ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 4, с. 584–595

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956.4

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. Е. А. Бадерко[1,*], С. И. Сахаров[1,]**

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

**e-mail: baderko.ea@yandex.ru*

***e-mail: ser341516@yandex.ru*

Поступила в редакцию 11.08.2022 г.
Переработанный вариант 13.09.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для параболических систем второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини в полуограниченной области на плоскости с негладкой боковой границей, допускающей “клювы”. Доказаны теоремы о единственности классических решений этих задач в классе функций, непрерывных и ограниченных, вместе со своей пространственной производной первого порядка, в замыкании указанной области. Библ. 33.

Ключевые слова: параболические системы, начально-краевые задачи, единственность классического решения, негладкая боковая граница, граничные интегральные уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466923040038, **EDN:** IVVRGO

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию единственности классических решений первой и второй начально-краевых задач для одномерных по пространственной переменной x параболических систем второго порядка в полуограниченной области с негладкой боковой границей.

В случае одного уравнения единственность классического решения первой начально-краевой задачи следует из принципа максимума (см., например, [1, с. 27]), а единственность классического решения второй начально-краевой задачи установлена в [2], [3] с помощью теоремы о знаке косой производной. Заметим, что для систем, в отличие от уравнений, принцип максимума, вообще говоря, не имеет места (см. [4]).

Из [1, с. 706], [5] следует единственность классических решений параболических начально-краевых задач в пространстве Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, если боковая граница рассматриваемой области – достаточно гладкая кривая, а именно – из класса $H^{1+\alpha/2}$, т.е. функция, задающая указанную границу, обладает первой производной из пространства $H^{\alpha/2}[0,T]$.

Особый интерес указанные задачи представляют в случае областей с негладкими боковыми границами. Единственность решений первой и второй начально-краевых задач в ограниченных областях с боковыми границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$ для одномерных по пространственной переменной x параболических систем второго порядка с гёльдеровыми коэффициентами в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ функций, непрерывных и ограниченных, вместе со своей пространственной производной первого порядка, в замыкании указанных областей, доказана в [6], [7]. В случае области с боковыми границами из класса $H^{(1+\alpha)/2}$ для параболических систем с гёльдеровыми коэффициентами, не зависящими от временной переменной t, в [8] доказана теорема существования и единственности классического решения первой начально-краевой задачи из пространства $C^0(\bar{\Omega})$.

В [9]– [11] доказаны теоремы о существовании классических решений из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ первой и второй начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченных областях на плоскости с боковой границей из класса Дини-Гёльдера $H^{1/2+\omega}$. Здесь и до конца введения ω – некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (см. ниже (1)). В [12] установлена единственность классического решения первой начально-краевой задачи для параболической системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной области на плоскости с боковой границей из класса $H^{1/2+\omega}$ в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ при дополнительном условии на старшую производную $\partial_x^2 u$ этого решения и на характер его гладкости по временной переменной. В [13] доказана теорема о единственности классического решения из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ второй начально-краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области с боковой границей из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$.

В настоящей работе рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для параболических систем с дини-непрерывными коэффициентами в плоской полуограниченной области с негладкой боковой границей из класса Дини-Гёльдера $H^{1/2+\omega}$ и доказывается единственность их классических решений из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$. Заметим, что, как следует из работ [14], [15], рассматриваемое условие на характер непрерывности боковой границы является точным для классической разрешимости первой начально-краевой задачи в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$.

Параболические системы уравнений находят свое приложение, в частности, при описании эволюционных процессов в многокомпонентных средах (см., например, [16]– [21]).

Работа состоит из четырех разделов. В разд. 1 приводятся необходимые определения и формулируются основные теоремы. В разд. 2 доказывается вспомогательная лемма о единственности классического решения второй начально-краевой задачи для системы с дифференцируемыми коэффициентами. В разд. 3 и 4 доказываются основные теоремы.

Основные результаты статьи анонсированы в [22].

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть фиксировано число $T > 0$. Через $C[\tau,\eta]$, $0 \le \tau < \eta \le T$, обозначим пространство непрерывных вектор-функций $\psi : [\tau,\eta] \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, с нормой $\|\psi;[\tau,\eta]\|^0 = \max_{t\in[\tau,\eta]}|\psi(t)|$. Положим $\underset{0}{C}[\tau,\eta] = \{\psi \in C[\tau,\eta] : \psi(\tau) = 0\}$.

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (ее элементов).

Следуя [23, с. 147], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, для которой $\omega(0) = 0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если для него выполняется соотношение

$$\tilde{\omega}(z) = \int_0^z \omega(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \quad z > 0. \tag{1}$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим линейное пространство, состоящее из модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1).

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \in (0,T)\}$ выделяется область $\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$ с боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in \bar{\Omega} : x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяет следующему условию:

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| \le |\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad \omega_1 \in \mathcal{D}. \tag{2}$$

Обозначим через $C^{2,1}(\Omega)$ пространство вектор-функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, непрерывных, вместе со своими производными $\partial_t u$, $\partial_x^l u$, $l = 1,2$, в Ω. Через $C^0(\bar{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ с нормой $\|u;\Omega\|^0 = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega} |u(x,t)|$. Положим

$$\underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega}) = \left\{u \in C^0(\bar{\Omega}) \colon \partial_x u \in C^0(\bar{\Omega}),\ \partial_x^l u(x,0) = 0,\ l = 0,1,\ \|u;\Omega\|^{1,0} = \sum_{l=0}^{1} \left\|\partial_x^l u;\Omega\right\|^0 < \infty\right\}.$$

Под значениями функций и их производных на границе произвольной области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

Пусть ω – некоторый модуль непрерывности. Введем пространства:

$$H^{1/2+\omega}[0,T] = \left\{\psi \in C[0,T] \colon \|\psi;[0,T]\|^{1/2+\omega} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \sup_{\substack{t,t+\Delta t\in(0,T),\\ \Delta t\neq 0}} \left\{\frac{|\Delta_t \psi(t)|}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\} < \infty\right\},$$

$$\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T] = \{\psi \in H^{1/2+\omega}[0,T] \colon \psi(0) = 0\},$$

$$H^{\omega}(\bar{\Omega}) = \left\{u \in C^0(\bar{\Omega}) \colon \|u;\Omega\|^{\omega} = \|u;\Omega\|^0 + \sup_{\substack{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega,\\ (\Delta x)^2+|\Delta t|\neq 0}} \left\{\frac{|\Delta_{x,t} u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|) + \omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\} < \infty\right\},$$

$$\underset{0}{H}^{1,\omega}(\bar{\Omega}) = \left\{u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega}) \colon \|u;\Omega\|^{1,\omega} = \|u;\Omega\|^{1,0} + \sup_{\substack{(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega,\\ \Delta t\neq 0}} \left\{\frac{|\Delta_t u(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\} + \right.$$
$$\left. + \sup_{\substack{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega,\\ (\Delta x)^2+|\Delta t|\neq 0}} \left\{\frac{|\Delta_{x,t}\partial_x u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|) + \omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\} < \infty\right\},$$

где $\Delta_t \psi(t) = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$, $\Delta_{x,t} u(x,t) = u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x,t)$.

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2}\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T],$$

есть оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [24], [25], введем пространство

$$\underset{0}{C}^{1/2}[0,T] = \left\{\psi \in \underset{0}{C}[0,T] \colon \partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T],\ \|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \left\|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\right\|^0 < \infty\right\}.$$

Замечание 1. Если $\psi \in \underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega \in \mathfrak{D}$, то $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ (см. [26]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [25]).

В полосе D рассматривается равномерно параболический по Петровскому (см. [27]) оператор

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l(x,t)\partial_x^l u, \quad u = (u_1,\ldots,u_m)^{\mathrm{т}}, \quad m \in \mathbb{N}\setminus\{1\},$$

где $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$, $l = 0,1,2$, суть $m \times m$-матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определенные в $\bar{D}$ и удовлетворяющие следующим условиям:

(a) собственные числа μ_r, $r = \overline{1,m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\mathrm{Re}\,\mu_r(x,t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \bar{D}$.

(б) $a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\bar{D})$, где ω_0 – модуль непрерывности такой, что

$$\tilde{\tilde{\omega}}_0(z) = \int_0^z y^{-1}dy\int_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \quad z > 0.$$

Положим $D^* = \{(x,t;\xi,\tau) \in \bar{D}\times\bar{D}: t > \tau\}$. Известно (см. [28], если $m = 1$, и [29], если $m \geq 2$), что при выполнении условий (а) и (б) у системы $Lu = 0$ существует фундаментальная матрица решений (ФМР) $\Gamma(x,t;\xi,\tau), (x,t;\xi,\tau) \in D^*$, и справедливы оценки

$$\left|\partial_t^k\partial_x^l\Gamma(x,t;\xi,\tau)\right| \leq C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad 2k+l \leq 2, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*.$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T, m, коэффициентов оператора L и модуля непрерывности ω_1.

Основное содержание настоящей работы составляют следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (а), (б) *и* (2). *Предположим, что вектор-функция* $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ – *решение задачи*

$$Lu = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u(x,0) = 0, \quad x \geq g(0), \tag{3}$$

$$\partial_x u(g(t),t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Тогда $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (а), (б) *и* (2). *Предположим, что вектор-функция* $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ – *решение задачи*

$$Lu = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u(x,0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad u(g(t),t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Тогда $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Замечание 2. Из результатов [15] следует, что если $g \in H^{1/2+\omega_1}[0,T]$, причем модуль непрерывности ω_1 не удовлетворяет условию (1), то классическое решение первой начально-краевой задачи из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ может не существовать.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (2), (а) *и, кроме того,* (б) $\partial_x^k a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\bar{D})$, $i,j = \overline{1,m}$, $l = 0,1,2$, $0 \leq k \leq l$.

Предположим, что $\omega \in \mathcal{D}$ *и вектор-функция* $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ – *решение задачи* (3), (4), *удовлетворяющее условиям*

$$|\Delta_t u(x,t)| \leq |\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2}), \quad (x,t),(x,t+\Delta t) \in \bar{\Omega}, \tag{6}$$

$$|\partial_x^2 u(x,t)| \leq C[\omega^*(d(x,t))d^{-1}(x,t) + 1], \quad (x,t) \in \Omega, \tag{7}$$

где $d(x,t) = |x - g(t)|$, ω^* – *некоторый модуль непрерывности. Тогда* $u \equiv 0$ *в* $\bar{\Omega}$.

Доказательство. Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям леммы. Тогда u является решением первой начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad v(x,0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad v(g(t),t) = \psi(t),$$

где $\psi(t) = u(g(t),t)$, $t \in [0,T]$. При этом функция ψ принадлежит пространству $\underset{0}{H}^{1/2+\omega+\omega_1}[0,T]$. Из [10–12], [30] следует, что функция u может быть представлена в виде векторного потенциала простого слоя

$$u(x,t) = \int_0^t \Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}, \tag{8}$$

где $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ — единственное в $C[0,T]$ решение граничного интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\int_0^t \Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau = \psi(t), \quad t \in [0,T].$$

Подставляя функцию (8) в граничное условие (4) и пользуясь формулой “скачка” для пространственной производной параболического потенциала простого слоя (см. [29]), получаем, что вектор-функция φ одновременно является решением граничного интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$-(2A_2(g(t),t))^{-1}\varphi(t) + \int_0^t \partial_x\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

В силу единственности в $C[0,T]$ решения уравнения (9) (см. [9]) получаем, что $\varphi \equiv 0$. Подставляя найденное решение φ в представление (8), приходим к выводу, что $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (а), (б) *и* $f \in C^0(\bar{\Omega})$. *Тогда для векторного объемного потенциала*

$$Vf(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{g(\tau)}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi, \quad (x,t) \in \bar{\Omega},$$

справедливы оценки

$$|\partial_x^l Vf(x,t)| \le C\,\|f;D\|^0\, t^{1-l/2}, \quad l = 0,1,$$
$$|\Delta_t Vf(x,t)| \le C\,\|f;D\|^0\,|\Delta t|(1 + |\ln|\Delta t||),$$
$$|\Delta_t\partial_x Vf(x,t)| \le C\,\|f;D\|^0\,|\Delta t|^{1/2},$$
$$|\Delta_x\partial_x Vf(x,t)| \le C\,\|f;D\|^0\,|\Delta x|(1 + |\ln|\Delta x||),$$
$$(x,t),(x+\Delta x,t),(x,t+\Delta t) \in \bar{\Omega}, \quad \Delta x \ne 0, \quad \Delta t \ne 0.$$

Лемма 2 доказывается методом из [31], где рассматривается случай $\omega_0(z) = \omega_1(z) = Cz^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Зададим функцию $\rho \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ равенствами

$$\rho(x,t) = C_1\exp\{(x^2+t^2-1)^{-1}\}, \quad x^2+t^2 < 1, \quad \rho(x,t) = 0, \quad x^2+t^2 \ge 1, \tag{10}$$

где постоянная C_1 выбирается из условия

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x,t)dxdt = 1. \tag{11}$$

Продолжим коэффициенты оператора L на $\mathbb{R}^2$, полагая

$$\hat{a}_{ijl}(x,t) = a_{ijl}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{D} \quad \hat{a}_{ijl}(x,t) = a_{ijl}(x,0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t < 0,$$
$$\hat{a}_{ijl}(x,t) = a_{ijl}(x,T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > T.$$

Для любого числа $r > 0$ положим

$$a_{ijl}^{(r)}(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{a}_{ijl}(x - ry, t - r\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau, \quad (x,t) \in \bar{D}, \quad i,j = \overline{1,m}, \quad l = 0,1,2,$$

и определим матричный оператор $L^{(r)}$ со “сглаженными” коэффициентами:

$$L^{(r)}u \equiv L^{(r)}(x,t)u = \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l^{(r)}(x,t)\partial_x^l u,$$

где $A_l^{(r)} = \left\| a_{ijl}^{(r)} \right\|_{i,j=1}^m$. Заметим, что коэффициенты операторов $L^{(r)}$ ограничены и бесконечно дифференцируемы в $\bar{D}$. Кроме того, существует число $r_0 > 0$ такое, что коэффициенты операторов $L^{(r)}$ удовлетворяют равномерно по $r \in (0, r_0)$ условию (a) с постоянной параболичности $\delta/2$ и условию (б) (см. [32]). Поэтому существуют ФМР $\Gamma^{(r)}$ систем $L^{(r)}u = 0$, причем справедливы оценки

$$\left|\partial_x^l \Gamma^{(r)}(x,t;\xi,\tau)\right| \le C(t-\tau)^{-(l+1)/2} \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \\ (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \quad r \in (0,r_0), \quad l = 0,1,2, \tag{12}$$

с постоянными C, c, не зависящими от $r \in (0, r_0)$. Не ограничивая общности, далее считаем, что $r \in (0, r_0)$, $r_0 \le 1$.

Для любых чисел $h > 0$, ограниченной вектор-функции $v : \bar{D} \to \mathbb{R}$ и множества $\mathcal{B} \subset \bar{D}$ положим

$$\omega(h; v; \mathcal{B}) = \sup_{|z_1 - z_2| \le h,\ z_1, z_2 \in \mathcal{B}} \left|v(z_1) - v(z_2)\right|. \tag{13}$$

Для любого числа $R > 0$ обозначим

$$\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}. \tag{14}$$

Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям теоремы 1. Зафиксируем произвольную точку $(x_0, t_0) \in \Omega$ и докажем, что $u(x_0, t_0) = 0$.

Рассмотрим область $\Omega_d = \{(x,t) \in \Omega \colon x > g(t) + d,\ d < t < T - d\}$, где число $0 < d < \min\left\{1, \frac{T}{2}\right\}$ мало так, что $(x_0, t_0) \in \Omega_d$ (число d будет выбрано ниже). Пусть $\hat{u}$ – продолжение вектор-функции u с $\bar{\Omega}$ на $\bar{D}$ с сохранением класса $\underset{0}{C}^{1,0}$ (см. [1, с. 344]), удовлетворяющее оценке

$$\|\hat{u}; D\|^{1,0} \le C\,\|u; \Omega\|^{1,0}.$$

Тогда вектор-функция $\bar{u}$, определяемая равенствами

$$\bar{u}(x,t) = \hat{u}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{D}, \tag{15}$$

$$\bar{u}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t < 0, \quad \bar{u}(x,t) = \hat{u}(x,T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > T, \tag{16}$$

является продолжением u с $\bar{\Omega}$ на $\mathbb{R}^2$ с сохранением класса $C^{1,0}$, причем

$$\left\|\bar{u}; \mathbb{R}^2\right\|^{1,0} \le C\,\|u; \Omega\|^{1,0}.$$

Для каждого $s > 0$ определим “сглаженную” вектор-функцию

$$u_s(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \bar{u}(x - sy, t - s\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau, \quad (x,t) \in \bar{D}.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Обозначим $\|u\|^{1,0} = \|u; \Omega\|^{1,0}$. Поскольку существует число $0 < s_0 < 1$ такое, что для любого числа $0 < s < s_0$ имеет место неравенство

$$\left|u_s(x_0,t_0) - \bar{u}(x_0,t_0)\right| < \varepsilon,$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что существует число $0 < s_1 < s_0$ такое, что для любого числа $0 < s < s_1$ имеет место неравенство

$$|u_s(x_0, t_0)| < \varepsilon. \tag{17}$$

Пусть $\zeta_R \in C^\infty(\mathbb{R})$ – функция со следующими свойствами:

$$0 \le \zeta_R(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \zeta_R \equiv 1, \quad |x| \le R, \quad \zeta_R \equiv 0, \quad |x| \ge 2R, \tag{18}$$

$$\left|\frac{d^l \zeta_R}{dx^l}(x)\right| \le CR^{-l}, \quad l = 1, 2, \tag{19}$$

где число

$$R \ge R_0 = \max(2|x_0|, 2\max_{t\in[0,T]}|g(t) + d|, 1).$$

Положим

$$u_{s,R}(x,t) = u_s(x,t)\zeta_R(x).$$

Для произвольных $0 < s < d$, $0 < r < r_0$ и $R \ge R_0$ вектор-функция $u_{s,R}$ является решением задачи

$$L^{(r)} v = f_{s,R}^{(r)} \ \text{ в } \ \Omega_d, \quad v(x,d) = h_{s,R,d}(x), \quad x \ge g(d) + d, \tag{20}$$

$$\partial_x v(g(t) + d, t) = \theta_{s,R,d}(t), \quad t \in [d, T - d], \tag{21}$$

где $f_{s,R}^{(r)}(x,t) = L^{(r)} u_{s,R}(x,t)$, $h_{s,R,d}(x) = u_{s,R}(x,d)$, $\theta_{s,R,d}(t) = \partial_x u_{s,R}(g(t) + d, t)$, причем выполнено условие согласования

$$\partial_x h_{s,R,d}(g(d) + d) = \theta_{s,R,d}(d). \tag{22}$$

Так как функции $f_{s,R}^{(r)}$, $h_{s,R,d}$ и $\theta_{s,R,d}$ – достаточно гладкие, то в силу единственности решения задачи (20), (21) (см. лемму 1), результатов [9] и гладкости соответствующих параболических потенциалов (см. лемму 2 и [30]) вектор-функция $u_{s,R}$ для произвольных $0 < s < d$ и $R \ge R_0$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} u_{s,R}(x,t) = &\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^{(r)}(x,t;\xi,d) h_{s,R,d}(\xi) d\xi + \int_d^t d\tau \int_{g(\tau)+d}^{+\infty} \Gamma^{(r)}(x,t;\xi,\tau) f_{s,R}^{(r)}(\xi,\tau) d\xi + \\ &+ \int_d^t \Gamma^{(r)}(x,t;g(\tau)+d,\tau)\varphi_{s,R,d}^{(r)}(\tau) d\tau \equiv P_{s,R,d}^{(r)}(x,t) + V_{s,R,d}^{(r)}(x,t) + U_{s,R,d}^{(r)}(x,t). \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь вектор-плотность $\varphi_{s,R,d}^{(r)} \in \underset{0}{C}[d, T - d]$ – единственное в $C[d, T - d]$ решение граничного интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$-(2A_2^{(r)}(g(t) + d, t))^{-1}\varphi_{s,R,d}^{(r)}(t) + \int_d^t \partial_x \Gamma^{(r)}(g(t) + d, t; g(\tau) + d, \tau)\varphi_{s,R,d}^{(r)}(\tau) d\tau = \hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)}(t), \quad t \in [d, T - d], \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)}(t) &= \theta_{s,R,d}(t) - \partial_x V_{s,R,d}^{(r)}(g(t) + d, t) - \partial_x P_{s,R,d}^{(r)}(g(t) + d, t) \equiv \\ &\equiv \partial_x u_{s,R}(g(t) + d, t) - \partial_x V_{s,R}^{(r)}(g(t) + d, t) - \partial_x P_{s,R,d}^{(r)}(g(t) + d, t). \end{aligned}$$

Оценим потенциалы из представления (23). Рассмотрим сначала потенциал Пуассона $P_{s,R,d}^{(r)}$. Пусть $(x,t) \in \bar{\Omega}_d$. Для любых $0 < s < d$, $0 < r < r_0$ и $R \ge R_0$ в силу (18) справедливо равенство

$$P_{s,R,d}^{(r)}(x,t) = \int_{|\xi|<2R} \Gamma^{(r)}(x,t;\xi,d) h_{s,R,d}(\xi) d\xi. \tag{25}$$

Используя (10), (11), (15) и (16), получаем (см. обозначения (13), (14)):

$$|h_{s,R,d}(\xi)| = \left|\zeta_R(\xi)\iint\limits_{\mathbb{R}^2}[\overline{u}(\xi - sy, d - s\tau) - \overline{u}(\xi - sy, 0)]\rho(y,\tau)dyd\tau\right| \le \\ \le C\omega(2d;\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T]), \quad \xi\in\mathcal{B}_{2R}. \tag{26}$$

Отсюда и из оценок (12) вытекает неравенство

$$\left|P^{(r)}_{s,R,d}(x,t)\right| \le C\omega_0(d;R),$$

где $\omega_0(d,R) = \omega(2d;\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T])$.

Оценим $\partial_x P^{(r)}_{s,R,d}(x,t)$. Обозначим через $\Gamma^{(r)}_1(x,t;\xi,\tau)$ ФМР системы

$$L^r_1(x,t)\nu = \partial_t v - A^{(r)}_2(x,t)\partial^2_x v - A^{(r)}_1(x,t)\partial_x v = 0.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma^{(r)}_1(x,t;\xi,d)d\xi = E, \quad (x,t)\in\overline{D},$$

где E — единичная матрица. В силу единственности решения задачи Коши (см. [33, с. 269]) ФМР системы $L^{(r)}u = 0$ может быть представлена в виде

$$\Gamma^{(r)}(x,t;\xi,\tau) = \Gamma^{(r)}_1(x,t;\xi,\tau) + W^{(r)}(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*, \tag{27}$$

где

$$W^{(r)}(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_\tau^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma^{(r)}(x,t;y,\eta)A^{(r)}_0(y,\eta)\Gamma^{(r)}_1(y,\eta;\xi,\tau)dy,$$

причем имеют место оценки

$$\left|\partial^l_x W^{(r)}(x,t;\xi,\tau)\right| \le C(t-\tau)^{(1-l)/2}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad l = 0,1. \tag{28}$$

Из (25) и (27) следует, что

$$\partial_x P^{(r)}_{s,R,d}(x,t) = \int\limits_{|\xi|<2R}[\partial_x\Gamma^{(r)}_1(x,t;\xi,d)][h_{s,R,d}(\xi) - h_{s,R,d}(x)]d\xi + \\ + \int\limits_{|\xi|<2R}\partial_x W^{(r)}(x,t;\xi,d)h_{s,R,d}(\xi)d\xi = J^{1,(r)}_{s,R,d}(x,t) + J^{2,(r)}_{s,R,d}(x,t).$$

Оценим $J^{1,(r)}_{s,R,d}$. Имеем

$$h_{s,R,d}(\xi) - h_{s,R,d}(x) \equiv [u_s(\xi,d) - u_s(x,d)]\zeta_R(\xi) + u_s(x,d)[\zeta_R(\xi) - \zeta_R(x)] = \\ = (\xi - x)\left[\partial_\xi u_s(\overline{\xi}_1,d)\zeta_R(\xi) + u_s(x,d)\frac{d\zeta_R}{dx}(\overline{\xi}_2)\right],$$

где точки $\overline{\xi}_i$, $i = 1,2$, расположены между ξ и x. В силу (10), (11), (15), (16) при $0 < s < d$ справедливы неравенства:

$$\left|\partial_\xi u_s(\overline{\xi}_1,d)\right| \le C\iint\limits_{y^2+\tau^2<1}\left|\partial_\xi\overline{u}(\overline{\xi}_1 - sy, d - s\tau) - \partial_\xi\overline{u}(\overline{\xi}_1 - sy, 0)\right|dyd\tau \le \\ \le C\omega(2d;\partial_x\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T]), \quad \overline{\xi}_1\in\mathcal{B}_{2R}.$$

Отсюда и из (12), (18), (19) находим

$$\left|\partial_x J^{1,(r)}_{s,R}(x,t)\right| \le C(\omega_1(d,R) + \|u\|^{1,0}R^{-1}), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_d,$$

где $\omega_1(d,R) \equiv \omega(2d;\partial_x\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T])$.

Оценим $J^{2,(r)}_{s,R,d}$. В силу (26) и (28) получаем

$$\left|J^{2,(r)}_{s,R,d}(x,t)\right| \le C\omega_0(d,R)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-d}\right)d\xi \le C\omega_0(d,R), \quad (x,t)\in\bar{\Omega}_d.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\left\|P^{(r)}_{s,R,d};\Omega_d\right\|^{1,0} \le C(\omega_0(d;R)+\omega_1(d;R)+\|u\|^{1,0}\,R^{-1}). \tag{29}$$

Рассмотрим объемный потенциал $V^{(r)}_{s,R,d}$. Оценим $f^{(r)}_{s,R}$. Имеем

$$\begin{gathered} f^{(r)}_{s,R}(x,t) = [L^{(r)}u_s(x,t)]\zeta_R(x) - A^{(r)}_2(x,t)\left[2\partial_x u_s(x,t)\frac{d\zeta_R}{dx}(x) + u_s(x,t)\frac{d^2\zeta_R}{dx^2}(x)\right] - \\ - A^{(r)}_1(x,t)u_s(x,t)\frac{d\zeta_R}{dx}(x), \quad (x,t)\in\bar{\Omega}_d. \end{gathered} \tag{30}$$

В силу соотношений (18), (19), (30) и условия (б) получаем

$$\left|f^{(r)}_{s,R}(x,t)\right| \le \left|[L^{(r)}u_s(x,t)]\zeta_R(x)\right| + C\,\|u\|^{1,0}\,R^{-1}.$$

Справедливо представление

$$\begin{gathered} L^{(r)}u_s(x,t) = \iint\limits_{y^2+\tau^2<1} L^{(r)}(x,t)\bar{u}(x-sy,t-s\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau = \\ = \iint\limits_{y^2+\tau^2<1}[L^{(r)}(x,t)-L^{(r)}(x-sy,t-s\tau)]\bar{u}(x-sy,t-s\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau + \\ + \iint\limits_{y^2+\tau^2<1}[L^{(r)}(x-sy,t-s\tau)-L(x-sy,t-s\tau)]\bar{u}(x-sy,t-s\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau. \end{gathered}$$

Используя условие (б) и гладкость $\bar{u}$, при $0<s\le d/2$, $0<r<r_0$, $R\ge R_0$ находим

$$\left|L^{(r)}u_s(x,t)\zeta_R(x)\right| \le C(d,R)[\omega_0(s^{1/2})+\omega_0(r^{1/2})], \quad (x,t)\in\bar{\Omega}_d.$$

Здесь и далее обозначаем $C(d,R) = C(\|u\|^{1,0} + \sup\limits_{\Omega_{d/2}\cap(\mathcal{B}_R\times[0,T])}|\partial^2_x u|)$.

Таким образом, при $0<s\le d/2$, $0<r<r_0$, $R\ge R_0$ выполнена оценка

$$\left|f^{(r)}_{s,R}(x,t)\right| \le C(d,R)[\omega_0(s^{1/2})+\omega_0(r^{1/2})] + C\,\|u\|^{1,0}\,R^{-1}, \quad (x,t)\in\bar{\Omega}_d.$$

Следовательно, в силу свойств объемного потенциала (см. лемму 2) для любых $0<s\le d/2$, $0<r<r_0$, $R\ge R_0$ вектор-функция $V^{(r)}_{s,R,d}$ обладает следующими свойствами:

$$V^{(r)}_{s,R,d}\in C^{1,0}(\bar{\Omega}_d), \tag{31}$$

$$\left\|V^{(r)}_{s,R,d};\Omega_d\right\|^{1,0} \le C(d,R)[\omega_0(s^{1/2})+\omega_0(r^{1/2})] + C\,\|u\|^{1,0}\,R^{-1}. \tag{32}$$

Рассмотрим потенциал простого слоя $U^{(r)}_{s,R,d}$. Оценим $\hat{\theta}^{(r)}_{s,R,d}$. В силу (29) и (32) достаточно оценить вектор-функцию $\theta_{s,R,d}$. Положим

$$\theta_{s,R,d}(t) = \{\partial_x[(u_s(x,t)-\bar{u}(x,t))\zeta_R(x)] + \partial_x[\bar{u}(x,t)\zeta_R(x)]\}_{x=g(t)+d} = \theta^1_{s,R,d}(t)+\theta^2_{s,R,d}(t).$$

При $0<s\le d^2/[4(1+\mathcal{M})^2]$, $\mathcal{M}=\omega_1(1)$, $0<r<r_0$ и $R\ge R_0$ имеем

$$\left|\theta^1_{s,R,d}(t)\right| \le C\int\limits_{y^2+\tau^2<1}\left|\partial_x[\{\bar{u}(x-sy,t-s\tau)-\bar{u}(x,t)\}\zeta_R(x)]\right|_{x=g(t)+d}dyd\tau \le C[\omega_0(d;R)+\omega_1(d;R)],$$

$$\left|\theta^2_{s,R,d}(t)\right| = \left|\partial_x[\overline{u}(x,t)\zeta_R(x)]\right|_{x=g(t)+d} =$$
$$= \left|[\partial_x\overline{u}(g(t)+d,t) - \partial_x\overline{u}(g(t),t)]\zeta_R(g(t)+d) + \overline{u}(g(t)+d,t)\frac{d\zeta_R}{dx}(g(t)+d)\right| \le$$
$$\le C\omega_0(d;R) + C\|u\|^{1,0} R^{-1}, \quad t\in[d,T-d].$$

Следовательно,

$$\|\theta_{s,R,d};[d,T-d]\|^0 \le C[\omega_0(d;R) + \omega_1(d;R)] + C\|u\|^{1,0} R^{-1}. \tag{33}$$

Из (22), (29), (31)–(33) следует, что $\hat{\theta}^{(r)}_{s,R,d} \in \underset{0}{C}[d,T-d]$ и выполнены неравенства

$$\left\|\hat{\theta}^{(r)}_{s,R,d};[d,T-d]\right\|^0 \le C[\|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d;R) + \omega_1(d;R)] + C(d,R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})].$$

Отсюда заключаем, что для решения $\varphi^{(r)}_{s,R,d} \in \underset{0}{C}[d,T-d]$ уравнения (24) имеет место оценка

$$\left\|\varphi^{(r)}_{s,R,d};[d,T-d]\right\|^0 \le C[\|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d;R) + \omega_1(d;R)] + C(d,R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})]$$

и, следовательно,

$$\left|U^{(r)}_{s,R,d}(x,t)\right| \le C[\|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d;R) + \omega_1(d;R)] + C(d,R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})], \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_d.$$

Отсюда и из неравенств (29), (32) при $(x,t)\in\Omega_d$ находим

$$|u_{s,R}(x,t)| \le C[\|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d;R) + \omega_1(d;R)] + C(d,R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})],$$

где постоянная C не зависит от R, d, s и r, а $C(d,R)$ – от s и r. Выбирая последовательно достаточно большое $R\ge R_0$, а затем – достаточно малые $d = d(R)$, $0 < r = r(d,R) < r_0$ и $s_1 = s_1(d,R) \le d^2/[4(1+\mathcal{M})^2]$, получаем неравенство (17). Теорема 1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда u является решением второй начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad v(x,0) = 0, \quad x\ge g(0), \quad \partial_x v(g(t),t) = \theta(t),$$

где $\theta(t) = \partial_x u(g(t),t)$, $t\in[0,T]$, $\theta\in\underset{0}{C}[0,T]$. Из теоремы 1 и результатов [9] следует, что вектор-функция u может быть представлена в виде потенциала простого слоя (8), где $\varphi\in\underset{0}{C}[0,T]$ — единственное в $C[0,T]$ решение интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$-(2A_2(g(t),t))^{-1}\varphi(t) + \int_0^t \partial_x\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau = \theta(t), \quad t\in[0,T].$$

Подставляя вектор-функцию (8) в граничное условие задачи (5), получаем, что вектор-плотность φ одновременно является решением интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\int_0^t \Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau = 0, \quad t\in[0,T]. \tag{34}$$

В силу единственности в $C[0,T]$ решения уравнения (34) (см. [11]) получаем, что $\varphi\equiv 0$. Подставляя найденное решение φ в представление (8), приходим к выводу, что $u\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

2. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* О приложениях принципа максимума к параболическим уравнениям 2-го порядка // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 529–532.
3. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. ж. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
4. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.
5. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.
6. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. АН. 2020. Т. 494. № 5. С. 5–8.
7. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.
8. *Коненков А.Н.* Классические решения первой краевой задачи для параболических систем на плоскости // Докл. АН. 2022. Т. 503. С. 67–69.
9. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини. Дисс. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1992.
10. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 1. С. 7–10.
11. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Applicable Analysis. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
12. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной негладкой плоской области // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 5. С. 625–634.
13. *Бадерко Е.А., Стасенко А.А.* О гладком решении второй начально-краевой задачи для модельной параболической системы в полуограниченной негладкой области на плоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 3. С. 39–50.
14. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальная регулярность (в смысле Липшица) решений параболического уравнения 2-го порядка вблизи боковой части параболической границы // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 4. С. 785–788.
15. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. ж. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
16. *Ворошнин Л.Г., Хусид Б.М.* Диффузионный массоперенос в многокомпонентных системах. Минск: Наука и техн. 1979. 255 с.
17. *Гуров К.П., Карташкин Б.А., Угасте Ю.Э.* Взаимная диффузия в многофазных металлических системах. М.: Наука. 1981. 350 с.
18. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
19. *Князева А.Г.* Перекрестные эффекты в твердых средах с диффузией // Прикл. механ. и техн. физ. 2003. Т. 44. № 3. С. 85–99.
20. *Дышин О.А.* Разрешимость в гёльдеровых функциях задачи нестационарной фильтрации жидкости в трещиновато-пористом кольцевом пласте // Науч. труды НИПИ Нефтегаз ГНКАР. 2012. № 2. С. 74–81.
21. *Семенов М.Ю., Смирнов А.Е., Лашнев М.М., Ступников В.В.* Математическая модель вакуумной нитроцементации теплостойкой стали ВКС-10 // Наука и образование, научн. изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 8. С. 75–90.
22. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. АН. 2022. Т. 503. С. 26–29.
23. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
24. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. АН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
25. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
26. *Камынин Л.И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини-Гёльдера // Сиб. матем. ж. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.

27. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. 1. № 7. С. 1–72.
28. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$-параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
29. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини. 1992. Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
30. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Smoothness in the Dini space of a single layer potential for a parabolic system in the plane // J. Math. Sci. 2018. V. 235. № 2. P. 154–167.
31. *Черепова М.Ф.* О гладкости потенциала объемных масс для параболических систем // Вестн. МЭИ. 1999. № 6. С. 86–97.
32. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem // Appl. Anal. 2016. V. 95. № 7. P. 1570–1580.
33. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964. 444 с.