство V структурой нормированного полуупорядоченного кольца. Более того, пространство V представляет собой KB-кольцо (см. [14]). В частности, оно является условно-полным относительно полуупорядоченности $\geq_0$. При этом норма $\|\cdot\|_0$ совместима с частичным порядком: монотонная (o)-сходимость $v_n \downarrow 0$ $(v_n \uparrow \infty)$ влечет монотонную сходимость $\|v_n\|_0 \downarrow 0$ $(\|v_n\|_0 \uparrow \infty)$ в нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|_0)$.

Далее основную роль играют так называемые полиномиальные функции множества из V, представляющие собой аналоги полиномиальных функционалов на векторных пространствах (см. [15]).

Определение 3 (см. [12]). Функцию $v \in V$ будем называть *полиномиальной порядка n*, если все ее полиномиальные разности порядка $n+1$ обращаются в нуль:

$$v(\{e_a\}_A) = 0, \quad \{e_a\}_A \in H, \quad |A| = n+1.$$

Совокупность всех таких функций обозначим V^n.

Отметим сразу же, что V^1 – обычное пространство конечно-аддитивных мер ограниченной вариации. При этом норма полиномиальной вариации $\|\cdot\|_0$ совпадает на V^1 с классической нормой полной вариации $\|\cdot\|$:

$$\|v\| = \sup\left\{\sum_{a\in\Omega(\eta)} |v(e_a)| \,|\, \eta = \{e_a\}_A \in H(Q)\right\},$$

а бинарное отношение $\geq_0$ в V^1 – с обычным порядком $\geq$:

$$u \geq v \Leftrightarrow u(e) \geq v(e), \quad e \in \Sigma.$$

Кроме того, на основании (1.2) имеем: из полиномиальности функции v порядка n вытекает ее полиномиальность любого порядка $m > n$ (т.е. справедливы вложения $V^n \subseteq V^m$ для всех $m > n$).

Определение 4 (см. [13]). Положим $pV = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. Элементы семейства pV будем называть *полиномиальными функциями множества*.

Следуя стандартным обозначениям теории векторных решеток, для каждой функции $v \in V$ определим ее положительную, отрицательную и полную вариации

$$v^+ = v \vee 0, \quad v^- = (-v) \vee 0, \quad |v| = (-v) \vee v$$

соответственно (здесь, как обычно, $u \vee w$ $(u \wedge w)$ обозначают точную верхнюю (нижнюю) грань множества $\{u, w\}$ в пространстве $(V, \geq_0)$).

Замечание 1. Из того, что V является KB-пространством, на основании общей теории векторных решеток получаем, что справедливо разложение

$$v = v^+ - v^- \quad \text{для каждой функции} \quad v \in V. \tag{1.4}$$

При этом непосредственно из определения положительной (v^+) и отрицательной (v^-) вариаций имеем $u \geq_0 v^+$, $w \geq_0 v^-$ для любых $u, w \in V_+$ таких, что $v = u - w$. Отсюда, учитывая равенства $|v| = v^+ + v^-$ и $v^+ \wedge v^- = 0$ (вытекающие из того, что V — векторная решетка), нетрудно получить следующие выражения для полиномиальной вариации v:

$$\|v\|_0 = |v|(Q) = \inf\{u(Q) + w(Q) \,|\, u - w = v,\, u, w \in V_+\}.$$

Определение 5 (см. [13], [14]). Будем говорить, что функция $v \in V^n$ является *однородной порядка n*, если она дизъюнктна с пространством V^{n-1} (т.е. $|v| \wedge |u| = 0$ для всех $u \in V^{n-1}$). Совокупность всех однородных порядка n полиномиальных функций множества обозначим $V^{(n)}$. (Здесь и далее $V^0 = V^{(0)} := \{0\}$.)

Замечание 2. Подчеркнем, что однородность функции множества в смысле определения 5 кардинально отличается от однородности степени 1, рассматривающейся в [3]. Типичным примером функций множества однородных степени 1 являются, например, суперпозиции вида $v = f \circ \mu$, где μ есть неатомическая мера на борелевской σ-алгебре отрезка $[0,1]$, а f — вещественная функция, дифференцируемая на области R значений меры μ и однородная степени 1 (т.е. такая, что $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для всех $\alpha \in [0,1]$ и $x \in R$). В то же время степени μ^k указанной меры μ, будучи однородными для всех $k > 1$ в смысле определения 5, заведомо не являются однородными степени 1 (см. [3, § 26]).

Напомним (см. [7]), что два элемента x, y векторной решетки X называются дизъюнктными (обозначение xdy), если $|x| \wedge |y| = 0$. Далее, элемент x называется дизъюнктным с множеством $E \subseteq X$ (обозначение xdE), если xdy для каждого $y \in E$. Напомним еще, что всякая архимедова векторная решетка X является дистрибутивной структурой (см., например, [7, теорема III.5.1] или [9, теорема 6.8]). Следовательно, в условно-полной векторной решетке $(V, \geq_0)$ выполняется соотношение

$$(u \vee v) \wedge w = (u \wedge w) \vee (v \wedge w) \quad \text{для всех} \quad u, v, w \in V. \tag{1.5}$$

Используя дистрибутивный закон (1.5), приведем простую, но полезную в дальнейшем детализацию определения однородности функций из pV.

Предложение 1. *Функция $v \in V^n$ является однородной порядка n тогда и только тогда, когда выполняются соотношения*

$$v^+ dV_+^{n-1}, \quad v^- dV_+^{n-1}. \tag{1.6}$$

(Всюду далее для любого подмножества $W \subseteq V$ полагаем $W_+ = W \cap V_+$.)

Доказательство. Как уже отмечалось (замечание 1), для любой функции $v \in V$ ее положительная и отрицательная вариации дизъюнктны: $v^+ dv^-$. Поэтому (см. [7]) справедливы соотношения $|v| = v^+ + v^- = v^+ \vee v^-$ для всех $v \in V$. Следовательно, для любых функций $v \in V$ и $u \in V_+$ выполняются неравенства

$$0 \;{}_0{\leq}\; v^+ \wedge u \;{}_0{\leq}\; |v| \wedge u, \quad 0 \;{}_0{\leq}\; v^- \wedge u \;{}_0{\leq}\; |v| \wedge u.$$

Отсюда при $v \in V^{(n)}$ и $u \in V_+^{n-1}$ получаем требуемое: $v^+ du$ и $v^- du$ для всех $u \in V_+^{n-1}$.

С другой стороны, если для функции $v \in V^n$ выполняются соотношения (1.6), в силу закона дистрибутивности (1.5) имеем

$$|v| \wedge u = (v^+ \vee v^-) \wedge u = (v^+ \wedge u) \vee (v^- \wedge u) = 0$$

для всех $u \in V_+^{n-1}$. Значит, v однородна порядка n. Предложение 1 доказано.

В дальнейшем используются следующие свойства пространств V^n, $V^{(n)}$ и pV.

Предложение 2 (см. [14]). *Кольцо pV является нормальной подрешеткой (идеалом) пространства V (т.е. $v \in pV$ и $|v| \geq_0 |u|$ влечет $u \in pV$).*

Предложение 3 (см. [13], [14]). *Для всех $n \geq 1$ пространства V^n и $V^{(n)}$ являются замкнутыми компонентами (полосами) V (т.е. идеалами, замкнутыми относительно (о)-сходимости). В частности, для каждой функции $v \in V$ и для каждого $m \geq 1$ существует проекция $v_{(m)}$ на $V^{(m)}$:*

$$v_{(m)} = \sup\{u \in V_+^{(m)} \,|\, v^+ \geq_0 u\} - \sup\{w \in V_+^{(m)} \,|\, v^- \geq_0 w\};$$

при этом (по определению) справедлива импликация

$$v \in V_+ \Rightarrow v_{(m)} \in V_+^{(m)} \quad \text{для всех} \quad m \geq 1.$$

Отметим также, что на основании предложения 3 пространства V^n и $V^{(n)}$ являются подрешетками V. Поэтому для всех $n \geq 1$ справедливы соотношения

$$v \in V^n \Rightarrow v^+, v^-, |v| \in V^n; \quad v \in V^{(n)} \Rightarrow v^+, v^-, |v| \in V^{(n)}.$$

Еще одно из важных свойств полиномиальных функций множества устанавливается следующей теоремой о декомпозиции.

Теорема 1 (см. [2], [13]). *Для каждого $n \geq 1$ пространство V^n является прямой суммой попарно-дизъюнктных подпространств $V^{(m)}$: для всякой функции $v \in V^n$ существует единственное представление $v = \sum_{m=1}^n v_m$, где $v_m \in V^{(m)}$; при этом $v_m = v_{(m)}$ и $|v_{(l)}| \wedge |v_{(m)}| = 0$ для всех $l \neq m$.*

1.2. Аналитический критерий однородности

Помимо определения 5 в работе используется и аналитический критерий однородности, дающий описание функций $v \in V^{(n)}$ в терминах асимптотического поведения их полиномиальных разностей. В формулировке этого критерия, как и всюду далее, предполагается, что семейства $H(e)$ упорядочены стандартным образом: $\eta \leq \xi$ тогда и только тогда, когда разбиение $\xi \in H(e)$ является измельчением разбиения $\eta \in H(e)$ (т.е. каждый элемент разбиения ξ содержится в некотором элементе разбиения η). При этом под пределом $\lim_{\eta \in H(e)} a_\eta$ понимается предел обобщенной последовательности чисел $\{a_\eta\}_{\eta \in H(e)}$ по направленности $H(e)$. Предлагаемый ниже общий аналитический критерий однородности представляет упрощение критерия (H) из [2], основанное на предложении 1 из п. 1.1.

Предложение 4. *Функция $v \in V^n$ является однородной порядка n тогда и только тогда, когда выполняются соотношения*

$$(H_+) \quad \lim_{\eta \in H(Q)} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(m)}} v^+(\eta^\omega) = \lim_{\eta \in H(Q)} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(m)}} v^-(\eta^\omega) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1;$$

где

$$\Omega_\eta^{(m)} = \{\omega \subseteq \Omega(\eta) \,|\, |\omega| = m\}.$$

(Как и ранее, через $|\omega|$ обозначается число элементов конечного множества ω.)

Доказательство. На основании формулы (1.4) и предложения 1 для доказательства рассматриваемого утверждения достаточно ограничиться исследованием случая $v \in V_+^n$ (т.е. при $v^+ = v$, $v^- = 0$). Итак, пусть $v \in V_+^n$ удовлетворяет условию (H_+): $\lim_{\eta \in H(Q)} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(m)}} v(\eta^\omega) = 0$ для всех $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Допустим, что для некоторой функции $u \in V_+^{n-1}$ выполняется соотношение $w = u \wedge v \neq 0$. Тогда, в силу предложения 3 имеем: $w \in V_+^{n-1}$. При этом из $w \neq 0$ вытекает, что

$w(Q) = \varepsilon$ для некоторого положительного числа ε. Однако в силу условия (H_+) существует разбиение $\eta \in H(Q)$ такое, что

$$S_v(\eta) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\omega\in\Omega_\eta^{(k)}} v(\eta^\omega) < \varepsilon.$$

Кроме того, из определения w вытекает неравенство $w \,{}_0\!\leq v$. Поэтому для вышеуказанного разбиения η ввиду включения $w \in V_+^{n-1}$ (и на основании формулы (1.3)) получаем соотношение

$$w(Q) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\omega\in\Omega_\eta^{(k)}} w(\eta^\omega) \leq S_v(\eta) < \varepsilon.$$

Но оно противоречит равенству $w(Q) = \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает требуемое: v однородна порядка n.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $v \in V_+^{(n)}$ и покажем, что он удовлетворяет условию (H_+). Напомним (см. [13]), что для вполне положительной функции v пределы

$$v_m(e) = \lim_{\eta\in H(e)} \sum_{\omega\in\Omega_\eta^{(m)}} v(\eta^\omega), \quad m = 1,2,\ldots,n, \tag{1.7}$$

существуют при любых $e \in \Sigma$, а определяемые соотношением (1.7) функции v_m удовлетворяют условиям

$$v_m \,{}_0\!\leq v, \quad v_m \in V_+^m, \quad m = 1,2,\ldots,n. \tag{1.8}$$

Учитывая определение функций v_m (соотношения (1.7)), формулу (1.3) и равенство нулю всех полиномиальных разностей функции v порядка $m > n$, получаем представление $v = v_1 + \cdots + v_n$, где, согласно (1.8), $v_m \in V_+^m$ для всех $m = 1,2,\ldots,n$. Поэтому функция $w = \sum_{m=1}^{n-1} v_m$ принадлежит V_+^{n-1} и, следовательно, дизъюнктна с v. Отсюда, учитывая, что $v = w + v_n \geq_0 w$, получаем $v \wedge w = w = 0$. Но, в силу вполне положительности функций v_m, последнее соотношение влечет справедливость равенств $v_1 = \cdots = v_{n-1} = 0$. Эти равенства и означают выполнение условия (H_+) для рассматриваемой функции v.

Замечание 3. На основании предложения 4 и формул (1.1), (1.3) для всех v из $V_+^{(n)}$ выполняются равенства

$$(H_+^*) \quad \lim_{\eta\in H(Q)} \sum_{\omega\in\Omega_\eta^{(n)}} v(\eta^\omega) = v(Q).$$

Используя формулу (1.3) и монотонность полиномиальных разностей функций $v \in V_+^n$, можно показать, что для однородности вполне положительных функций из V^n необходимо и достаточно выполнения условия (H_+^*).

Замечание 4. Как вытекает из результатов работы [13], функции v_m, определенные в соответствии с формулой (1.7), удовлетворяют условию

$$\lim_{H(e)} \sum_{\omega\in\Omega_\eta^{(k)}} v_m(\eta^\omega) = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \Sigma \quad \text{и} \quad k = 1,2,\ldots,m-1.$$

Таким образом, для любой функции $v \in V_+^n$ выполняется равенство $v = \sum_{m=1}^{n} v_m$. При этом формула (1.7) дает явное определение проекции $v \in pV_+$ на полосу $V^{(m)}$: $v_m = \sup\{w \in V_+^{(m)} \,|\, w \,{}_0\!\leq v\}$.

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА ШЕПЛИ

2.1. Аксиоматическое описание вектора Шепли

Приступая к аксиоматическому описанию вектора Шепли, напомним (см. [2], [3]), что подпространство $W \subseteq \mathcal{V}$ называется симметричным, если $\theta \circ v \in W$ для всех $\theta \in \mathcal{T}$ и $v \in W$, где $\mathcal{T}$ – группа автоморфизмов измеримого пространства (Q, Σ), а функции $\theta \circ v$ определяются по формуле

$$\theta \circ v(e) = v(\theta(e)), \quad \theta \in \mathcal{T}, \quad e \in \Sigma.$$

Отметим, что подпространства V^n, $V^{(n)}$, pV и fV являются симметричными. Здесь, как и в [3], [5], через fV обозначается семейство всех финитных функций множества из $\mathcal{V}$:

$$fV = \{v \in \mathcal{V} \,|\, \exists R \in \operatorname{Supp} v: \ (|R| < \infty)\}.$$

Здесь $\operatorname{Supp} v$ – совокупность всех носителей функции v (см. [2], [3]):

$$\operatorname{Supp} v = \{R \in \Sigma \,|\, v(e \cap R) = v(e), \, e \in \Sigma\}.$$

Определение 6 (см. [2], [16]). *Вектором Шепли на симметричном подпространстве* $W \subseteq V$ будем называть линейный оператор $\Phi: W \to V^1$, удовлетворяющий условиям

A1. $\Phi(v) \in V_+^1$ для всех $v \in W \cap V_+$;

A2. $\Phi(\theta \circ v) = \theta \circ \Phi(v)$ для всех $\theta \in \mathcal{T}$, $v \in W$;

A3. $\Phi(v)(R) = v(Q)$ для всех $R \in \operatorname{Supp} v$, $v \in W$.

Замечание 5. Предлагаемая аксиоматика рассчитана на пространства, содержащие функции с ненулевой атомической (дискретной) составляющей, в том числе и на финитные игры. Поэтому условие A3, касающееся парето-оптимальности распределения $\Phi(v)$, дано в той же форме, что и для конечных игр (для неатомических, как видно из [3], достаточен вариант $\Phi(v)(Q) = v(Q)$). Учитывая теоремы единственности (см. [1], [3]), установленные для $bv'NA$ и fV, нетрудно проверить, что конструируемый далее оператор Φ_* совпадает с классическим значением как на fV, так и на подпространстве $pvNA = bv'NA \cap pV$. Напомним (см. [3]), что $bv'NA$ – замыкание в норме полной вариации линейного пространства, порожденного всеми играми вида $f \circ \mu$, где f – функция ограниченной вариации на отрезке $I = [0,1]$ такая, что $f(0) = 0$ и непрерывная в точках 0 и 1, а μ – неатомическая вероятностная мера на борелевской σ-алгебре B множества I. Отметим также, что в отличие от работы [3], условие A1 накладывает более слабое требование на положительность оператора Φ: вместо конуса монотонных функций множества в A1 используется более узкий конус вполне положительных функций V_+.

2.2. Функционал Шепли: основные свойства

В дальнейших рассмотрениях ограничимся случаем $W = pV$ (хотя используемая аргументация без существенных изменений проходит и для более широкого класса аналитических функций множества ограниченной полиномиальной вариации, см. [16]). Суть предлагаемого подхода к построению вектора Шепли на pV состоит в использовании подходящего билинейного функционала $Sh: pV \times B \to \mathbb{R}$, порождающего искомый линейный оператор Φ_* в соответствии с формулой

$$\Phi_*(v)(e) = Sh(v, \chi_e), \quad e \in \Sigma. \tag{2.1}$$

Здесь, как обычно, χ_e – индикаторная функция множества e (т.е. $\chi_e(t) = 1$ при t из e и $\chi_e(t) = 0$ при t из $Q \backslash e$), $B = B(Q, \Sigma)$ – векторная решетка ограниченных Σ-измеримых вещественных функций на Q с нормой $\|f\| = \sup\{|f(t)| \,|\, t \in Q\}$ и конусом положительных элементов $B_+ = B_+(Q, \Sigma) = \{f \in B \,|\, f(t) \geq 0, \, t \in Q\}$. Как будет показано далее, значение функционала Sh, фигурирующего в формуле (2.1), представляет собой v-интеграл некоторого специального усреднения функции f. Однако ввиду того, что в ряде случаев более удобна стандартная трактовка, в качестве базисного выберем тот вариант определения Sh (называемого в дальнейшем функционалом Шепли), который наиболее близок к теоретико-вероятностной интерпретации оператора Φ (см. [1], [3], [4]).

Приведем необходимые обозначения. Зафиксируем $v \in \mathcal{V}$, $f \in B$, $\eta = \{e_i\}_1^m$ из $H(Q)$ и множество $\tau_\eta = \{t_i\}_1^m$ такое, что $t_i \in e_i\ \forall i = 1,2,\ldots,m$. Обозначая через $\Pi_m = \Pi(\Omega_\eta)$ совокупность всех перестановок множества $\Omega(\eta) = \{1,2,\ldots,m\}$, положим

$$S_v(f,\eta,\tau_\eta) = \frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\Pi_m} S_v^\pi(f,\eta,\tau_\eta), \tag{2.2}$$

где

$$S_v^\pi(f,\eta,\tau_\eta) = \sum_{i=1}^m f(t_{\pi(i)})v_i^\pi(\eta),$$

$$v_1^\pi(\eta) = v(e_{\pi(1)}), \quad v_i^\pi(\eta) = v(\cup_{k=1}^i e_{\pi(k)}) - v(\cup_{k=1}^{i-1} e_{\pi(k)}), \quad i \in [2,m].$$

Определение 7 (см. [2]). *Функционалом Шепли на произведении пространств pV и B* будем называть отображение $Sh : pV \times B \to \mathbb{R}$, определяемое формулой

$$Sh(v,f) = \lim_{\eta\in H(Q)} S_v(f,\eta,\tau_\eta), \quad v \in pV, \quad f \in B. \tag{2.3}$$

Для проверки корректности определения 7 необходимо убедиться, что при всех $v \in pV$ и $f \in B$ предел обобщенной последовательности $\{S_v(f,\eta,\tau_\eta)\}_{H(Q)}$ существует, конечен и не зависит от выбора множеств τ_η. Введем некоторые понятия и обозначения, необходимые для такой проверки. Обозначим $e^{[\mathrm{N}]}$ совокупность всех конечных подмножеств множества e и рассмотрим произвольные функции $\alpha : Q^{[\mathrm{N}]} \to \mathbb{R}$ и $v \in V$. Для каждого разбиения $\eta = \{e_i\}_1^m \in H(Q)$ зафиксируем некоторую систему $\tau = \tau_\eta = \{t_i\}_1^m$, удовлетворяющую условию $t_i \in e_i$, $i \in \Omega(\eta)$, и положим

$$S_v^\alpha(\eta,\tau) = \sum_{\omega\subseteq\Omega(\eta)} \alpha(\tau^\omega)v(\eta^\omega),$$

где $\tau^\omega = \{t_i \in \tau | i \in \omega\}$ для всех $\omega \subseteq \Omega(\eta)$.

Определение 8 (см. [2]). Скажем, что функция $\alpha : Q^{[\mathrm{N}]} \to \mathbb{R}$ является *v-интегрируемой*, если предел обобщенной последовательности $\{S_v^\alpha(\eta,\tau)\}_{H(Q)}$ существует, конечен и не зависит от выбора систем $\tau_\eta, \eta \in H(Q)$. Этот предел обозначим $\int \alpha dv$ и назовем v-интегралом функции α.

Замечание 6. В ряде случаев (например, для регулярных игр, см. [14]) v-интегрирование редуцируется к вычислению интеграла функции α по “обычной мере”: $\int \alpha dv = \int \alpha d\mu_v$, где μ_v – счетно-аддитивная функция множества, восстанавливаемая по регулярной игре v на основании соотношений $\mu_v(e^{[N]}) = v(e)$, $e \in \Sigma$ (подробности см. в [5], [10]).

К числу v-интегрируемых функций относятся различные композиции измеримых и непрерывных функций, подчиненные некоторым требованиям согласованности. Приведем один из вариантов такой композиции. Пусть функция $f : Q \to \mathbb{R}$ такова, что $\|f\| = \sup\{|f(t)|| t \in Q\} < \infty$, а ϕ – симметричная вещественнозначная функция, определенная на n-мерном кубе $[-\|f\|,\|f\|]^n$. Композицией f и ϕ будем называть функцию $f * \phi : Q^{[\mathrm{N}]} \to \mathbb{R}$, задаваемую формулой

$$f * \phi = \begin{cases} \phi(f(t_1),\ldots,f(t_n)), & \tau = \{t_i\}_1^n \in Q^{(n)}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $Q^{(n)} = \{\tau \subseteq Q || \tau| = n\}$. Формулируемые ниже леммы дают простые условия v-интегрируемости композиций $f * \phi$, которые используются при проверке корректности определения функционала Шепли.

Лемма 1 (см. [2]). *Пусть f — произвольная Σ-измеримая функция из B, а ϕ — непрерывная симметричная функция, заданная на n-мерном кубе $[-\|f\|,\|f\|]^n$. Тогда их композиция $f * \phi$ является v-интегрируемой для любой функции $v \in pV$.*

Прежде чем зафиксировать тот факт, что функционал Sh корректно определен, приведем другую формулу для частных сумм $S_v(f,\eta,\tau_\eta)$, задаваемых соотношениями (2.2). Такая формула, отражающая связь между значениями $Sh(v,f)$ и v-интегралами усредняющих продолжений f на $Q^{[\mathbb{N}]}$ дается следующей леммой (ниже $\tau_\eta^\omega := \{t_i \in \tau_\eta \,|\, i \in \omega\}$).

Лемма 2 (см. [2]). *Для всех $v \in V$ и $f \in B$ справедлива формула*

$$S_v(f,\eta,\tau_\eta) = \sum_{\omega \subseteq \Omega(\eta)} f_\sigma(\tau_\eta^\omega) v(\eta^\omega), \tag{2.4}$$

где

$$f_\sigma(\tau) := \sum_{t \in \tau} f(t)/|\tau|, \quad \tau \in Q^{[\mathbb{N}]}.$$

Леммы 1, 2 доказывают корректность определения функционала Sh.

Теорема 2 (см. [2]). *Функционал Шепли корректно определен для всех $v \in pV$ и $f \in B$. При этом справедлива формула*

$$Sh(v,f) = \int f_\sigma dv. \tag{2.5}$$

Как вытекает из формулы (2.4) для частных сумм $S_v(f,\eta,\tau_\eta)$, функционал Шепли линеен по каждому аргументу. Укажем некоторые дополнительные свойства этого функционала, обеспечивающие возможность построения на его основе искомого оператора $\Phi_* : pV \to V^1$, удовлетворяющего условиям A1–A3.

Теорема 3 (см. [2]). *Билинейный функционал $Sh : pV \times B \to \mathbb{R}$, задаваемый формулой* (2.3)*, непрерывен на произведении пространств $(pV,\|\cdot\|_0)$ и $(B,\|\cdot\|)$. Он удовлетворяет следующим условиям:*

Sh1. $Sh(v,f) \geq 0$, $v \in pV_+ = pV \cap V_+$, $f \in B_+$;

Sh2. $Sh(v,\chi_R) = v(Q)$, $v \in pV$, $R \in \operatorname{Supp} v$;

Sh3. $Sh(\theta \circ v, f) = Sh(v, \theta^{-1} \circ f)$, $v \in pV$, $\theta \in T$, $f \in B$;

Sh4. $|Sh(v,f)| \leq \|f\| \cdot \|v\|_0$, $v \in pV$, $f \in B$

(*здесь и далее* $\theta \circ f(t) := f(\theta(t))$, $t \in Q$).

2.3. Функционал Шепли и оператор Φ_*

Рассмотрим теперь отображение $\Phi_* : pV \to \mathcal{V}$, определяемое формулой

$$\Phi_*(v) = S(v), \quad v \in pV, \tag{2.6}$$

где $S(v)$ – функция множества, представляющая собой сужение линейного функционала $Sh(v,\cdot)$ на семейство всех индикаторных функций множеств из Σ. Так как функционал Sh непрерывен и билинеен, то Φ_* – линейный оператор на pV; при этом для каждого $v \in pV$ функция множества $S(v)$ – аддитивная мера ограниченной вариации на измеримом пространстве (Q,Σ). Опираясь на теорему 3, можно установить, что линейный оператор Φ_* удовлетворяет всем требованиям определения 6. Действительно, свойства A1, A2 и соотношения Sh1, Sh2 теоремы 3 идентичны. Что касается A3 (перестановочность Φ_* с автоморфизмами $\theta \in T$), то это свойство вытекает из цепочки равенств

$$\Phi_*(\theta \circ v) = S(v)(\theta^{-1} \circ \chi_e) = S(v)(\chi_{\theta(e)}) = \theta \circ \Phi_*(v)(e), \quad e \in \Sigma.$$

Подводя итоги и учитывая теоремы единственности для подпространств fV и $pvNA = bv'NA \cap pV$, вытекающие из соответствующих результатов [1] и [3], сформулируем вышесказанное в виде следующей теоремы.

Теорема 4 (см. [2], [12]). *Оператор* Φ_*, *определенный на пространстве* pV *формулой* (2.6), *удовлетворяет всем условиям* A1–A3. *Более того, если* $Q = [0,1]$, *а* $\Sigma = \mathcal{B}$, *то каждый линейный оператор* $\Phi : pV \to V^1$, *для которого выполняются условия* A1–A3, *совпадает с* Φ_* *на подпространствах* fV *и* $pvNA$.

3. ПОЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА ШЕПЛИ

3.1. Полярная форма однородной кооперативой игры

Приведем некоторые понятия, необходимые для построения интересующего нас представления оператора Φ_*. Прежде всего напомним, что функция $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ называется симметричной полиаддитивной функцией множества, если она аддитивна по каждому аргументу и, кроме того, для любых $e_1, \ldots, e_n \in \Sigma$ и $\pi \in \Pi_n$ выполняется равенство

$$\psi(e_1, \ldots, e_n) = \psi(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)}),$$

где, как и ранее, Π_n – совокупность всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Выпуклый конус всех неотрицательных симметричных полиаддитивных функций $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R}_+$ обозначим через Ψ_+^n, а векторное пространство, состоящее из функций, представимых в виде разности двух элементов из Ψ_+^n – через Ψ^n. Выделим класс полиаддитивных функций $\psi \in \Psi^n$, аналогичных однородным функциям множества из $V^{(n)}$. С этой целью каждому разбиению

$$\eta = \{e_i\}_1^r \in H_n(Q) := \{\xi \in H(Q) \,|\, |\Omega(\xi)| \geq n\}$$

сопоставим совокупность Π_n^η всех упорядоченных n-элементных подмножеств множества $\Omega(\eta)$. Зафиксируем $\psi \in \Psi_+^n$ и определим обобщенную последовательность $\{\psi_\eta\}_{\eta \in H_n(Q)}$, где

$$\psi_\eta = \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \Pi_n^\eta} \psi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}).$$

Учитывая неотрицательность и полиаддитивность ψ, нетрудно убедиться, что последовательность $\{\psi_\eta\}_{\eta \in H_n(Q)}$ является монотонно возрастающей:

$$\eta' \geq \eta \Rightarrow \psi_{\eta'} \geq \psi_\eta.$$

Следовательно, для каждой функции $\psi \in \Psi_+^n$ существует предел

$$\psi_{(n)}(Q) = \lim_{\eta \in H_n(Q)} \psi_\eta.$$

Обозначим $\Psi_+^{(n)}$ совокупность функций из Ψ_+^n, для которых выполняется условие

$$\psi_{(n)}(Q) = \psi(Q, \ldots, Q),$$

и положим $\Psi^{(n)} = \Psi_+^{(n)} - \Psi_+^{(n)}$.

Определение 9 (см. [2]). Элементы векторного пространства $\Psi^{(n)}$ будем называть *однородными полиаддитивными функциями множества*.

В приведенных обозначениях одно из главных понятий работы – понятие полярной формы однородной игры v – принимает следующий вид.

Определение 10 (см. [2]). Функция $\psi_v \in \Psi^{(n)}$ называется *полярной формой игры* $v \in V^{(n)}$, если выполняется соотношение

$$v(e) = \psi_v(e, \ldots, e) \quad \text{для всех} \quad e \in \Sigma. \tag{3.1}$$

Другими словами, полиаддитивная функция $\psi_v \in \Psi^{(n)}$ – полярная форма игры $v \in V^{(n)}$, если ее диагонализация (сужение ψ_v на диагональ

$$D = \{(e_1,\dots,e_n) \in \Sigma^n \,|\, e_1 = \dots = e_n\},$$

рассматриваемое как функция одного аргумента) совпадает с v.

Формулируемый ниже результат работы [2] показывает, что для любой однородной игры $v \in V^{(n)}$ полярная форма ψ_v существует и единственна; кроме того, для каждого $n \geq 1$ отображение $v \mapsto \psi_v$ является линейным изоморфизмом векторных решеток $V^{(n)}$ и $\Psi^{(n)}$, наделенных конусами $V_+^{(n)}$ и $\Psi_+^{(n)}$ соответственно.

Теорема 5 (см. [2]). *Для каждого $n \geq 1$ существует единственный линейный изоморфизм $L_{(n)} : V^{(n)} \to \Psi^{(n)}$ такой, что*

L1. $L_{(n)}(v)(e,\dots,e) = v(e)$, $e \in \Sigma$;

L2. $L_{(n)}(\theta \circ v) = \theta \circ L_{(n)}(v)$, $\theta \in \mathcal{T}$;

L3. $L_{(n)}(V_+^{(n)}) = \Psi_+^{(n)}$,

где $\theta \circ \psi(e_1,\dots,e_n) = \psi(\theta(e_1),\dots,\theta(e_n))$ *для всех* $e_1,\dots,e_n \in \Sigma$ *и* $\theta \in \mathcal{T}$.

Ясно, что условие L1 есть в точности требование (3.1), предъявляемое к полярной форме ψ_v игры $v \in V^{(n)}$. В качестве следствия теоремы 5 получаем следующую характеризацию однородных функций из V, уточняющую соответствующий результат из [13].

Следствие 1 (см. [2]). Функция v принадлежит $V^{(n)}$ тогда и только тогда, когда она является диагонализацией некоторой функции ψ из $\Psi^{(n)}$.

Приведем один из основных результатов работы, устанавливающий связь между полярными формами однородных игр и линейным оператором Φ_*.

Теорема 6 (см. [2]). *Для каждого $n \geq 1$ и $v \in V^{(n)}$ выполняется соотношение*

$$\Phi_*(v)(e) = \psi_v(e,Q,\dots,Q), \quad e \in \Sigma, \tag{3.2}$$

где ψ_v – полярная форма игры v.

3.2. Вектор Шепли однородных неатомических игр

Рассматриваемые далее игры представляют собой линейные комбинации функций вида $v = \prod_{i=1}^n \mu_i^{\alpha_i}$, где $\mu_1,\dots,\mu_n$ – произвольные конечные неотрицательные неатомические меры, определенные на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ единичного отрезка $[0,1]$, а α_i – произвольные натуральные числа. Используя приводимую ниже формулу для полиномиальных разностей произведения $v_1 \cdot v_2$ функций $v_1, v_2 \in V$:

$$(v_1 \cdot v_2)(\eta) = \sum_{\omega_1 \times \omega_2 \,|\, \omega_1 \cup \omega_2 = \Omega(\eta)} v_1(\eta^{\omega_1}) \cdot v_2(\eta^{\omega_2}), \quad \eta \in H, \tag{3.3}$$

получаемую индукцией на основании равенств (1.1)–(1.3), легко проверить справедливость неравенства

$$\|v_1 \cdot v_2\|_0 \leq \|v_1\|_0 \cdot \|v_2\|_0. \tag{3.4}$$

Более того, если $v_i \in V^{n_i}$ $(i = 1,2)$, то, в силу (3.3), имеем $w(e_1,\dots,e_{n+1}) = 0$ для любого разбиения $\{e_1,\dots,e_{n+1}\} \in H$, где $w = v_1 \cdot v_2$, $n = n_1 + n_2$. Следовательно (с учетом (3.3) и (3.4)), справедлива импликация

$$[v_i \in V^{n_i} \ (i = 1,2)] \Rightarrow v_1 \cdot v_2 \in V^{n_1+n_2}. \tag{3.5}$$

Поэтому индукцией по n нетрудно убедиться, что интересующие нас функции $v = \prod_{i=1}^{n} \mu_i^{\alpha_i}$ принадлежат $V^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}$. Отметим, что аналог соотношения (3.5) для однородных функций множества справедлив (в общем случае) лишь при некоторых дополнительных условиях, касающихся функций $v_i \in V^{(n_i)}$. Например, при наличии непересекающихся носителей функций v_i использование формулы (3.3) и предложения 4 дает следующее уточнение соотношения (3.5):

$$[v_i \in V_+^{(n_i)},\ i = 1,2]\ \&\ [\exists R_i \in \operatorname{Supp} v_i (R_1 \cap R_2 = \varnothing)] \Rightarrow v_1 \cdot v_2 \in V_+^{(n_1+n_2)}. \tag{3.6}$$

Подчеркнем, что для однородных вполне положительных функций v_1, v_2 с конечными носителями R_1, R_2 требование дизъюнктности последних, аналогичное тому, что фигурирует в соотношении (3.6), является и необходимым условием однородности произведения $v_1 \cdot v_2$.

Оказывается, что для функций вида $v = \prod_{i=1}^{n} \mu_i^{\alpha_i}$ с неатомическими счетно-аддитивными сомножителями μ_i однородность имеет место без каких-либо дополнительных предположений. Приведем некоторые приложения теоремы 6 о полярном представлении вектора Шепли для однородных полиномиальных игр к вычислению этого вектора для полиномиальных игр, порожденных неатомическими мерами. Обозначим через $cV_+^1 = cV_+^1(\mathcal{B})$ семейство неотрицательных конечных счетно аддитивных функций множества, заданных на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ единичного интервала $[0,1]$. Применяя известную теорему Ляпунова о выпуклости множества значений векторзначной неатомической меры (см. [17]), можно убедиться в справедливости следующей леммы, описывающей широкий класс бесконечных однородных полиномиальных игр.

Лемма 3 (см. [2]). *Если вероятностные меры* $\mu_1,\ldots,\mu_n \in cV_+^1(\mathcal{B})$ *неатомические, то функция* $v = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$ *является вполне положительной и однородной порядка n.*

Доказательство. Полиномиальность порядка n и вполне положительность функции v вытекают из неотрицательности и аддитивности функций μ_i и тождества (3.3). Остается убедиться лишь в том, что для v выполняется критерий однородности (H_+). С этой целью рассмотрим векторзначную меру $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$. На основании теоремы А.А. Ляпунова из [17] о выпуклости области значений неатомической векторзначной меры имеем: множество $\mu(\Sigma) = \{(\mu_1(e),\ldots,\mu_n(e)) | e \in \Sigma\}$ выпуклое. Поэтому для любого $k \geq 1$ найдутся $Q_1,\ldots,Q_k \in \mathcal{B}$ такие, что $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots \subseteq Q_k = Q$, и при этом $\mu_i(Q_j) = j/k$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$ и $j = 1,2,\ldots,k$. Рассмотрим разбиение $\xi_k = \{f_1,\ldots,f_k\} \in H(Q)$, определенное соотношениями

$$f_1 = Q_1, \quad f_j = Q_j \backslash Q_{j-1}, \quad j = 2,3,\ldots,k.$$

Ясно, что $\mu_i(f_j) = 1/k$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$ и $j = 1,2,\ldots,k$. Используя эти равенства и формулы (ниже Π_n^m – совокупность всех отображений $\pi : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ таких, что $\pi(\{1, 2, ..., n\}) = \{1,2,\ldots,m\}$)

$$v(\eta) = \sum_{\pi \in \Pi_n^m} \prod_{i=1}^{n} \mu_i(e_{\pi(i)}), \quad \eta = \{e_1,\ldots,e_m\} \in H, \quad m = 1,2,\ldots,n-1 \tag{3.7}$$

(полученные применением соотношений (1.3) и индукции по m), оценим величину $v[\xi_k] = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\omega \in \Omega_\xi^{(m)}} v(\xi_k^\omega)$ при $k \geq n$ (здесь, как и ранее, $\Omega_\xi^{(m)} = \{\omega \subseteq \Omega(\xi) | |\omega| = m\}$). Эта оценка имеет вид

$$v[\xi_k] \leq \frac{1}{k^n} \sum_{m=1}^{n-1} C_k^m |\Pi_n^m|. \tag{3.8}$$

Учитывая, что $k! \le (k-m)!k^m$, имеем $C_k^m/k^n \le 1/k^{n-m}$ для всех $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда, принимая во внимание, что величины $|\Pi_n^m|$ не зависят от k, получаем следующую модификацию оценки (3.8):

$$v[\xi_k] \le \sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_m}{k^{n-m}},$$

где положительные константы a_m не зависят от k. Учитывая соотношения (1.2), нетрудно убедиться, что последовательность $\left\{\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{\omega\in\Omega_\eta^{(m)}} u(\eta^\omega)\right\}_{H(Q)}$ является монотонно убывающей для любой вполне положительной функции u. Следовательно, ввиду равенства $\lim_{k\to\infty} v[\xi_k] = 0$, вытекающего из полученной модификации оценки (3.8), имеем требуемое: функция v удовлетворяет условию (H_+). Лемма 3 доказана.

Использование леммы 3 и теоремы 6 позволяет предложить более конструктивный, по сравнению с [3], способ вычисления вектора Шепли для игр вида $u = f \circ \mu$, где f — полиномиальная функция n вещественных переменных, а $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — неатомическая векторзначная мера. Эффективность предлагаемого способа базируется на достаточно простом строении полярных форм указанных игр.

Лемма 4 (см. [2]). *Если меры* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *удовлетворяют условиям леммы* 3, *то полярная форма* ψ_v *функции* $v = \prod_{i=1}^n \mu_i$ *имеет вид*

$$\psi_v(e_1, \ldots, e_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi_n}\prod_{i=1}^n \mu_i(e_{\pi(i)}), \quad e_1, \ldots, e_n \in \Sigma, \tag{3.9}$$

где $\Pi_n = \Pi_n^n$ *— совокупность перестановок множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Доказательство. Соотношение $v(e) = \prod_{i=1}^n \mu_i(e) = \psi_v(e, \ldots, e)$, $e \in \Sigma$, как и полиаддитивность и симметричность функции ψ_v, определенной формулой (3.9), следуют непосредственно из ее построения. Для проверки включения $\psi_v \in \Psi^{(n)}$ зафиксируем какое-нибудь разбиение $\eta = \{e_1, \ldots, e_r\} \in H(Q)$ $(r \ge n)$ и, используя формулу (3.7) и симметричность рассматриваемой функции ψ_v, выразим значения этой функции на цилиндрических множествах $e_{i_1} \times \cdots \times e_{i_n}$ через полиномиальные разности функции v. Соответствующие выражения имеют вид

$$\psi_v(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \frac{1}{n!} v(\eta^\omega)$$

для каждого n-элементного подмножества $\omega = \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \Omega(\eta)$. Отсюда, обозначая, как и ранее, через Π_n^η совокупность упорядоченных n-элементных подмножеств множества $\Omega(\eta)$, получаем: величина $(\psi_v)_\eta := \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Pi_n^\eta} \psi_v(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$ равна сумме $\sum_{\omega\in\Omega_\eta^{(n)}} v(\eta^\omega)$. Следовательно, на основании леммы 3 и критерия однородности (H_+^*) (см. замечание 3) имеем $\lim_{\eta\in H_n(Q)} (\psi_v)_\eta = v(Q)$. Но тогда, в силу равенства $v(Q) = \psi_v(Q, \ldots, Q)$, получаем $\lim_{\eta\in H_n(Q)} (\psi_v)_\eta = \psi_v(Q, \ldots, Q)$, что и доказывает требуемое включение $\psi_v \in \Psi^{(n)}$. Лемма 4 доказана.

Приведем, наконец, несколько простых, но важных для общей теории вектора Шепли (см. [3]) результатов, являющихся прямым следствием лемм 3, 4 и теоремы 6 о представлении оператора Φ_*.

Предложение 5. *Для любого набора неатомических мер* $\mu_1, \ldots, \mu_n \in cV_+^1(\mathcal{B})$ *справедлива формула*

$$\Phi_*\left(\prod_{i=1}^n \mu_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \prod_{j\ne i} \mu_j(Q)\mu_i. \tag{3.10}$$

Доказательство. На основании леммы 3 функция $v = \prod_{i=1}^n \mu_i$ является однородной порядка n. Используя формулу (3.2) из теоремы 6 и формулу (3.9) для полярной формы игры v, установленную в лемме 4, получаем искомое:

$$\Phi_*(v)(e) = \psi_v(e, Q, \ldots, Q) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^n (n-1)!\left(\prod_{j\neq i}\mu_j(Q)\right)\mu_i(e) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\prod_{j\neq i}\mu_j(Q)\right)\mu_i(e), \quad e \in \Sigma.$$

Следствие 2. Пусть $v = f \circ \mu$, где f — полиномиальная функция n вещественных переменных такая, что $f(0) = 0$, а $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — векторзначная неатомическая мера, заданная на σ-алгебре $\mathcal{B}$. Тогда вектор Шепли игры v является линейной комбинацией мер $\mu_1, \ldots, \mu_n$. В частности, если $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — вероятностные неатомические меры, а $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1\le|\alpha|\le m} c_\alpha x^\alpha$ (здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндексы, определяющие степени соответствующих мономов $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, а $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$), то справедлива формула

$$\Phi_*(v) = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{1\le|\alpha|\le m}\frac{\alpha_i}{|\alpha|}c_\alpha\right)\mu_i. \tag{3.11}$$

Прямым следствием формулы (3.11) является довольно неожиданный результат.

Следствие 3. Пусть $v = \sum_{i=1}^n c_i \mu^i$, где μ — неатомическая вероятностная мера на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$. Если $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, то $\Phi_*(v) = \mu$.

3.3. О векторе Шепли конечных однородных игр

Подчеркнем, что условие неатомичности мер $\mu_1, \ldots, \mu_n$ в лемме 3 имеет принципиальное значение. Справедливость импликаций вида

$$\mu_1, \ldots, \mu_n \in V^1 \Rightarrow \prod_{i=1}^n \mu_i \in V^{(n)}$$

имеет место, вообще говоря, лишь при достаточно сильных дополнительных предположениях относительно аддитивных функций μ_i, включающих некоторые условия дизъюнктности их дискретных составляющих. Вместе с тем в целом ряде случаев сами формулы вектора Шепли однородных игр вида $\prod_{i=1}^n \mu_i$ с аддитивными сомножителями μ_i вполне аналогичны соотношению (3.10). Не вдаваясь в технические детали, проиллюстрируем сказанное на примере игр из $V(Q)$ с конечным множеством игроков $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$ и $\Sigma = 2^Q := \{e | e \subseteq Q\}$. Для начала в терминах так называемых дивидендов Харшаньи дадим для таких игр более детальное описание некоторых величин и объектов, введенных в п. 1. Напомним (см. [4], [18]), что дивидендами Харшаньи v_e коалиций $e \subseteq Q$ игры $v \in V(Q)$ называются соответствующие коэффициенты разложения

$$v = \sum_{e\in\sigma_0} v_e u^e$$

функции v по базису $\{u^e\}_{e\in\sigma_0}$ пространства $V(Q)$, состоящему из игр единогласия u^e. Последние для каждого $e \in \sigma_0$ определяются формулой

$$u^e(f) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad e \subseteq f; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(здесь, как обычно, $\sigma_0 = \{e \subseteq Q | e \neq \varnothing\}$). О полноте и независимости функций u^e см. [1].

Нетрудно убедиться, что для пространства конечных игр $V(Q)$ выполняются следующие соотношения:

$$u \geq_0 v \Leftrightarrow \forall e \subseteq Q[u_e \geq v_e],$$

$$V_+(Q) = \{v \in V(Q) | v_e \geq 0 \text{ для всех } e \subseteq Q\},$$

$$V^m(Q) = \{v \in V(Q) | v_e = 0 \text{ для всех } e \text{ при } |e| \geq m+1\}, \quad m \in [1,q],$$

$$V^{(m)}(Q) = \{v \in V(Q) | v_e = 0 \text{ для всех } e \text{ при } |e| \neq m\}, \quad m \in [1,q],$$

$$pV(Q) = V(Q)$$

(как и ранее, символ $|e|$ обозначает мощность множества e).

Замечание 7. Соотношение $pV(Q) = V(Q)$, показывающее, что все конечные игры являются полиномиальными, вытекает из того, что при $|Q| = q$ все полиномиальные разности функции $v \in V(Q)$ порядка $m \geq q+1$ равны нулю. Действительно, в рассматриваемой ситуации каждое разбиение $\eta\{e_1,\ldots,e_m\}$ порядка $m \geq q+1$ содержит, по крайней мере, одно пустое множество e_k. Но в этом случае, как нетрудно убедиться, из формулы (1.1) вытекает равенство $v(\eta) = 0$.

Что касается формулы вектора Шепли $\Phi(v)$ конечной игры $v \in V(Q)$, то при использовании дивидендов Харшаньи v_e она принимает достаточно простой вид

$$\Phi(v)_i = \sum_{e\in\sigma_i} v_e/|e|, \quad i \in Q,$$

где $\sigma_i = \{e \subseteq Q | i \in e\}$, $i \in Q$ (см., например, [1]). Уточнение указанной формулы в случае однородных игр на основании вышеприведенного описания пространств $V^{(m)}$ принимает форму

$$\Phi(v)_i = \frac{1}{m}\sum_{e\in\sigma_i} v_e, \quad v \in V^{(m)}(Q), \quad i \in Q, \quad m = 1,2,\ldots,q. \tag{3.12}$$

Наконец, из (3.12) очевидным образом вытекает следующая простая формула вектора Шепли для конечных однородных игр (уже не требующая вычисления их дивидендов Харшаньи):

$$\Phi(v)_i = \frac{1}{m}[v(Q) - v(Q\backslash i)], \quad v \in V^{(m)}(Q), \quad i \in Q, \quad m = 1,2,\ldots,q \tag{3.13}$$

(т.е. в случае однородности порядка m игры $v \in V(Q)$ компоненты ее вектора Шепли, согласно (3.13), равны m-м долям соответствующих маргинальных вкладов $v(Q) - v(Q\backslash i)$ ее игроков в “большую” коалицию Q).

Легко проверить, что и описание порядка $\geq_0$ на пространствах конечных однородных игр допускает существенное упрощение:

$$u \geq_0 v \Leftrightarrow \forall\, e \subseteq Q\,[u(e) \geq v(e)], \quad u,v \in V^{(m)}(Q), \quad m = 1,2,\ldots,q.$$

Замечание 8. Сравнивая выписанные выше соотношения с определениями и результатами, приведенными в разд. 1, 2, легко убедиться, что наиболее важные объекты и утверждения в общем случае имеют значительно более сложное описание, нежели для конечных игр (так обстоит дело, например, с общим определением однородности полиномиальной игры – определение 5). Главной причиной представляется отсутствие подходящего аналога дивидендов Харшаньи для общего случая игр с бесконечным числом участников. В конечном же случае следует отметить полезную роль указанных дивидендов и при анализе несимметричных аналогов вектора Шепли (см., например, [4], [18], [19]).

Используя приведенные описания конуса $V_+(Q)$ и пространств $V^m(Q)$, $V^{(m)}(Q)$, покажем, что для конечных игр $v = \prod_{i=1}^n \mu_i$, где $\mu_i = (\mu_{ik})_{k\in Q}$ – ненулевые аддитивные меры из $V_+^1(Q)$, справедливо следующее утверждение.

Предложение 6. *Конечная игра* $v = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$ *является однородной порядка* n *тогда и только тогда, когда носители мер* μ_i *попарно дизъюнктны:*

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_i \in V_{+}^{(n)}(Q) \Leftrightarrow Q_i \cap Q_j = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i \neq j,$$

где $Q_i = \{k \in Q \,|\, \mu_{ik} \neq 0\}$ – (*наименьший*) *носитель меры* μ_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

Доказательство. Из формулы (3.3) сразу же вытекает, что игра $v = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$ принадлежит пространству $V^n(Q)$. Значит, согласно вышеприведенному описанию пространств $V^n(Q)$, выполняются равенства $v_e = 0$ для всех коалиций e с числом игроков, превышающим величину n. Для завершения проверки включения $\prod_{i=1}^{n} \mu_i \in V_{+}^{(n)}(Q)$ в случае попарной дизъюнктности носителей Q_i остается убедиться, что в указанной ситуации $v_e = 0$ для любой коалиции e такой, что $|e| < n$. Но при $|e| < n$ коалиция e, очевидным образом, не пересекается с одним из n непустых попарно дизъюнктных носителей Q_i. То же самое справедливо и для любой части этой коалиции. Отсюда, в силу определения дивиденда v_e, получаем искомое: $v_e = 0$. Что касается обратной импликации

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_i \in V_{+}^{(n)}(Q) \Rightarrow Q_i \cap Q_j = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i \neq j,$$

то здесь можно воспользоваться индукцией по n и достаточно просто проверяемым фактом, что из условия $\prod_{i=1}^{n} \mu_i \in V_{+}^{(n)}(Q)$ вытекает справедливость включений $\prod_{i \neq j}^{n} \mu_i \in V_{+}^{(n-1)}(Q)$, $j = 1,2,\ldots,n$ (устанавливаемых рассуждениями от противного). Указанные включения на основании индукционного предположения и дают требуемое: $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Предложение 6 доказано.

В заключение отметим, что формула для вектора Шепли конечной однородной игры $\prod_{i=1}^{n} \mu_i \in V_{+}^{(n)}(Q)$ вполне аналогична той, которая найдена для неатомических игр в случае бесконечного числа игроков (см. предложение 5 из п. 3.2). Именно, справедливо соотношение

$$\Phi\left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right)_k = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \prod_{j \neq i} \mu_j(Q)\mu_{ik}, & k \in Q_i, \quad i = 1,2,\ldots,n; \\ 0, \quad k \in Q \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Q_i. \end{cases} \tag{3.14}$$

Доказательство соотношения (3.14) при условии попарной дизъюнктности носителей Q_i, $i = 1,2,\ldots,n$, опирается на легко проверяемую в этом случае формулу для дивидендов Харшаньи функции $v = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$:

$$v_e = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \mu_{ik_i} & \text{для коалиций} \quad e = \{k_1,\ldots,k_n\} \quad \text{таких, что} \quad (k_1,\ldots,k_n) \in \prod_{i=1}^{n} Q_i; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а также на вышеуказанную формулу (3.12) вектора Шепли однородной кооперативной игры из пространства $V(Q)$, использующую ее дивиденды Харшаньи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розенмюллер И.* Кооперативные игры и рынки. М.: Мир, 1974.
2. *Васильев В.А.* Функционал Шепли и полярные формы однородных полиномиальных игр // Матем. тр. 1998. Т. 1. № 2. С. 24–67 (перевод: Vasil'ev V.A. The Shapley functional and the polar form of homogeneous polynomial games // Siberian Adv. Math. 1998. V. 8. N. 4. P. 109–150).
3. *Ауман Р., Шепли Л.* Значения для неатомических игр. М.: Мир, 1977.

4. *Dehez P.* On Harsanyi dividends and asymmetric values // Intern. Game Theory Rev. 2017. V. 19. № 3. P. 1–36.
5. *Васильев В.А.* О ядре и значении Шепли для регулярных полиномиальных игр // Сиб. матем. журнал. 2022. Т. 63. № 1. С. 77–94. (перевод: Vasil'ev V.A. On the core and Shapley value for regular polynomial games // Sib. Math. J. 2022. V. 63. № 1. P. 65–78).
6. *Marinacci M., Montrucchio L.* Stable cores of large games // Int. J. Game Theory. 2005. V. 33. № 2. P. 189–213.
7. *Вулих Б.З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
8. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
9. *Aliprantis C.D., Border K.C.* Infinite Dimensional Analysis. Berlin: Springer-Ferlag, 1994.
10. *Васильев В.А.* Неаддитивное интегрирование и некоторые решения кооперативных игр // Математическая теория игр и ее приложения. 2021. Т. 13. № 1. С. 5–27. (перевод: Vasil'ev V.A. Nonadditie Integration and Some Solutions of Cooperative Games // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. № 4. P. 635–648).
11. *Vasil'ev V.A.* Polar forms, p-values, and the core // In: Approximation, Optimization and Mathematical Economics (Lassonde M., ed.). 2001. Physica-Verlag: Heidelberg–New York. P. 357–368.
12. *Vasil'ev V.A.* Polar representation of Shapley value: nonatomic polynomial games // Contrib. Game Theory Management. 2013. V. VI. P. 434–446.
13. *Васильев В.А.* Общая характеристика полиномиальных функций множества // Оптимизация. 1974. № 14. С. 101–123.
14. *Васильев В.А.* Об одном пространстве неаддитивных функций множества // Оптимизация. 1975. № 16. С. 99–120.
15. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
16. *Васильев В.А.* Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации // Оптимизация. 1975. № 17. С. 5–26.
17. *Ляпунов А.А.* Вопросы теории множеств и теории функций. М.: Наука, 1979.
18. *Васильев В.А.* Об одном классе дележей в кооперативных играх // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 265–268. (перевод: Vasil'ev V.A. On a class of imputations in cooperative games // Soviet Math. Dokl. 1981. V. 23. № 1. P. 53–57).
19. *Vasil'ev V.A.* Cores and generalized NM-solutions for some classes of cooperative games// In: Russian Contributions to Game Theory and Equilibrium Theory (T.S.H. Driessen, G. van der Laan, V. Vasil'ev, and E. Yanovskaya, eds.). 2006. Springer-Verlag: Berlin–Heidelberg–New York. P. 91–149.