ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 4, с. 573–583

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕКОЭРЦИТИВНЫМ ИСТОЧНИКОМ

М. В. Артемьева[1,2,*], М. О. Корпусов[1,2]

[1] *119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 1, Физический факультет, кафедра математики МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия*

[2] *117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия*

**e-mail: korpusov@gmail.com*

Поступила в редакцию 01.06.2022 г.
Переработанный вариант 11.11.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Рассматривается одна абстрактная задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка с нелинейными операторными коэффициентами. Доказана локальная разрешимость в соответствующих пространствах абстрактных непрерывных и дифференцируемых функций. Получены достаточные условия разрушения решений этой абстрактной задачи Коши за конечное время. Библ. 4.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466923040026, **EDN:** IVTJTE

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] мы рассмотрели абстрактную задачу Коши следующего вида:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(A_0u + \sum_{j=1}^{N} A_j(u)\right) + Lu = \frac{d}{dt}F(u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{1.1}$$

где операторы A_0 и L линейные, а операторы $A_j(u)$ и $F(u)$ нелинейные. Отметим, что уравнение (1.1) содержит некоэрцитивный источник

$$\frac{d}{dt}F(u),$$

что сильно усложняет получение достаточных условий разрушения задачи Коши (1.1) за конечное время.

В работе [2] была рассмотрена следующая абстрактная задача Коши для интегродифференциального уравнения с нелинейными операторными коэффициентами:

$$\frac{d}{dt}\left(A_0u + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)\right) + L_1u + \int_0^t ds\,h(t-s)L_2u(s) + DP(u) = F(u), \quad u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

где операторы A_0 и L_1, L_2, D линейные, а операторы $A_j(u)$ и $F(u)$, $P(u)$ нелинейные. Для доказательства существования сильного решения этой задачи Коши мы применим метод монотонных операторов Браудера–Минти (см. [3]), а для доказательства разрушения за конечное время применим метод энергетических оценк, развитый в [4].

В настоящей работе мы докажем существование непродолжаемого во времени классического решения задачи Коши

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(A_0u + \sum_{j=1}^{N} A_j(u)\right) + \frac{d}{dt}DP(u) + Lu = \frac{d}{dt}F(u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \tag{1.3}$$

при некоторых условиях на операторные коэффициенты и получим достаточные условия разрушения решения за конечное время. Уравнение (1.3) отличается от уравнения (1.1) наличием нелинейного слагаемого

$$\frac{d}{dt}DP(u),$$

которое в приложениях имеет, например, следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial t \partial x_1}.$$

Отметим, что задача Коши (1.3) существенно отличается от задачи Коши (1.2) в силу условий на функцию $h(t)$, при которых рассматривалась задача (1.2).

Подробная библиография и приложения изложены в работе [1].

2. УСЛОВИЯ НА ОПЕРАТОРНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Рассмотрим банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1,n}$ и при $i = \overline{1,3}$ относительно соответствующих норм

$$\|\cdot\|_0, \quad \|\cdot\|_j, \quad |\cdot|_i$$

и с сопряженными банаховыми пространствами V_0^*, V_j^*, W_i^* относительно соответствующих скобок двойственностей

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_0, \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_j, \quad (\cdot,\cdot)_i$$

и соответствующих норм

$$\|\cdot\|_0^*, \quad \|\cdot\|_j^*, \quad |\cdot|_i^*.$$

Предположим, что банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1,n}$ и при $i = \overline{1,3}$ являются рефлексивными и сепарабельными. Предположим также, что

$$A_0 : V_0 \to V_0^*, \quad A_j : V_j \to V_j^*, \quad L_1 : W_1 \to W_1^*,$$

$$F : W_2 \to W_2^*, \quad P : V_0 \to W_3, \quad D : W_3 \to V_0^*.$$

Условия A_0.

(i) Оператор $A_0 : V_0 \to V_0^*$ является линейным, непрерывным и симметричным, причем имеет место неравенство

$$\|A_0 u\|_0^* \le M_0 \|u\|_0 \quad \text{для всех} \quad u \in V_0;$$

(ii) оператор A_0 является коэрцитивным, причем имеет место неравенство

$$\langle A_0 u, u\rangle_0 \ge m_0 \|u\|_0^2 \quad \text{для всех} \quad u \in V_0.$$

Замечание 1. Из условий (i) и (ii) вытекает, что величина $\langle A_0 u, u\rangle_0^{1/2}$ является эквивалентной нормой на V_0.

Условия A.

(i) Оператор $A_j : V_j \to V_j^*$ является монотонным и непрерывным;

(ii) оператор A_j дифференцируем по Фреше, причем его производная Фреше

$$A'_{jf}(u) : V_j \to \mathscr{L}(V_j, V_j^*)$$

является непрерывным, симметричным, монотонным и неотрицательно определенным оператором при любом фиксированном $u \in V_j$ и $A'_{jf}(0) = 0$;

(iii) оператор A_j является положительно-однородным

$$A_j(ru) = r^{p_j - 1} A_j(u) \quad \text{при} \quad p_j > 2, \quad r \ge 0, \quad u \in V_j;$$

(iv) справедливы следующие неравенства сверху и снизу:

$$\|A_j(u)\|_j^* \leq M_j \|u\|_j^{p_j-1}, \quad \langle A_j(u),u\rangle_j \geq m_j \|u\|_j^{p_j}, \quad M_j, m_j > 0.$$

Замечание 2. Из условия (iv) вытекает, что величина $\langle A_j(u),u\rangle_j^{1/p_j}$ является эквивалентной нормой на банаховом пространстве V_j.

Условия *F*.

(i) Оператор $F : W_2 \to W_2^*$ является ограниченно липшиц-непрерывным, т.е. имееет место неравенство

$$|F(u_1) - F(u_2)|_2 \leq \mu(R)|u_1 - u_2|_2 \quad \text{для всех} \quad u_1,u_2 \in W_2,$$

где $R = \max\{|u_1|_2,|u_2|_2\}$, $\mu = \mu(R)$ есть ограниченная но всяком компакте неубывающая функция своего аргумента;

(ii) оператор F является положительно-однородным, т.е.

$$F(ru) = r^{1+q}F(u) \quad \text{при} \quad q > 0, \quad r \geq 0, \quad u \in W_2;$$

(iii) оператор F имеет симметричную производную Фреше

$$F_f'(\cdot) : W_2 \to \mathcal{L}(W_2,W_2^*);$$

(iv) оператор F удовлетворяет неравенству сверху

$$|F(u)|_2^* \leq M |u|_2^{q+1} \quad \text{для всех} \quad u \in W_2.$$

Условия *DP*.

(i) Оператор $D : W_3 \to V_0^*$ является линейным и непрерывным, причем

$$\|Du\|_0^* \leq D_3 |u|_3 \quad \text{для всех} \quad u \in W_3;$$

(ii) оператор $P : V_0 \to W_3$ является ограниченно липшиц-непрерывным, т.е.

$$|P(u_1) - P(u_2)|_3 \leq \mu_0(R)\|u_1 - u_2\|_0 \quad \text{для всех} \quad u_1,u_2 \in V_0,$$

где функция $\mu_0 = \mu_0(R)$ — ограниченная на всяком компакте неубывающая функция своего аргумента, $R = \max\{\|u_1\|_0,\|u_2\|_0\}$;

(iii) справедливо неравенство сверху

$$|P(u)|_3 \leq D_4 \|u\|_0^{1+q_0}, \quad q_0 \geq 0, \quad \text{для всех} \quad u \in V_0;$$

(iv) для всех $u \in V_0$ имеет место неравенство

$$\langle DP(u),u\rangle_0 = 0 \quad \text{для всех} \quad u \in V_0;$$

(v) оператор P имеет производную Фреше

$$P_f'(\cdot) : V_0 \to \mathcal{L}(V_0,W_3).$$

Условия *L*.

(i) Оператор $L : W_1 \to W_1^*$ является линейным, непрерывным и симметричным, причем

$$|Lu|_1^* \leq D_1|u|_1 \quad \text{для всех} \quad u \in W_1;$$

(ii) оператор L_1 является коэрцитивным, причем

$$(L_1u,u)_1 \geq d_1|u|_1^2 \quad \text{для всех} \quad u \in W_1.$$

Замечание 3. Из условий (i) и (ii) вытекает, что величина $(L_1u,u)_1^{1/2}$ является эквивалентной нормой на W_1.

Рассмотрим теперь используемые нами банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1,n}$ и $i = \overline{1,3}$. Пусть H — это некоторое сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным. Предположим, что выполнены следующие условия:

Условия $\boldsymbol{H}$**.**

Имеют место следующие цепочки плотных и непрерывных вложений:

$$V_0 \overset{ds}{\subset} V_j \overset{ds}{\subset} H \overset{ds}{\subset} V_j^* \overset{ds}{\subset} V_0^* \quad \text{при} \quad j = \overline{1,n},$$

$$V_0 \overset{ds}{\subset} W_i \overset{ds}{\subset} H \overset{ds}{\subset} W_i^* \overset{ds}{\subset} V_0^* \quad \text{при} \quad i = \overline{1,3}.$$

Заметим, что в силу условий H имеют место следующие свойства:

$$\langle f,u\rangle_0 = \langle f,u\rangle_j \quad \text{для всех} \quad f \in V_j^*, \quad u \in V_0, \quad \text{при} \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.1}$$

$$\langle f,u\rangle_0 = (f,u)_i \quad \text{для всех} \quad f \in W_i^*, \quad u \in V_0, \quad \text{при} \quad i = \overline{1,3}. \tag{2.2}$$

3. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА

Пусть функционал $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,T]$ и удовлетворяет интегродифференциальному неравенству

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 + \gamma_1\Phi(t) + \gamma_2 T\int_0^t \Phi(s)ds\Phi(t) + \gamma_3\Phi^{1+\lambda}(t) \geq 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.1}$$

при $\alpha > 1$, $\lambda > 1$ и $\beta \geq 0$, $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_3 \geq 0$. Справедлива следующая теорема (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,T_0)$ *и удовлетворяет дифференциальному неравенству* (3.1) *и*

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi'(0) > 0, \quad \alpha > 1, \quad 1 < \lambda < 2\alpha - 1, \tag{3.2}$$

причем начальные условия $\Phi(0)$ *и* $\Phi'(0)$ *таковы, что существует* T_1 *— наименьший положительный корень уравнения*

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\alpha-1)^2}(\Phi(0))^2 + \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha - 1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0) + \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda}, \tag{3.3}$$

то $\Phi(t)$ *удовлетворяет следующему неравенству*:

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}(T_1)t\right]^{1/(\alpha-1)}} \tag{3.4}$$

для всех $t \in [0, \min\{T_1, T_0\})$, *где*

$$A(T_1) = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta+\gamma_2 T_1^2}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0) - \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda}] > 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Все утверждения теоремы в целом доказаны. Отметим только, что в силу явного вида функции $A = A(T)$ и неравенства (3.3) выполнены неравенства

$$A(T) \geq A(T_1) > 0 \quad \text{для всех} \quad T \in [0, T_1].$$

Поэтому имеют место неравенства

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}(T)t\right]^{1/(\alpha-1)}} \geq \frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}(T_1)t\right]^{1/(\alpha-1)}}$$

для всех $t \in [0,T]$. Значит, функция в правой части неравенства (3.4) является неограниченной при $T = T_1$ и $t \in [0,T_1)$.

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПРОДОЛЖАЕМОГО РЕШЕНИЯ

Пусть выполнены все условия, сформулированные в разд. 2. Рассмотрим следующую задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(A_0u + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)\right) + \frac{d}{dt}DP(u) + Lu = \frac{d}{dt}F(u), \tag{4.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{4.2}$$

Дадим определение классического решения этой абстрактной задачи Коши.

Определение 1. Функция $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];V_0)$ называется *классическим решением задачи Коши* (4.1), если

$$\frac{d^2}{dt^2}A_j(u) \in \mathbb{C}([0,T];V_0^*) \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

равенство (4.1) справедливо для каждого $t \in [0,T]$ и понимается в смысле банахового пространства V_0^*, причем

$$u_0 \in V_0, \quad u_1 \in V_0. \tag{4.4}$$

Пусть $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];V_0)$ – классическое решение задачи (4.1). Пусть $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$ – произвольная функция. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(t) := \int_t^T \phi(s)ds \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T], \quad t \in [0,T]. \tag{4.5}$$

Заметим, что $\psi(T) = 0$ и $\psi'(t) = -\phi(t)$. Справедливы следующие формулы интегрирования по частям для интегралов Бохнера в V_0^*:

$$\begin{gathered}\int_0^T \frac{d^2}{dt^2}\left(A_0u(t) + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)(t)\right)\psi(t)dt = \frac{d}{dt}\left(A_0u(t) + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)(t)\right)\psi(t)\Bigg|_{t=0}^{t=T} + \\ + \int_0^T \frac{d}{dt}\left(A_0u(t) + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)(t)\right)\phi(t)dt = -\left(A_0u_1 + \sum_{j=1}^{n} A_j'(u_0)u_1\right)\int_0^T \phi(t)dt + \\ + \int_0^T \frac{d}{dt}\left(A_0u(t) + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)(t)\right)\phi(t)dt,\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\int_0^T Lu(t)\psi(t)dt = \int_0^t Lu(s)ds\psi(t)\Bigg|_{t=0}^{t=T} + \int_0^T \phi(t)\int_0^t Lu(s)dsdt\int_0^T \phi(t)\int_0^t Lu(s)dsdt, \tag{4.7}$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}F(u)(t)\psi(t)dt = -F(u_0)\int_0^T \phi(t)dt + \int_0^T F(u)(t)\phi(t)dt, \tag{4.8}$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}DP(u)(t)\psi(t)dt = -DP(u_0)\int_0^T \phi(t)dt + \int_0^T DP(u)(t)\phi(t)dt. \tag{4.9}$$

Теперь, умножив обе части равенства (4.1) на функцию $\psi(t)$, с учетом (4.6)–(4.8) мы получим следующее равенство:

$$\int_0^T \left\{\frac{d}{dt}\left(A_0u(t) + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)(t)\right) + DP(u) + \int_0^t Lu(s)ds - F(u) - f\right\}\phi(t)dt = 0 \tag{4.10}$$

для всех $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$, где

$$f := -F(u_0) + DP(u_0) + A_0 u_1 + \sum_{j=1}^{n} A'_{jf}(u_0)u_1. \tag{4.11}$$

Полученное равенство (4.10) позволяет сформулировать определение сильного решения задачи Коши (4.1).

Определение 2. Функция $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];V_0)$ называется *сильным решением задачи Коши* (4.1), если для любой функции $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$ выполнено равенство (4.10), причем $u(0) = u_0 \in V_0$, $u_1 \in V_0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть банахово пространство V_0 сепарабельно, тогда в классе сильных решений задачи Коши* (4.1) *равенство* (4.10), *выполненное для любых* $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$, *эквивалентно равенству*

$$\int_0^T \left\langle \frac{d}{dt}\left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)(t)\right) + DP(u)(t) + \int_0^t Lu(s)ds - F(u) - f, v(t) \right\rangle_0 dt = 0 \tag{4.12}$$

для всех $v(t) \in \mathbb{C}([0,T];V_0)$.

Замечание 4. С учетом равенства скобок двойственности (2.1) и (2.2) равенство (4.12) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{gathered}\int_0^T \Bigg[\left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), v(t) \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), v(t) \right\rangle_j + \langle DP(u)(t), v(t) \rangle_0 + \\ + \int_0^t (Lu(s), v(t))_1 ds - (F(u), v(t))_2 - \langle f, v(t) \rangle_0 \Bigg] dt = 0\end{gathered} \tag{4.13}$$

для всех $v(t) \in \mathbb{C}([0,T];V_0)$. Теперь в равенстве (4.13) возьмем $v(t) = \phi(t)w$, $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$, $w \in V_0$ и получим следующее равенство:

$$\begin{gathered}\int_0^T \phi(t) \Bigg[\left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), w \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), w \right\rangle_j + \langle DP(u)(t), w \rangle_0 + \\ + \int_0^t (Lu(s), w)_1 ds - (F(u), w)_2 - \langle f, w \rangle_0 \Bigg] dt = 0\end{gathered} \tag{4.14}$$

для любых $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$ и $w \in V_0$. В силу условий на операторные коэффициенты имеем

$$\left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), w \right\rangle_0 \in \mathbb{C}[0,T], \quad \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), w \right\rangle_j \in \mathbb{C}[0,T], \tag{4.15}$$

$$\int_0^t (Lu(s), w)_1 ds \in \mathbb{C}[0,T], \quad (F(u), w)_2 \in \mathbb{C}[0,T], \tag{4.16}$$

$$\langle DP(u), w \rangle_0 \in \mathbb{C}[0,T]. \tag{4.17}$$

Поэтому из равенства (4.14) и свойств (4.15), (4.16) в силу основной леммы вариационного исчисления вытекает следующее равенство:

$$\begin{gathered}\left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), w \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), w \right\rangle_j + \langle DP(u)(t), w \rangle_0 + \\ + \int_0^t (Lu(s), w)_1 ds - (F(u), w)_2 - \langle f, w \rangle_0 = 0\end{gathered} \tag{4.18}$$

для всех $w \in V_0$ и всех $t \in [0,T]$.

Теперь рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$\frac{d}{dt}\left(A_0u(t)+\sum_{j=1}^{n}A_j(u)(t)\right)+DP(u)(t)+\int_0^t Lu(s)ds = F(u)+f, \tag{4.19}$$

$$u(0)=u_0. \tag{4.20}$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (4.19), (4.20).

Определение 3. *Классическим решением задачи Коши* (4.19), (4.20) называется функция $u(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];V_0)$, удовлетворяющая уравнению (4.19) для каждого $t\in[0,T]$ в смысле V_0^*, причем $u_0\in V_0$ и $f\in V_0^*$.

Совершенно понятно, что классическое решение задачи Коши (4.19) является сильным решением задачи Коши (4.1).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия разд. 2 на операторные коэффициенты A_0, A_j, L, DP и F. Тогда при дополнительном условии, что операторы $A_j(u)$ дважды непрерывно дифференцируемы по Фреше для всех $u\in V_j$, для любых u_0 и u_1 из V_0 найдется такое $T_0=T_0(u_0,u_1)>0$, что существует единственное классическое решение задачи Коши* (4.1) *класса $u(t)\in\mathbb{C}^{(2)}([0,T_0);V_0)$, причем либо $T_0=+\infty$, либо $T_0<+\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\lim_{t\uparrow T_0}\left\|A_0u+\sum_{j=1}^{n}A_j(u)\right\|_0^*(t)=+\infty. \tag{4.21}$$

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6.4 работы [1].

5. РАЗРУШЕНИЕ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (4.1) ПРИ $q+2>\overline{p}$

Пусть $u(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T_0);V_0)$ – классическое решение задачи (4.19). Прежде всего введем обозначения

$$\Phi(t)=\frac{1}{2}\langle A_0u,u\rangle_0+\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j-1}{p_j}\langle A_j(u),u\rangle_j, \tag{5.1}$$

$$J(t)=\langle A_0u',u'\rangle_0+\sum_{j=1}^{n}(p_j-1)\langle A'_{jf}(u)u',u'\rangle_j. \tag{5.2}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Имеет место следующее неравенство:*

$$(\Phi'(t))^2\le\overline{p}J(t)\Phi(t)\quad \textit{при}\quad \overline{p}=\max_{j=\overline{1,n}}p_j,\quad t\in[0,T_0). \tag{5.3}$$

Доказательство. Доказательство приведено в лемме 7.1 работы [1].

Заметим, что определение 2 сильного решения задачи Коши (4.1) эквивалентно равенству (4.18). Положим сначала в равенстве (4.18) $w=u(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T_0);V_0)$ из определения (5.1) функционала $\Phi(t)\in\mathbb{C}[0,T_0)$ и свойства (iv) условий DP, получим следующее первое энергетическое равенство:

$$\frac{d\Phi}{dt}+\int_0^t ds(Lu(s),u(t))_1=(F(u),u)_2+\langle f,u\rangle_0. \tag{5.4}$$

Теперь положим в равенстве (4.18) $w=u'(t)\in\mathbb{C}([0,T_0);V_0)$ и с учетом определения (5.2) функционала $J(t)$ получим второе энергетическое равенство

$$J(t)+\int_0^t ds(Lu(s),u'(t))_1+\left\langle DP(u),u'\right\rangle_0=\frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(F(u),u)_2+\frac{d}{dt}\langle f,u\rangle_0, \tag{5.5}$$

где мы воспользовались равенством

$$(F(u), u')_2 = \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(F(u), u)_2.$$

Выразим из равенства (5.4) величину $(F(u), u)_2$, подставим его в равенство (5.5) и после элементарных преобразований получим следующее выражение для функционала $J(t)$:

$$J(t) = \frac{1}{q+2}\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{q+2}(Lu, u)_1 - \langle DP(u), u'\rangle_0 - \frac{q+1}{q+2}\int\limits_0^t (Lu(s), u'(t))ds + \frac{q+1}{q+2}\langle f, u'\rangle_0. \tag{5.6}$$

Для дальнейшего мы воспользуемся неравенством Коши–Буняковского с произвольным $\varepsilon_1 > 0$:

$$ab \le \varepsilon_1 a^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}b^2, \quad a, b \ge 0.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{q+2}(Lu, u)_1 \le \frac{l}{q+2}\langle A_0 u, u\rangle_0 = \frac{2l}{q+2}\Phi(t), \tag{5.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{q+1}{q+2}\left|\int\limits_0^t (Lu(s), u'(t))_1 ds\right| \le \frac{q+1}{q+2} l \int\limits_0^t \langle A_0 u(s), u(s)\rangle_0^{1/2} \langle A_0 u'(t), u'(t)\rangle_0^{1/2} ds \le \\ \le \varepsilon\langle A_0 u'(t), u'(t)\rangle_0 + \left(\frac{q+1}{q+2}\right)^2 l^2 \frac{T}{4\varepsilon}\int\limits_0^t \langle A_0 u(s), u(s)\rangle_0 ds \le \varepsilon J(t) + \left(\frac{q+1}{q+2}\right)^2 l^2 \frac{T}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \Phi(s)ds,\end{gathered} \tag{5.8}$$

$$\frac{q+1}{q+2}|\langle f, u'\rangle_0| \le \frac{q+1}{q+2}\|f\|_0^* \|u'\|_0 \le \frac{q+1}{q+2}\|f\|_0^* \frac{1}{m_0^{1/2}}\langle A_0 u', u'\rangle_0^{1/2} \le \varepsilon J(t) + \left(\frac{q+1}{q+2}\right)^2 \frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon}, \tag{5.9}$$

$$\left|\left\langle DP(u), u'\right\rangle_0\right| \le \varepsilon\left\langle A_0 u', u'\right\rangle_0 + \frac{b}{\varepsilon}\left\langle A_0 u, u\right\rangle_0^{1+q_0} \le \varepsilon J(t) + \frac{d}{\varepsilon}\Phi^{1+q_0}(t). \tag{5.10}$$

Итак, из равенства (5.6) с учетом неравенств (5.7)–(5.9) получим оценку

$$(1-3\varepsilon)J(t) \le \frac{1}{q+2}\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + \frac{2l}{q+2}\Phi(t) + \left(\frac{q+1}{q+2}\right)^2 l^2\frac{T}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \Phi(s)ds + \left(\frac{q+1}{q+2}\right)^2\frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon} + \frac{d}{\varepsilon}\Phi^{1+q_0}(t). \tag{5.11}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1/3)$. Тогда из неравенств (5.3) и (5.11) получим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\begin{gathered}\Phi\Phi'' - \frac{q+2}{\bar{p}}(1-3\varepsilon)(\Phi')^2 + 2l\Phi^2 + \frac{(q+1)^2}{q+2}l^2\frac{T}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \Phi(s)ds\Phi(t) + \\ + \frac{(q+1)^2}{q+2}\frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon}\Phi + \frac{d(q+2)}{\varepsilon}\Phi^{2+q_0} \ge 0,\end{gathered} \tag{5.12}$$

которое перепишем в общем виде, сделав замену $3\varepsilon \mapsto \varepsilon$:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 + \gamma_1\Phi + \gamma_2 T\int\limits_0^t \Phi(s)ds\Phi(t) + \gamma_3\Phi^{1+\lambda} \ge 0, \tag{5.13}$$

где

$$\alpha = \frac{q+2}{\bar{p}}(1-\varepsilon), \quad \beta = 2l, \quad \gamma_1 = \frac{(q+1)^2}{q+2}\frac{3\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon}, \tag{5.14}$$

$$\gamma_2 = l^2\frac{(q+1)^2}{q+2}\frac{3}{2\varepsilon}, \quad \gamma_3 = \frac{3d(q+2)}{\varepsilon}, \quad \lambda = 1 + q_0. \tag{5.15}$$

Потребуем выполнения условия $\alpha > 1$. Отсюда получим неравенства

$$0 < \varepsilon < \frac{q+2-\bar{p}}{q+2}, \quad q+2 > \bar{p}. \tag{5.16}$$

Кроме того, имеем

$$2\alpha - 1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2\varepsilon}{\bar{p}}, \quad \alpha_1 = 2(q+2) - \bar{p}, \quad \alpha_2 = 2(q+2). \tag{5.17}$$

Выберем параметр $\varepsilon > 0$, входящий в коэффициенты (5.14), таким образом, чтобы коэффициент

$$\frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1}$$

равенства (3.3) принял минимальное значение:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \begin{cases} \dfrac{q+2-\bar{p}}{q+2} - \delta_0, & \text{если} \quad q+2 \le \dfrac{3}{2}\bar{p}, \\ \dfrac{2(q+2)-\bar{p}}{4(q+2)}, & \text{если} \quad \dfrac{3}{2}\bar{p} < q+2, \end{cases} \tag{5.18}$$

для любого малого $\delta_0 > 0$. Теперь подставим это значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ в коэффициенты (5.14). Проверим выполнимость условий теоремы 1.

Пусть $u_0 \in V_0$ и $f \in V_0^*$ — произвольные фиксированные, а $u_1 \in V_0$ — единственное решение следующего уравнения в V_0^*:

$$A_0 u_1 + \sum_{j=1}^{n} A'_{jf}(u_0)u_1 = -DP(u_0) + F(u_0) + f \in V_0^*. \tag{5.19}$$

Решение $u_1 \in V_0$ этого уравнения действительно существует в силу теоремы Браудера–Минти. В нашем случае функционал $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_0)$ имеет вид (5.1). Поэтому при $t = 0$ имеем

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}\langle A_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle A_j(u_0), u_0\rangle_j, \tag{5.20}$$

а производная Фреше функционала $\Phi(t)$ имеет следующий вид:

$$\Phi'(t) = \langle A_0 u', u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n}\langle (A_j(u))', u\rangle_j \langle A_0 u', u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n}\langle A'_{jf}(u)u', u\rangle_j. \tag{5.21}$$

Отсюда получаем, что

$$\Phi'(0) = \langle A_0 u_1, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n}\langle A'_{jf}(u_0)u_1, u_0\rangle_j. \tag{5.22}$$

С учетом равенства (5.19) и свойства (iv) условия DP получим следующее выражение:

$$\Phi'(0) = \big(F(u_0), u_0\big)_2 + \langle f, u_0\rangle_0. \tag{5.23}$$

Перепишем уравнение (3.3) в эквивалентном виде

$$K_1 T_1^4 + K_2 T_1^2 + K_3 = 0, \tag{5.24}$$

где

$$K_1 = \frac{\gamma_2}{\alpha - 1}(\Phi(0))^2, \quad K_3 = \frac{1}{(\alpha-1)^2}(\Phi(0))^2, \tag{5.25}$$

$$K_2 = \frac{\beta}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0) + \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda} - (\Phi'(0))^2. \tag{5.26}$$

Введем следующие функции:

$$I_1(R) = \left(\Phi'(0)\big|_{Ru_0}\right)^2 = \left((F(Ru_0), Ru_0)_2 + \langle f, Ru_0\rangle_0\right)^2 = \left(R^{q+2}\left(F(u_0), u_0\right)_2 + R\langle f, u_0\rangle_0\right)^2, \tag{5.27}$$

$$I_2(R) = \Phi(0)\big|_{Ru_0} = R^2\frac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^n R^{p_j}\frac{p_j - 1}{p_j}\langle A_j(u_0), u_0\rangle_j. \tag{5.28}$$

Подставим теперь в правые части равенств (5.25) и (5.26) вместо u_0 элемент Ru_0 при $R \geq 0$. Пусть, кроме того, $x = T_1^2$. Тогда биквадратное уравнение примет вид

$$K_1x^2 + K_2x + K_3 = 0. \tag{5.29}$$

Прежде всего, заметим, что в силу условий

$$q + 2 > \overline{p} = \max_{j=1,n} p_j, \quad 2(q+2) > \overline{p}(1+\lambda) \Rightarrow \lambda < \frac{2(q+2)}{\overline{p}} - 1 \tag{5.30}$$

и формул (5.27) и (5.28) коэффициент K_2 окажется отрицательным при достаточно большом $R > 0$ и при условии $(F(u_0), u_0)_2 \neq 0$. Дискриминант

$$\mathcal{D} = K_2^2 - 4K_1K_3$$

является положительным при достаточно большом $R > 0$. Итак, при достаточно большом $R > 0$ существует положительный корень уравнения (5.29)

$$T_1^2 = x = \frac{-K_2 + \sqrt{K_2^2 - 4K_1K_3}}{2K_1} > 0.$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены неравенства*

$$q + 2 > \overline{p}, \quad 0 < q_0 < 2\frac{q + 2 - \overline{p}}{\overline{p}},$$

$u_0 \in V_0$, $f \in V_0^*$ *и* $u_1 \in V_0$ *является решением уравнения* (5.19), *причем*

$$(F(u_0), u_0) \neq 0.$$

Тогда при достаточно большом $R > 0$ *для начальной функции* Ru_0 *функционал* $\Phi(t)$, *определенный формулой* (5.1), *удовлетворяет неравенству* (3.4).

Справедливо следующее утверждение (см. лемму 7.4 работы [1]):

Лемма 2. *Имеет место двустороннее неравенство*

$$M_1\Phi^{1/2}(t) \leq \|A(u)\|_0^* \leq M_2\Phi^{1/2} + \sum_{j=1}^n B_j\Phi^{(p_j-1)/p_j}(t), \tag{5.31}$$

где постоянные M_1, M_2 *и* B_j *больше нуля и не зависят от* $u(t)$,

$$A(u) := A_0u + \sum_{j=1}^n A_j(u).$$

Из этой леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены неравенства*

$$q + 2 > \overline{p}, \quad 0 < q_0 < 2\frac{q + 2 - \overline{p}}{\overline{p}},$$

в качестве начальной функции $u_0 \in V_0$ *взята функция* Ru_0, *а* $u_1 \in V_0$ *– решение уравнения* (5.19) *при* $f \in V_0^*$, *в котором вместо* u_0 *нужно подставить* Ru_0. *Тогда при достаточно большом* $R > 0$ *время* $T_0 > 0$ *существования классического решения задачи* (4.1) *конечно и имеет следующее предельное свойство:*

$$\lim_{t\uparrow T_0}\Phi(t) = +\infty, \tag{5.32}$$

а также справедлива оценка сверху $T_0 \leq T_1$ *на время разрушения решения, где число* T_1 *является положительным решением биквадратного уравнения* (3.3).

6. ПРИМЕРЫ

Приведем примеры начально-краевых задач, для которых справедливы полученные в работе результаты. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Пример 1. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta u - u - \sum_{j=1}^{n} |u|^{p_j-2} u\right) - u + \frac{\partial^2 |u|^{1+q_0}}{\partial t \partial x_1} - \frac{\partial |u|^q u}{\partial t} = 0, \tag{6.1}$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in H_0^1(\Omega), \tag{6.2}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{6.3}$$

где $p_j > 2$, $q_0 > 0$, $q > 0$. При этом рассматриваются следующие банаховы пространства:

$$V_0 = H_0^1(\Omega), \quad V_j = L^{p_j}(\Omega), \quad W_1 = H = L^2(\Omega), \quad W_2 = L^{q+2}(\Omega). \tag{6.4}$$

Пример 2. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta u - u - \sum_{j=1}^{n} |u|^{p_j-2} u\right) + a_1 \Delta u - a_2 u + \frac{\partial^2 |u|^{1+q_0}}{\partial t \partial x_1} - \frac{\partial |u|^q u}{\partial t} = 0, \tag{6.5}$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in H_0^1(\Omega), \tag{6.6}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{6.7}$$

где $p_j > 2$, $q > 0$, $q_0 > 0$, $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. При этом рассматриваются следующие банаховы пространства:

$$V_0 = H_0^1(\Omega), \quad V_j = L^{p_j}(\Omega), \quad W_1 = H_0^1(\Omega), \tag{6.8}$$

$$H = L^2(\Omega), \quad W_2 = L^{q+2}(\Omega). \tag{6.9}$$

Пример 3. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\Delta^2 u + \Delta u + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_j-2} \nabla u\right)\right) + \Delta u + \frac{\partial^2 |\nabla u|^{1+q_0}}{\partial t \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^q \nabla u\right), \tag{6.10}$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^2(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in H_0^2(\Omega), \tag{6.11}$$

$$u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial n_x} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{6.12}$$

где $p_j > 2$, $q_0 > 0$, $q > 0$. При этом рассматриваются следующие банаховы пространства:

$$V_0 = H_0^2(\Omega), \quad V_j = W_0^{1,p_j}(\Omega), \quad W_1 = H_0^1(\Omega), \tag{6.13}$$

$$H = L^2(\Omega), \quad W_2 = W_0^{1,q+2}(\Omega). \tag{6.14}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корпусов М.О.* Разрушение и глобальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши для формально гиперболического уравнения с некоэрцитивным источником // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 5. С. 119–150.
2. *Корпусов М.О.* Разрушение решений неклассических нелокальных нелинейных модельных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 621–648.
3. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
4. *Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations // De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl. 2011. V. 15. P. 648.