ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 4, с. 596–613

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.957

РЕЗУЛЬТАТЫ СИММЕТРИЙНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ 2-ПОЛЕВЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ 3-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННОЙ СЕПАРАНТОЙ

М. Ю. Балахнев[1,*]

[1] *302026 Орел, ул. Комсомольская, 95, Орловский гос. университет, Россия*

**e-mail: balakhnev@yandex.ru*

Поступила в редакцию 01.09.2022 г.
Переработанный вариант 29.11.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Представлены результаты симметрийной классификации нелинейных интегрируемых 2-полевых эволюционных систем 3-го порядка с постоянной сепарантой. Библ. 12.

Ключевые слова: интегрируемые системы, канонические плотности, законы сохранения.

DOI: 10.31857/S004446692304004X, **EDN:** KJYCLB

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена классификации нелинейных интегрируемых эволюционных систем третьего порядка с двумя независимыми переменными и двумя неизвестными функциями вида

$$u_t = u_{xxx} + F(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \quad v_t = av_{xxx} + G(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \tag{1.1}$$

где $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$, $a = (3c - 7)/2$, $c^2 = 5$.

Некоторые системы вида (1.1) впервые были представлены в [1]:

$$u_t = u_{xxx} + v_x + uu_x, \quad v_t = Av_{xxx} + Bu_x u_{xx} + Cu^2 u_x + Duv_x + Evu_x \tag{1.2}$$

с постоянными A, B, C, D, E вида $p + q\sqrt{5}, p, q \in \mathbb{Q}$.

Спустя более 40 лет после первого упоминания опубликовано сравнительно небольшое количество работ, посвященных изучению различных свойств (1.2) (см., например, [2–4]). Однако на сегодняшний день полный перечнь интегрируемых методом обратной задачи рассеяния систем вида (1.1) отсутствовал. Вместе с тем метод построения интегрируемых уравнений и систем, основанный на исследовании законов сохранения (см. [5]), применялся при решении достаточно большого числа классификационных задач (см. [6–12]). Так, в [10] получены рекуррентные соотношения для канонических сохраняющихся плотностей систем вида (1.1). Мы не будем воспроизводить здесь все выполненные в [10] выкладки, а отметим лишь основные моменты.

По сложившейся практике введем стандартные обозначения $u_n = \partial^n u/\partial x^n$, $v_n = \partial^n v/\partial x^n$, $n = 0,1,\ldots$, $\mathbf{u}_n = (u_n, v_n)$. Число n назовем *порядком переменных* u_n и v_n, а *порядком функции* $f(\mathbf{u})$ – наибольший из порядков переменных u_i, v_j, от которых она зависит. Частные производные функций обозначим нижними индексами, например, $F_{u_1} = \partial F/\partial u_1$, $f_{1,uv_1} = \partial^2 f_1/(\partial u \partial v_1)$ и т.д.

2. ДОПУСТИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В процессе классификации выполнялись, когда это было необходимо, некоторые преобразования, не выводящие систему из заданного класса. Например, точечные преобразования $\{u \to f(x,u), v \to g(x,v)\}$ приведут к уравнениям, зависящим от x, тогда как в (1.1) x отсутствует. Точно так же замена $\{u \to f(u,v), v \to g(u,v)\}$ приведет к тому, что в обоих уравнениях (1.1) появятся слагаемые с u_3 и v_3 (см., например, [4]), что неприемлемо в рамках данной классификационной задачи. Отметим точечные преобразования, не изменяющие типа системы (1.1):

– масштабные преобразования

$$t \to \lambda^3 t, \quad t \to \lambda x; \tag{2.1}$$

– преобразование Галилея

$$x \to x - ct, \quad u_t \to u_t - cu_x; \tag{2.2}$$

– точечное преобразование с диагональной матрицей Якоби

$$u \to f(u), \quad v \to g(v); \tag{2.3}$$

– инволюция

$$u \to v, \quad v \to u, \quad t \to a^{-1}t. \tag{2.4}$$

Эти преобразования переводят систему (1.1) в систему $u_t = u_3 + a^{-1}G$, $v_t = a^{-1}v_3 + a^{-1}F$. Поскольку $a^{-1} = (-3c - 7)2^{-1}$, $c^2 = 5$, добавив к инволюции преобразование $c \to -c$, получаем из (1.1) систему $u_t = u_3 + aG$, $v_t = av_3 + aF$ с той же сепарантой, что и в системе (1.1).

Интегрируемые системы вида (1.1) часто содержат уравнения следующего вида:

$$u_t = u_3 + u_2 D_x(f) - \frac{1}{2} f_{u_1} u_2^2 + f_1 v_2^2 + f_2 v_2 + f_3, \tag{2.5}$$

где D_x – оператор полного дифференцирования по x, f и f_i – произвольные функции, зависящие от u, v, u_1, v_1. Выполнив замену переменной $u = \varphi(\tilde{u})$ по формулам

$$u_1 = \varphi' \tilde{u}_1, \quad u_2 = \varphi' \tilde{u}_2 + \varphi'' \tilde{u}_1^2, \quad u_3 = \varphi' \tilde{u}_3 + 3\varphi'' \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 + \varphi''' \tilde{u}_1^3, \quad u_t = \varphi' \tilde{u}_t,$$

получаем

$$\varphi' \tilde{u}_t = (\varphi' \tilde{u}_3 + 3\varphi'' \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 + \varphi''' \tilde{u}_1^3) + (\varphi' \tilde{u}_2 + \varphi'' \tilde{u}_1^2) D_x(\tilde{f}) - \frac{1}{2} \tilde{f}_{\tilde{u}_1} (\varphi')^{-1} (\varphi' \tilde{u}_2 + \varphi'' \tilde{u}_1^2)^2 + \tilde{f}_1 v_2^2 + \tilde{f}_2 v_2 + \tilde{f}_3.$$

Далее, разделив уравнение на φ', имеем

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_3 + 3(\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 + \varphi'''(\varphi')^{-1} \tilde{u}_1^3 + (\tilde{u}_2 + (\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2) D_x(\tilde{f}) -$$
$$- \frac{1}{2} \tilde{f}_{\tilde{u}_1} (\tilde{u}_2^2 + 2\tilde{u}_2 (\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2 + ((\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2)^2) + \tilde{f}_1 v_2^2 + \tilde{f}_2 v_2 + \tilde{f}_3.$$

Поскольку слагаемое $(\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2 D_x(\tilde{f}) = (\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2 (\tilde{f}_{\tilde{u}} \tilde{u}_1 + \tilde{f}_v v_1 + \tilde{f}_{\tilde{u}_1} \tilde{u}_2 + \tilde{f}_{v_1} v_2)$, то все члены первого порядка можно включить в $\tilde{f}_3$, а $\tilde{f}_{v_1} v_2$ – в $\tilde{f}_2$. Таким образом, остается слагаемое $(\ln(\varphi'))' \tilde{u}_1^2 \tilde{f}_{\tilde{u}_1} \tilde{u}_2$, которое можно уничтожить с соответствующим членом в уравнении при $\tilde{f}_{\tilde{u}_1}$, подобрав нужное φ.

В итоге получаем уравнение

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_3 + \tilde{u}_2 D_x(\tilde{f} + 3\ln(\varphi')) - \frac{1}{2} \tilde{f}_{\tilde{u}_1} \tilde{u}_2^2 + \hat{f}_1 v_2^2 + \hat{f}_2 v_2 + \hat{f}_3.$$

Обозначив $\tilde{f} + 3\ln(\varphi') = \hat{f}$, замечаем, что $\tilde{f}_{\tilde{u}_1} = \hat{f}_{\tilde{u}_1}$, так как φ не зависит от u_1, т.е. точечное преобразование $u \to \varphi(u)$ не изменяет тип уравнения (2.5).

Если, к примеру, в (2.5) $f = \psi(u)\xi(v)$, то, положив $\ln(\varphi') = \psi$, получим $\hat{f} = \xi(v) + 3$. Разумеется, есть и другие ситуации, когда функцию f можно упростить с помощью преобразования $u \to \varphi(u)$.

Кроме точечных преобразований некоторые системы (1.1) допускают обратимые дифференциальные подстановки. Например, система

$$u_t = u_3 + F(u, v, u_1, v_1, v_2), \quad v_t = av_3 + (a - 1)u_2 + g(u, v, v_1, u_1 + v_2),$$

допускает подстановку $\tilde{u} = u + v_1$, $\tilde{v} = v$, приводящую к следующей системе вида (1.1):

$$\tilde{u}_t = a\tilde{u}_3 + F + D_x g(\tilde{u} - \tilde{v}, \tilde{v}_1, \tilde{u}_1), \quad \tilde{v}_t = \tilde{v}_3 + (a - 1)\tilde{u}_2 + g(\tilde{u} - \tilde{v}, \tilde{v}_1, \tilde{u}_1).$$

Некоторые интегрируемые системы вида (1.1) допускают и необратимые дифференциальные подстановки

$$u = \varphi(U, V, U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n), \quad v = \psi(U, V, U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где U и V – новые неизвестные функции. Подставляя u и v в заданную интегрируемую систему (1.1), иногда удается получить новую интегрируемую систему.

В процессе проверки условий интегрируемости для (1.1) очень часто встречались системы вида

$$u_t = u_3 + F(u, u_1, u_2), \quad v_t = av_3 + G(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2),$$

которые мы называем *треугольными*. Их отличает наличие независимого уравнения в системе. Как правило, независимое уравнение – это уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ), модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза (мКдВ) или линейное уравнение. При этом второе уравнение, в нашем примере – уравнение для v, может быть произвольным. Но, если потребовать, чтобы система имела бесконечное множество высших законов сохранения, то уравнение для v получалось, как правило, линейным. По крайней мере, исключения из этого правила нам неизвестны. Канонические плотности в треугольных системах – это плотности независимого уравнения. Если уравнение для u линейное, то канонические плотности тривиальны, за исключением одной или двух плотностей нулевого порядка. Помимо этого, существуют системы, приводимые к треугольному виду подходящей треугольной дифференциальной подстановкой. В процессе классификации все треугольные системы отбрасывались.

3. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ КЛАССИФИКАЦИИ

Основным объектом в симметрийном подходе к интегрируемости являются канонические законы сохранения:

$$\frac{d}{dt}\rho_n = \frac{d}{dx}\theta_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.1}$$

где ρ_n и θ_n – функции, от переменных x, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, … . Функции ρ_n называются плотностями закона сохранения, а θ_n – соответствующими плотностям токами. Для практических исследований важно, что канонические плотности выражаются рекуррентными формулами в терминах правых частей системы (1.1), которая не является заведомо интегрируемой. Поэтому, исходя из (3.1), мы получаем систему уравнений для F, G и их производных – необходимые условия интегрируемости, которые называем ρ_n-*условиями*. Разумеется, можно проверить лишь конечное число условий, но, как показывает опыт известных классификационных работ, системы, обладающие двумя-тремя высшими законами сохранения, оказываются интегрируемыми. Достаточными же условиями интегрируемости являются, например, существование представления Лакса или преобразования Беклунда.

Алгоритм вывода рекуррентных формул для канонических плотностей системы (1.1) изложен подробно в [10] и воспроизведен в [11] с использованием следующих формул:

$$\begin{aligned}\rho_{n+2} = {} & \frac{1}{3}\theta_n - \sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j - \frac{1}{3}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k - \frac{1}{3}(F_v + F_{v_1}D_x + F_{v_2}D_x^2)a_n - \frac{1}{3}F_{u_2}\left(D_x\rho_n + 2\rho_{n+1} + \sum_0^n\rho_i\rho_j\right) - \\ & - \frac{1}{3}F_u\delta_{n,0} - \frac{1}{3}F_{u_1}(\delta_{n,-1} + \rho_n) - \frac{1}{3}F_{v_1}\left(a_{n+1} + \sum_0^n\rho_i a_j\right) - D_x\left(\rho_{n+1} + \frac{1}{3}D_x\rho_n + \frac{1}{2}\sum_0^n\rho_i\rho_j\right) - \\ & - \frac{1}{3}F_{v_2}\left(a_{n+2} + 2D_x a_{n+1} + 2\sum_0^{n+1}\rho_i a_j + \sum_0^n\rho_i\rho_j a_k + \sum_0^n\rho_i D_x a_j + D_x\sum_0^n\rho_i a_j\right), \quad n \ge -1;\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}(1-a)a_{n+3} = {} & G_u\delta_{n,0} + G_{u_1}(\delta_{n,-1} + \rho_n) + G_{u_2}\left(\delta_{n,-2} + D_x\rho_n + 2\rho_{n+1} + \sum_0^n\rho_i\rho_j\right) + \\ & + G_{v_1}\left(D_x a_n + a_{n+1} + \sum_0^n\rho_i a_j\right) - D_t a_n - \sum_0^n\theta_i a_j + G_v a_n + G_{v_2}\left(a_{n+2} + D_x^2 a_n + 2D_x a_{n+1} + \right.\end{aligned}$$

$$+ D_x\sum_0^n \rho_i a_j + \sum_0^n \rho_i D_x a_j\Bigg) + G_{v_2}\left(2\sum_0^{n+1}\rho_i a_j + \sum_0^n \rho_i\rho_j a_k\right) + aD_x^3 a_n + 3aD_x^2 a_{n+1} + \tag{3.3}$$

$$+ 3a\left(D_x a_{n+2} + 2\sum_0^{n+1}\rho_i D_x a_j + \sum_0^n \rho_i\rho_j D_x a_k + \sum_0^{n+2}\rho_i a_j + \sum_0^{n+1} a_i D_x\rho_j + \sum_0^n a_i\rho_j D_x\rho_k + D_x\sum_0^n \rho_i D_x a_j\right) +$$

$$+ a\sum_0^n a_i D_x^2\rho_j + 3a\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j a_k + a\sum_0^n \rho_i\rho_j\rho_k a_l, \quad n \ge -3.$$

Здесь введены следующие обозначения: $\delta_{i,k}$ – символ Кронекера и нестандартный символ суммирования

$$\sum_0^N f_{i_1}\cdots f_{i_k} = \sum_{\substack{i_s\ge 0,\forall s\\ i_1+\dots+i_k=N}} f_{i_1}\cdots f_{i_k},$$

где f_i может быть любым символом, в том числе $D_x(f), D_x^2(f), \dots, D_x^n(f)$, например,

$$\sum_0^{-1}\rho_i\rho_j = 0, \quad \sum_0^2 p_i D_x(q_j) = p_0 D_x(q_2) + p_1 D_x(q_1) + p_2 D_x(q_0),$$

$$\sum_0^1 p_i p_j D_x(q_k) = p_0^2 D_x(q_1) + 2p_0 p_1 D_x(q_0), \quad \sum_0^2 p_i p_j q_k = p_0^2 q_2 + 2p_0 p_1 q_1 + 2p_0 p_2 q_0 + p_1^2 q_0.$$

Начальные элементы последовательности плотностей и вспомогательных функций a_k для системы (1.1) имеют следующий вид:

$$\rho_0 = -\frac{F_{u_2}}{3}, \quad \rho_1 = \frac{F_{u_2}^2}{9} - \frac{F_{u_1}}{3} + \frac{1}{3(a-1)}F_{v_2}G_{u_2} + \frac{1}{3}D_x F_{u_2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{3}\theta_0 - \frac{2F_{u_2}^3}{81} + \dots,$$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{1-a}G_{u_2}, \quad \dots .$$

Дальнейшие элементы значительно усложняются и мы их не приводим. Формулы для ρ_2 содержат токи θ_0. Легко понять, что ρ_n зависит от $\theta_0, \dots, \theta_{n-2}$, поэтому, прежде чем исследовать ρ_n-условие, следует вычислить токи $\theta_0, \dots, \theta_{n-2}$.

В [10] показано, что интегрируемая система (1.1) должна иметь вид

$$u_t = u_3 + u_2 D_x f - \frac{1}{2}u_2^2 f_{u_1} + P(u,v,u_1,v_1,v_2), \quad v_t = a\left(v_3 + v_2 D_x g - \frac{1}{2}v_2^2 g_{v_1}\right) + Q(u,v,u_1,v_1,u_2), \tag{3.4}$$

где f и g – функции не выше первого порядка.

Из ρ_n-условий $1 \le n \le 4$ для системы (3.4) были получены следующие уравнения:

$$f_{v_1}g_{u_1} = 0, \quad f_{u_1}f_{v_1} = g_{u_1}g_{v_1}, \quad f_{u_1v_1} = \frac{1}{6}(c+1)f_{u_1}f_{v_1}, \quad g_{u_1v_1} = \frac{1}{6}(1-c)g_{u_1}g_{v_1}, \tag{3.5}$$

$$P_{v_2v_2}Q_{u_2u_2} = \frac{1}{2}(7-3c)f_{u_1}f_{v_1}, \quad P_{u_1v_2v_2v_2} = 0, \quad Q_{v_1u_2u_2u_2} = 0. \tag{3.6}$$

Итак, если $f_{v_1} \ne 0$, то из первого уравнения (3.5) следует $g_{u_1} = 0$, а второе уравнение дает $f_{u_1} = 0$. Оставшиеся уравнения выполнены автоматически, и мы получаем $f = f(u,v,v_1)$ и $g = g(u,v,v_1)$. Пусть наоборот, $g_{u_1} \ne 0$, тогда $f = f(u,v,u_1)$ и $g = g(u,v,u_1)$. Третья возможность $f_{v_1} = 0$, $g_{u_1} = 0$ также приводит к $f = f(u,v,u_1)$ и $g = g(u,v,v_1)$. Таким образом, обе части уравнений (3.5) обращаются в нули, поэтому первое из уравнений (3.6) принимает вид $P_{v_2v_2}Q_{u_2u_2} = 0$.

Таким образом, получаем три случая:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \ f = f(u,v,v_1), \quad g = g(u,v,v_1), \quad f_{v_1} \neq 0;\\
&2)\ \ f = f(u,v,u_1), \quad g = g(u,v,u_1), \quad g_{u_1} \neq 0;\\
&3)\ \ f = f(u,v,u_1), \quad g = g(u,v,v_1).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Функции P и Q доставляют больше всего трудностей вычислительного характера, поэтому выделим варианты, к которым приводит уравнение $P_{v_2v_2}Q_{u_2u_2} = 0$:

$$
\text{A. } P_{v_2v_2} = 0, \quad Q_{u_2u_2} \neq 0; \quad \text{B. } Q_{u_2u_2} = 0, \quad P_{v_2v_2} \neq 0; \quad \text{C. } Q_{u_2u_2} = P_{v_2v_2} = 0.
$$

Случаи A, B и C – это вершины графа развилок, а три ветви, введенные выше для f и g, будем обозначать цифрами: A.1, C.2 и т.д.

Заметим, что в случаях A и B исследуемые системы переходят одна в другую при инволюции (2.4), поэтому достаточно исследовать случаи A и C.

3.1. Случай A

A.1. Из уравнений (3.6) определяются частично функции $P = f_1v_2 + f_2$ и $Q = g_1u_2^2 + g_2u_2 + g_3$, $g_1 \neq 0$. Это позволяет получить дополнительную информацию из условий интегрируемости. В рассматриваемом подслучае ρ_1-условие привело к противоречию: $f_{v_1}g_1 = 0$.

A.2. С учетом некоторых следствий из ρ_1-условия, система (3.4) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2D_x(\ln f) + \frac{3}{4}(\ln f)_{u_1}u_2^2 + f_1v_2 + f_2,\\
v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2D_x(\ln g)\right) + Q(u,v,u_1,v_1,u_2),
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

где $f_i = f_i(u,v,u_1,v_1)$, $i = 1,2$, $f_{1,v_1} = 0$, $f_{v_1} = 0$, $g_{v_1} = 0$. При этом функция f_1 вошла во многие уравнения, возникшие из условий интегрируемости. Поэтому естественно рассмотреть подслучаи $f_1 \neq 0$ и $f_1 = 0$. В первом из них оказалось, что $g = f_1^k q(u,v)$, $k =$const. Последующие вычисления привели к тому, что $f_1 = \alpha(u)u_1 + \beta(u)$, $\alpha \neq 0$, а функция f выразилась через f_1. Далее мы пришли к противоречиям в условиях интегрируемости во всех развилках, где $f_1 \neq 0$.

В подслучае $f_1 = 0$ удалось найти вид функции $f = p(u,v)u_1^2 + q(u,v)u_1 + r(u,v)$. Функция Q частично определилась, и система приняла вид

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2D_x(\ln f) + \frac{3}{4}(\ln f)_{u_1}u_2^2 + f_2(u,v,u_1),\\
v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2D_x(\ln g)\right) + g_1 + g_2u_2 + g_3,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

где $g_1 = g_1(u,v,u_1,u_2)$ и $g_i = g_i(u,v,v_1,u_1)$ для $i = 2,3$. Далее для упрощения рассмотрены случаи: 1) $p = q = 0$; 2) $p = 0$, $q \neq 0$; 3) $p \neq 0$.

В случаях 1) и 2) система (3.9) приводится к треугольному виду с независимым уравнением для u. В случае 3) в ρ_3-условии получено противоречие.

A.3. По условию имеем $P = f_1v_2 + f_2$, а функция Q определилась из дополнительных ρ_n-условий: $Q = g_1u_2^2 + g_2u_2 + g_3$. В итоге система (3.4) записывается в виде

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2D_x(\ln f) + \frac{3}{4}(\ln f)_{u_1}u_2^2 + f_1v_2 + f_2,\\
v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2D_x(\ln g) + \frac{3}{4}(\ln g)_{v_1}v_2^2\right) + g_1u_2^2 + g_2u_2 + g_3.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Здесь $f = f(u,v,u_1)$, $g = g(u,v,v_1)$, а функции f_i, g_k зависят от $(\mathbf{u},\mathbf{u}_1)$, и, кроме того, $g_1 \neq 0$, $g_{v_1} \neq 0$.

Приведем наиболее простые следствия из ρ_n-условий для $n = 0,1,2,3$:

$$
g_{uv_1} = 0, \quad g_{v_1v_1} = 0, \quad gg_{1,v_1} = g_1g_{v_1},
\tag{3.11}
$$

$$f_{uu_1u_1} = 0, \quad f_{vu_1u_1} = 0, \quad f_{u_1u_1u_1} = 0, \tag{3.12}$$

$$ff_{vu_1} = f_v f_{u_1}, \quad fg_{1,u_1v_1} = -g_{1,v_1}f_{u_1}, \quad g_{1,v_1v_1} = 0, \tag{3.13}$$

$$2gf_{1,v_1} + f_1 g_{v_1} = 0. \tag{3.14}$$

Из уравнений (3.11) и (3.12) ясно, что

$$f = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_1 + \alpha_3, \quad g = \beta_1 v_1 + \beta_2, \quad \beta_1 \neq 0,$$

где α_1 – постоянная, $\alpha_i = \alpha_i(u,v)$, $i > 1$, $\beta_k = \beta_k(u,v)$ – произвольные функции, но они не могут быть все нулями.

Последнее из уравнений (3.11) приводит к решению $g_1 = gs(u,v,u_1)$, где s – произвольная функция, а второе из уравнений (3.13) сводится к $s = f^{-1}\gamma(u,v)$, следовательно, $g_1 = f^{-1}g\gamma(u,v)$.

Если $\alpha_1 \neq 0$, то без ограничения общности $\alpha_1 = 1$. Привлекая дополнительные условия, удалось найти $g = \varphi_1(v)v_1 + \varphi_2(u,v)$. В итоге (3.10) приняла вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2 D_x(\ln f) + \frac{3}{4}(\ln f)_{u_1}u_2^2 + f_1 v_2 + f_2, \\ v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2 D_x(\ln g) + \frac{3}{4}(\ln g)_{v_1}v_2^2\right) + f^{-1}g\gamma(u,v)u_2^2 + g_2 u_2 + g_3, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где функции f_i и g_k зависят от u, v, u_1, v_1.

Анализ различных форм функции f основывается на первом из уравнений (3.13), которое приводит к системе

$$\alpha_1\alpha_{2,v} = 0, \quad \alpha_1\alpha_{3,v} = 0, \quad \alpha_{2,v}\alpha_3 = \alpha_2\alpha_{3,v}.$$

Отсюда получаем три подслучая:

A.3.1. $\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_i = \alpha_i(u) \quad \forall i$; A.3.2. $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 = \alpha_2\gamma(u)$; A.3.3. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

A.3.1. В соответствии с предыдущим анализом $f = u_1^2 + \alpha(u)u_1 + \beta(u)$. Далее из рассмотренных ранее условий интегрируемости получилось $f_1 = 0$ и $f_2 = f_2(u,u_1)$, т.е. система (3.15) – треугольная.

A.3.2. Поскольку $f = \alpha_2(u,v)(u_1 + \gamma(u))$, то из ρ_n-условий с $n = 1,2,3$ появились уравнения $\alpha_2 = \alpha_2(u)$, $f_1 = 0$, $f_2 = f_3(u,u_1) + q(u,v)$. Вслед за этими формулами появилась еще одна $q_v = 0$, следовательно, система (3.15) – треугольная.

A.3.3. Благодаря простоте функции $f = f(u,v)$, из полученных ранее следствий из условий интегрируемости без труда получаем $f = f(u)$, $f_1 = 0$, $f_2 = f_2(u,u_1)$. Таким образом, первое из уравнений системы (3.10) не содержит функции v, следовательно, система (3.15) снова треугольная.

Итак, исследование случая A, начатое в п. 3.1, полностью завершено. Это исследование показало, что в случае A условия интегрируемости приводили либо к противоречиям, либо к треугольным системам, которые мы исключили из рассмотрения.

3.2. Случай C

Согласно нашей классификации, система, подлежащая исследованию, приняла вид

$$u_t = u_3 + u_2 D_x f - \frac{1}{2}u_2^2 f_{u_1} + f_1 v_2 + f_0, \quad v_t = a\left(v_3 + v_2 D_x g - \frac{1}{2}v_2^2 g_{v_1}\right) + g_1 u_2 + g_0, \tag{3.16}$$

где f, g, f_0, f_1, g_0, g_1 – функции не выше первого порядка. Кроме того, f и g могут быть трех типов (3.7). Так как (3.16) симметрична, то в (3.7) случаи 1) и 2) переходят один в другой при инволюции, а 3) разбивается на четыре подслучая:

3a) $f = f(u,v,u_1), \quad g = g(u,v,v_1), \quad f_{u_1}g_{v_1} \neq 0$; 3b) $f = f(u,v,u_1), \quad g = g(u,v), \quad f_{u_1} \neq 0$;
3c) $f = f(u,v), \quad g = g(u,v,v_1), \quad g_{v_1} \neq 0$; 3d) $f = f(u,v), \quad g = g(u,v)$.

Однако 3b) и 3c) переходят один в другой при инволюции, поэтому достаточно исследовать только 3b). Учитывая изложенное, мы выделяем для рассмотрения следующие варианты:

С.1. $f = f(u,v,v_1), \quad g = g(u,v,v_1), \quad f_{v_1} \neq 0;$ С.2. $f = f(u,v,u_1), \quad g = g(u,v,v_1), \quad f_{u_1}g_{v_1} \neq 0;$
С.3. $f = f(u,v,u_1), \quad g = g(u,v), \quad f_{u_1} \neq 0;$ С.4. $f = f(u,v), \quad g = g(u,v).$

С.1. Из ρ_1-условия вытекают следующие уравнения:

$$g_{v_1v_1v_1} - 2g_{v_1}g_{v_1v_1} + \frac{4}{9}g_{v_1}^3 = 0, \quad 3f_{uv_1} = g_u f_{v_1}, \quad 3f_{vv_1} = g_v f_{v_1},$$
$$g_{uv_1v_1} - \frac{2}{3}g_u g_{v_1v_1} - \frac{4}{3}g_{v_1}g_{uv_1} + \frac{4}{9}g_u g_{v_1}^2 = 0, \quad g_{vv_1v_1} - \frac{2}{3}g_v g_{v_1v_1} - \frac{4}{3}g_{v_1}g_{vv_1} + \frac{4}{9}g_v g_{v_1}^2 = 0, \tag{3.17}$$

$$g_{1,u_1} = 0, \quad f_{1,u_1u_1} = 0, \quad f_{0,u_1u_1u_1} = 0. \tag{3.18}$$

Подстановка $g = -(3/2)\ln\xi$ приводит (3.17) к следующим уравнениям: $\xi_{v_1v_1v_1} = 0$, $\xi_{uv_1v_1} = 0$, $\xi_{vv_1v_1} = 0$, $f_{v_1} = p(v_1)\xi^{-1/2}$. Это означает $\xi = c_1v_1^2 + q_1v_1 + q_2$, где $q_i = q_i(u,v)$, p — произвольная функция, c_1 — постоянная. Дальнейшие несложные вычисления приводят к треугольной системе с независимым уравнением для v.

Проделанные в С.1 вычисления показали, что для упрощения вычислений следует записывать систему в виде

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2 D_x(\ln f) + \frac{3}{4}(\ln f)_{u_1}u_2^2 + f_1v_2 + f_0, \\ v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2 D_x(\ln g) + \frac{3}{4}(\ln g)_{v_1}v_2^2\right) + g_1u_2 + g_0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

С.2. Из ρ_1- и ρ_2-условий вытекают следующие уравнения:

$$f_{u_1u_1u_1} = 0, \quad f_{uu_1u_1} = 0, \quad f_v = 0, \quad g_{v_1v_1v_1} = 0, \quad g_{vv_1v_1} = 0, \quad g_u = 0, \tag{3.20}$$

$$f_{1,u_1} = f_1\left(\ln f - \ln f_{u_1}\right)_{u_1}, \quad g_{1,u_1} = g_1\left(\ln g - \ln g_{v_1}\right)_{v_1}. \tag{3.21}$$

Уравнения (3.20) означают, что f и g — многочлены не выше второй степени:

$$f = c_1u_1^2 + q_1u_1 + q_2, \quad g = c_2v_1^2 + p_1v_1 + p_2, \tag{3.22}$$

где c_i — постоянные, $q_i = q_i(u)$, $p_j = p_j(v)$. Не ограничивая общности, параметры c_i можно считать равными 1 или 0.

Кроме того, из условий интегрируемости получается большое число уравнений с общими множителями c_1 и c_2. Например, имеются уравнения $c_1f_1 = 0$, $c_2g_1 = 0$. Это означает, что возникают развилки

С.2.1. $c_1c_2 \neq 0$; С.2.2. $c_1 \neq 0, \quad c_2 = 0$; С.2.3. $c_1 = c_2 = 0$.

Случай $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ переходит в С.2.2 при инволюции, поэтому мы его опускаем.

С.2.1. Здесь мы имеем $f_1 = g_1 = 0$, а также $p_1p_2' = 2p_1'p_2$, $q_1q_2' = 2q_1'q_2$. Это означает (a) $f = u_1^2 + 2q_1u_1 + c_3q_1^2$, если $q_1 \neq 0$, или (b) $f = u_1^2 + q_2$, если $q_1 = 0$. Если выполнить преобразование $u \to \varphi(u)$ и выбрать должным образом φ, то в любом случае мы получаем $f = u_1^2 + 2c_2u_1 + c_3$. Если $c_2 \neq 0$, то мы можем нормировать c_2 на 1, а c_3 будет произвольным параметром. Если $c_2 = 0$, а $c_3 \neq 0$, то мы можем нормировать c_3 на 1 или положить $c_3 = 0$.

Преобразованием $v \to \psi(v)$ можно точно упростить функцию g, и (3.19) принимает вид

$$u_t = u_3 - \frac{3f'}{4f}u_2^2 + f_0, \quad v_t = a\left(v_3 - \frac{3g'}{4g}v_2^2\right) + g_0,$$

где $f = u_1^2 + 2c_2u_1 + c_3$ и $g = v_1^2 + 2k_2v_1 + k_3$, а c_i и k_i — параметры. Проверив вновь ρ_1-условие, мы получили, что $f_0 = f_0(u,u_1)$ и $g_0 = g_0(v,v_1)$, т.е. система распалась на два независимых уравнения.

C.2.2. Здесь мы вновь имеем уравнение $q_1 q_2' = 2q_1' q_2$, поэтому, выполнив преобразования $u \to \varphi(u)$ и $v \to \psi(v)$, получаем $f = u_1^2 + 2c_2 u_1 + c_3$ и $g = v_1 + p_1(v)$. Затем, также как и в предыдущем случае, $f_1 = 0$, и далее из ρ_1-условия, следует, что $f_0 = f_2(u, u_1)$, значит, система треугольная с независимым уравнением для u.

C.2.3. В формулах (3.22) $q_1 p_1 \neq 0$ по условию. Поэтому преобразованиями $u \to \varphi(u)$ и $v \to \psi(v)$ мы нормируем q_1 и p_1 на 1. Таким образом, в (3.19) имеем $f = u_1 + q(u)$ и $g = v_1 + p(v)$.

Из ρ_2-условия возникают уравнения $q' = 0$, $p' = 0$, $ff_{1,u_1} = f_1$, $gg_{1,v_1} = g_1$. Это дает нам

$$q = c_1, \quad p = c_2, \quad f = u_1 + c_1, \quad g = v_1 + c_2, \quad f_1 = ff_2(u, v, v_1), \quad g_1 = gg_2(u, v, u_1). \tag{3.23}$$

Следующие уравнения получаем из ρ_3-условия: $f_{2,u} = 0$, $g_{2,v} = 0$, $f_2 g_2 = 0$, а также

$$2gf_{2,v_1v_1} = -3f_{2,v_1}, \quad f_{2,vv_1} = 0, \quad 2fg_{2,u_1u_1} = -3g_{2,u_1}, \quad g_{2,uu_1} = 0, \tag{3.24}$$

$$ff_{0,u_1v_1} = f_{0,v_1}, \quad 2ff_{0,u_1u_1u_1u_1} + 3f_{0,u_1u_1u_1} = 0, \quad 2gf_{0,v_1v_1v_1} + 3f_{0,v_1v_1} = 6f_{2,v}, \tag{3.25}$$

$$gg_{0,u_1,v_1} = g_{0,u_1}, \quad 2gg_{0,v_1v_1v_1v_1} + 3g_{0,v_1v_1v_1} = 0, \quad 2fg_{0,u_1u_1u_1} + 3g_{0,u_1u_1} = 6gg_{2,u}. \tag{3.26}$$

Решение уравнений (3.24) имеет вид $f_2 = h(v) + k_1 g^{-1/2}$, $g_2 = p(u) + k_2 f^{-1/2}$ с учетом того, что $f_2 g_2 = 0$. Дальнейшие вычисления позволяют найти

$$f_0 = ff_3(u, v, v_1) + f_4(u, v, u_1), \quad g_0 = gg_3(u, v, u_1) + g_4(u, v, v_1),$$

где f_4 и g_4 определяются однородными уравнениями в (3.25) и (3.26):

$$g_4 = q_1 + q_2 g^{3/2} + q_3 g^2 + q_4 g, \quad f_4 = q_5 + q_6 f^{3/2} + q_7 f^2 + q_8, \quad q_i = q_i(u, v).$$

Вид функций f_3 и g_3 определяется уравнениями, содержащими f_2 или g_2 в правых частях. Очевидно, уравнение $f_2 g_2 = 0$ имеет три решения:

$$\text{C.2.3.a. } f_2 \neq 0, \quad g_2 = 0; \quad \text{C.2.3.b. } f_2 = 0, \quad g_2 \neq 0; \quad \text{C.2.3.c. } f_2 = g_2 = 0.$$

Поскольку рассматриваемая система имеет вид

$$u_t = u_3 - \frac{3}{4f}u_2^2 + v_2 ff_2 + ff_3 + f_4, \quad v_t = av_3 - \frac{3a}{4g}v_2^2 + u_2 gg_2 + gg_3 + g_4, \tag{3.27}$$

то ясно, что подслучаи C.2.3.a и C.2.3.b переходят друг в друга при инволюции. Поэтому случай C.2.3.b можно не рассматривать.

Подслучай C.2.3.a. Из двух первых условий интегрируемости получилось, что функции g_4 и g_3 зависят только от v и v_1, а $g_2 = 0$ по условию. Таким образом, приходим к треугольной системе с независимым уравнением для v.

Подслучай C.2.3.c. Из (3.25) и (3.26) определяются функции $f_3 = p_1 + p_2 g + p_3 g^{1/2}$, $g_3 = p_4 + p_5 f + p_6 f^{1/2}$, где $p_i = p_i(u, v)$. Рассмотрев ρ_n-условия при $n = 1, 2, 3$, мы получили, что все p_i и q_i — постоянные, а система приняла вид

$$u_t = u_3 - \frac{3}{4f}u_2^2 + f(k_1 g^{1/2} + k_2 g) + k_3 f^2 + k_4 f^{3/2} + k_5 f + k_6 u + k_7,$$

$$v_t = av_3 - \frac{3a}{4g}v_2^2 + g(c_1 f^{1/2} + c_2 f) + c_3 g^2 + c_4 g^{3/2} + c_5 g + c_6 v + c_7.$$

Следует пояснить, что выписать все следствия условий интегрируемости сразу невозможно. И только если система не содержит произвольных функций, то мы можем получить сколь угодно большое число таких следствий. Для данной системы были получены все следствия ρ_n-условий при $n = 1, 2, 3, 4$. Полученные следствия имеют вид полиномиальных уравнений для параметров k_i, c_j, входящих в дифференциальную систему. Иногда полиномиальные уравнения достаточно сложны, и их приходится решать с помощью пакета Gröbner в Maple или в какой-то аналогичной системе. В данном случае уравнения решались вручную. Получены два решения: 1) $k_1 = k_2 = 0$ и 2) $c_1 = c_2 = 0$. В обоих случаях получаются треугольные системы.

С.3. Здесь имеем $f = f(u,v,u_1)$, $g = g(u,v)$, $f_{u_1} \neq 0$. Из ρ_n-условий при $n = 1,2,3,4$ вытекают простые уравнения

$$f_{u_1u_1u_1} = 0, \quad f_{uu_1u_1} = 0, \quad f_{vu_1u_1} = 0, \quad g_u f_{u_1u_1} = 0, \tag{3.28}$$

$$f_{u_1} f_{vu_1} = f_v f_{u_1u_1}, \quad f_{uu_1}(u_1 f_{u_1} - 2f) + f_u(f_{u_1} - u_1 f_{u_1u_1}) = 0, \tag{3.29}$$

$$g_{1,v_1v_1} = 0, \quad f_{u_1u_1} f_1 = \frac{3}{2}(3-c) f_{vu_1}, \quad ff_{1,u_1v_1} = f_{u_1} f_{1,v_1}. \tag{3.30}$$

Из (3.28) следует $f = c_1u_1^2 + 2q_1u_1 + q_2$, где c_1 – постоянная, $q_i = q_i(u,v)$. Уравнения (3.29) теперь принимают вид

$$2q_1q_{1,v} = c_1q_{2,v}, \quad q_1q_{2,u} = 2q_{1,u}q_2. \tag{3.31}$$

Если $c_1 = 0$, то $q_1 \neq 0$ по условию, и мы получаем $q_1 = q_1(u)$, $q_2 = q_1^2\mu(v)$, при этом, положив $q_1 \to q_1/2$, можно записать $f = q_1(u)u_1 + q_1^2\mu$. С помощью преобразования $u \to \varphi(u)$ нормируем q_1 на 1 и получаем окончательно $f = u_1 + \mu(v)$.

Пусть теперь $c_1 \neq 0$, тогда можем положить $c_1 = 1$ без потери общности. Первое из уравнений (3.31) дает $q_2 = q_1^2 + \lambda(u)$. Подставив q_2 во второе уравнение, получаем $q_1\lambda'(u) = 2\lambda q_{1,u}$. Отсюда получаем несколько случаев:

$$1.\ \lambda = 0, \quad f = (u_1 + q_1)^2, \quad q_1 = q_1(u,v); \quad 2.\ q_1 = 0, \quad f = u_1^2 + \lambda(u);$$

$$3.\ q_1\lambda \neq 0, \quad q_1 = \mu(v)\sqrt{|\lambda(u)|}, \quad q_2 = \mu^2|\lambda| + \lambda, \quad |\lambda| = \nu^2 \Rightarrow f = (u_1 + \mu(v)\nu(u))^2 \pm \nu^2.$$

Можно заметить, что в случае 2 при $\lambda = 0$ получается то же самое, что и в 1 при $q = 0$. Если же в случае 2 $\lambda \neq 0$, то эту же функцию f можно найти из 3 при $\mu = 0$. В 3 мы можем нормировать ν на ± 1. Таким образом, приходим к следующим вариантам:

$$\text{С.3.1. } f = u_1 + \mu(v); \quad \text{С.3.2. } f = (u_1 + \mu(v))^2 + c_0, \quad c_0^2 = 1; \quad \text{С.3.3. } f = (u_1 + q_1(u,v))^2.$$

В каждом из этих вариантов исследование условий интегрируемости приводит к очень большому числу развилок, которые приводили либо к противоречиям, либо к треугольным системам. Изложение в статье всех вычислений лишено смысла, тем не менее, приведем пример:

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3u_2^2}{4f} - \frac{3u_2v_1}{2\ f} - \frac{3}{2}v_2(c-3) - \frac{3v_1^2}{4f} - \sqrt{f}\left(c_1v + c_4u\right) - fc_0v - c_3v - c_5u + F, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - \frac{dF}{du_1}(u_2 + v_1) + \frac{1}{2}f^{-1/2}(u_2 + v_1)(c_1v + c_4u) - \sqrt{f}(c_1u_2(2c-7) + \\ &\quad + 2c_1v_1(c-4) + c_4v) + c_2(u_2 + v_1) - c_0(u_2(2cf - 7f - v) + \\ &\quad + v_1(2cf - 8f - v)) + c_4f^{3/2} + c_5u_1 + c_3v_1. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Здесь $F = F(u_1 + v)$ – произвольная функция, $f = u_1 + v$, $c^2 = 5$, c_i – параметры. Система (3.32) имеет высшие законы сохранения. Однако, если выполнить подстановку $u = u$, $v = w^2 - u_1$, то приходим к следующей треугольной системе:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2}(3c-7)u_3 - u_1(c_0w^2 + c_1w + c_3) + u(c_4w + c_5) - \\ &\quad - 3(c-3)(ww_2 + w_1^2) + 3w_1^2 + c_1w^3 - F(w) + c_0w^4 + c_3w^2, \end{aligned}$$

$$w_t = w_3 - (2c-7)w_1(c_0w^2 + c_1w) + c_2w_1.$$

Таким образом, первое уравнение является линейным неоднородным уравнением с переменными коэффициентами, зависящими от $w(t,x)$. Второе уравнение – это мКдВ, если $c_0 \neq 0$, или КдВ, если $c_0 = 0$ и $c_1 \neq 0$. Высшие законы сохранения преобразованной системы зависят только от w. Начало последовательности канонических плотностей имеет вид

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_1 = \frac{2c-7}{3}(c_0 w^2 + c_1 w), \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = \frac{2c-7}{3}c_0 w_1^2 + P_4(w),$$

где P_4 – многочлен степени 4.

C.4. Поскольку $f = f(u,v)$ и $g = g(u,v)$, то исследуемая система принимает вид

$$u_t = u_3 - \frac{3}{2}u_2 D_x(\ln f) + f_1 v_2 + f_2, \quad v_t = a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2 D_x(\ln g)\right) + g_1 u_2 + g_2, \tag{3.33}$$

функции f_1, f_2, g_1, g_2 зависят от переменных $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}_1\}$.

Из ρ_1- и ρ_3-условий нетрудно получить следующие простые уравнения:

$$\begin{gathered} f_{1,u_1u_1} = 0, \quad f_{1,u_1v_1,v_1} = 0, \quad g_{1,v_1v_1} = 0, \quad g_{1,u_1u_1v_1} = 0, \\ 6f_{2,u_1u_1u_1u_1} + (c+3)(3f_{1,u_1}g_{1,u_1u_1} + f_1 g_{1,u_1u_1u_1}) = 0, \\ 6g_{2,v_1v_1v_1v_1} - (c+3)(3g_{1,v_1}f_{1,v_1v_1} + g_1 f_{1,v_1v_1v_1}) = 0. \end{gathered} \tag{3.34}$$

Из ρ_n-условий при $n = 1,2,3$ было получено 66 уравнений, среди которых 20 уравнений с числом членов ≤ 20. В частности, большое число уравнений содержат только четыре функции: f_1, g_1 и f, g. Из уравнений (3.34) имеем

$$f_1 = (q_1 v_1 + q_2)u_1 + p(u,v,v_1), \quad g_1 = (q_3 u_1 + q_4)v_1 + r(u,v,u_1),$$

где $q_i = q_i(u,v)$. Подставив f_1 и g_1 в уравнения, не содержащие f_2 или g_2, получаем следующие результаты:

$$\begin{gathered} q_1 q_3 = 0, \quad q_2 q_3 = 0, \quad q_1 q_4 = 0, \quad q_{1,u} = 0, \quad q_{3,v} = 0, \quad q_1 g_u = 0, \quad q_3 f_v = 0, \\ q_1 r_{u_1} = 0, \quad q_3 p_{v_1} = 0, \quad p_{v_1v_1} r_{u_1u_1} = 0, \quad p_{v_1} r_{u_1u_1} = 0, \quad p_{v_1v_1} r_{u_1} = 0, \\ r_{u_1u_1}(2fq_2 + 3f_v) = 0, \quad p_{v_1v_1}(4gq_4 + 3(3c-7)g_u) = 0. \end{gathered} \tag{3.35}$$

Отсюда вытекают случаи

C.4.1. $q_1 = 0, \quad q_3 \neq 0$; C.4.2. $q_3 = 0, \quad q_1 \neq 0$; C.4.3. $q_1 = q_3 = 0$.

Можно заметить, что при инволюции случаи C.4.1 и C.4.2 переходят один в другой, поэтому второй случай не рассматривался.

C.4.1. В силу уравнений (3.35) мы получаем $f_1 = p(u,v)$, $q_3 = q_3(u)$, $f = f(u)$. Точечным преобразованием $u \to \varphi(u)$ нормируем f на 1, что упрощает дальнейшие вычисления. Проверка условий интегрируемости в данном случае достаточно проста, хотя и требует анализа нескольких развилок. Во всех этих развилках получены только треугольные системы.

C.4.3. Функции f_1 и g_1 теперь имеют вид $f_1 = q_2 u_1 + p$, $g_1 = q_4 v_1 + r$, где $q_i = q_i(u,v)$, $p = p(u,v,v_1)$, $r = r(u,v,u_1)$. Благодаря этим упрощениям удалось получить дополнительные простые уравнения из ρ_n-условий при $n = 1,2,3,4$:

$$\begin{gathered} f_{2,u_1u_1v_1v_1} = 0, \quad f_{2,u_1u_1u_1v_1} = 0, \quad f_{2,u_1u_1u_1u_1} = P_1(p,r), \quad f_{2,u_1v_1v_1v_1} = P_2(p,r), \\ g_{2,u_1u_1v_1v_1} = 0, \quad g_{2,u_1v_1v_1v_1} = 0, \quad g_{2,v_1v_1v_1v_1} = Q_1(p,r), \quad g_{2,u_1u_1u_1v_1} = Q_2(p,r), \\ q_2 r_{u_1u_1} = 0, \quad f_v r_{u_1u_1} = 0, \quad q_4 p_{v_1v_1} = 0, \quad g_u p_{v_1v_1} = 0. \end{gathered} \tag{3.36}$$

Здесь P_i и Q_i – некоторые билинейные функции от p, r и их производных по u_1 и v_1.

Из уравнений (3.35) мы вновь получаем три случая:

a. $p_{v_1v_1} \neq 0, \quad r_{u_1} = 0$; b. $r_{u_1u_1} \neq 0, \quad p_{v_1} = 0$; c. $p_{v_1v_1} = r_{u_1u_1} = 0$.

Очевидно, что случаи a и b симметричны относительно инволюции, поэтому случай b можно не рассматривать.

Подслучай C.4.3.a. В этом случае мы имеем $r = r(u,v)$, $q_4 = 0$ и $g = g(v)$. Последняя формула означает, что функцию g можно нормировать на 1 точечным преобразованием $v \to \varphi(v)$. Более того, ввиду полученных упрощений все следствия условий интегрируемости существенно упростились. Например, одно из громоздких уравнений приняло вид $f_{uv}f = f_u f_v$. Это означает, что $f = \alpha(v)\beta(u)$, а так как $\ln(f) = \ln(\alpha) + \ln(\beta)$, мы можем нормировать β на 1. Это равносильно тому, чтобы принять $f = f(v)$.

Далее условия интегрируемости привели к большому числу развилок, которые в большинстве привели к противоречиям, и в нескольких случаях были получены треугольные системы. Большое число противоречий объясняется тем, что функция p — это многочлен второй степени по v_1, что приводит к члену $v_1^2 v_2$ в первом уравнении системы. Указанный член имеет вес 4, тогда как член u_3 имеет вес 3. В символическом методе исследования полиномиальных интегрируемых уравнений показано, что все члены интегрируемого уравнения должны иметь одинаковые веса. Так как мы рассматриваем произвольные уравнения, а не только полиномиальные, то анализу подвергаются все случаи, вытекающие из условий интегрируемости.

Подслучай C.4.3.c. Теперь система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2 D_x(\ln f) + v_2(a_1u_1 + a_2v_1 + a_3) + f_2, \\ v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2 D_x(\ln g)\right) + u_2(b_1u_1 + b_2v_1 + b_3) + g_2, \end{aligned} \tag{3.37}$$

где f, g, a_i и b_i — функции, зависящие от u и v. Функции f_2 и g_2 частично определяются из ρ_1-условия

$$f_2 = \mu_1u_1^3 + \mu_2u_1^2v_1 + \mu_3u_1v_1^2 + \mu_4u_1^2 + \mu_5u_1v_1 + \mu_6u_1 + f_3(u, v, v_1),$$

$$g_2 = \nu_1v_1^3 + \nu_2u_1v_1^2 + \nu_3u_1^2v_1 + \nu_4v_1^2 + \nu_5u_1v_1 + \nu_6v_1 + g_3(u, v, u_1).$$

Здесь $\mu_i = \mu_i(u, v)$, $\nu_i = \nu_i(u, v)$.

Для упрощения дальнейшей нумерации случаев переобозначим C.4.3.c. как D.

3.3. Случай D

Рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{aligned} u_t = u_3 &- \frac{3}{2}u_2 D_x(\ln f) + v_2(a_1u_1 + a_2v_1 + a_3) + \mu_1u_1^3 + \mu_2u_1^2v_1 + \mu_3u_1v_1^2 + \\ &+ \mu_4u_1^2 + \mu_5u_1v_1 + \mu_6u_1 + f_3(u, v, v_1), \\ v_t = a&\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2 D_x(\ln g)\right) + u_2(b_1u_1 + b_2v_1 + b_3) + \nu_1v_1^3 + \nu_2u_1v_1^2 + \nu_3u_1^2v_1 + \nu_4v_1^2 + \\ &+ \nu_5u_1v_1 + \nu_6v_1 + g_3(u, v, u_1), \end{aligned} \tag{3.38}$$

где функции f, g, a_i, b_j, μ_k, ν_s зависят от u и v.

Условия интегрируемости для (3.38) очень громоздкие, поэтому мы рассмотрели ρ_n-условия только для $0 \le n \le 5$. В результате было получено около 140 уравнений для функций, входящих в систему, простейшие из которых имеют вид

$$a_{1,u} = \frac{1}{9}(c+3)\delta, \quad b_{2,v} = -\frac{1}{9}(c+3)\delta, \quad \delta = a_1b_2 - a_2b_1, \tag{3.39}$$

$$a_1(fb_1)_u = -\frac{1}{9}(c+3)\delta fb_1, \quad b_2(ga_2)_v = \frac{1}{9}(c+3)\delta ga_2, \tag{3.40}$$

$$f_{uv} = -\frac{1}{27}(9c+23)fa_1b_2 + \frac{1}{27}(15c+41)fa_2b_1 + \frac{4}{3}f\mu_2, \tag{3.41}$$

$$g_{uv} = -\frac{2}{27}(15c+34)ga_1b_2 + \frac{2}{27}(39c+88)ga_2b_1 - \frac{2}{3}(3c+7)g\nu_2, \tag{3.42}$$

$$a_1g_u = -\frac{1}{9}(5c+11)\delta g, \quad b_2f_v = -\frac{1}{9}(c-1)\delta f, \tag{3.43}$$

$$f_vg_u = \frac{8}{27}(3c+7)\delta fg, \tag{3.44}$$

$$f_u f_v + f^2\left(\frac{2}{27}(2c+5)a_1b_2 - \frac{2}{27}(5c+14)a_2b_1 - \frac{4}{3}\mu_2\right) = 0, \tag{3.45}$$

$$g_u g_v + g^2\left(\frac{1}{27}(11c+25)a_1b_2 - \frac{1}{27}(59c+33)a_2b_1 + \frac{2}{3}(3c+7)\nu_2\right) = 0, \tag{3.46}$$

$$a_2\frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} = 0, \quad b_1\frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} = 0, \quad f_v\frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} = 0, \quad g_u\frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} = 0. \tag{3.47}$$

Уравнения (3.47) приводят к следующим случаям:

$$\text{D.1. } \frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4}\frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} \neq 0; \quad \text{D.2. } \frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} \neq 0, \ \frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} = 0; \quad \text{D.3. } \frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} \neq 0, \ \frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} = 0; \quad \text{D.4. } \frac{\partial^4 g_3}{\partial u_1^4} = \frac{\partial^4 f_3}{\partial v_1^4} = 0.$$

D.1. По условию имеем $a_2 = b_1 = 0$ и $f = f(u)$, $g = g(v)$. Это означает, что существует точечное преобразование $u \to \varphi(u)$, $v \to \psi(v)$, которое нормирует f и g на единицу. Это влечет $\delta = 0$ в силу уравнения (3.44), например. При этом $\delta = a_1b_2 = 0$, следовательно, $\mu_2 = \nu_2 = 0$ в силу уравнений (3.41) и (3.42). Таким образом, мы получаем систему

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + v_2(a_1u_1 + a_3) + \mu_1u_1^3 + \mu_3u_1v_1^2 + \mu_4u_1^2 + \mu_5u_1v_1 + \mu_6u_1 + f_3(u,v,v_1), \\ v_t &= av_3 + u_2(b_2v_1 + b_3) + \nu_1v_1^3 + \nu_3u_1^2v_1 + \nu_4v_1^2 + \nu_5u_1v_1 + \nu_6v_1 + g_3(u,v,u_1), \end{aligned}$$

где $a_1b_2 = 0$ и $a_1 = a_1(v)$, $b_2 = b_2(u)$ в силу уравнений (3.39).

Дальнейший анализ условий интегрируемости заключался в рассмотрении большого числа развилок, которые всегда приводили к тому, что f_3 и g_3 должны быть полиномами не выше третьей степени по переменным v_1 и u_1 соответственно, т.е. мы получали противоречие. Данный факт подтверждается тем, что в символическом методе исследования полиномиальных уравнений показано, что все члены интегрируемого уравнения должны иметь одинаковые веса, и, поскольку член u_3 имеет вес 3, то тот факт, что $f_{3,v_1v_1v_1v_1}g_{3,u_1u_1u_1u_1} = 0$, является ожидаемым. Тем не менее при классификации мы рассматривали произвольные уравнения, а не только полиномиальные, поэтому анализировали абсолютно все случаи, вытекающие из условий интегрируемости.

Как и выше, отметим, что случаи D.2. и D.3. симметричны относительно инволюции, поэтому мы исследовали только D.3.

D.3. Учитывая (3.39)–(3.47), система (3.38) приняла вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + v_2(a_1u_1 + a_3) + \mu_1u_1^3 + \mu_3u_1v_1^2 + \mu_4u_1^2 + \mu_5u_1v_1 + \mu_6u_1 + \eta_1v_1^3 + \eta_2v_1^2 + \eta_3v_1 + \eta_4, \\ v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2D_x(\ln g)\right) + u_2(b_1u_1 + b_2v_1 + b_3) + \nu_1v_1^3 + \nu_2u_1v_1^2 + \nu_3u_1^2v_1 + \nu_4v_1^2 + \\ &\quad + \nu_5u_1v_1 + \nu_6v_1 + g_3(u,v,u_1), \end{aligned}$$

где $a_1b_2 = 0$, $a_1 = a_1(v)$, $b_2 = b_2(u)$ и $\eta_i = \eta_i(u,v)$.

Несмотря на то что в первом уравнении системы зависимость от переменных первого порядка полностью определилась, вместо функции f_3 во все уравнения, полученные из условий интегрируемости, вошли новые неизвестные η_i, что привело к значительному росту числа вариантов при дальнейшем анализе. Тем не менее, рассмотрев все возможные случаи, мы приходили либо к треугольной системе с независимым уравнением для u, либо к противоречию $g_{3,u_1u_1u_1u_1} = 0$.

D.4. Указанный вариант оказался самым трудоемким. Фактически мы удовлетворили лишь уравнениям (3.47), и исследуемая система приняла вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}u_2D_x(\ln f) + v_2(a_1u_1 + a_2v_1 + a_3) + \mu_1u_1^3 + \mu_2u_1^2v_1 + \mu_3u_1v_1^2 + \mu_4u_1^2 + \\ &\quad + \mu_5u_1v_1 + \mu_6u_1 + p_1v_1^3 + p_2v_1^2 + p_3v_1 + p_4, \\ v_t &= a\left(v_3 - \frac{3}{2}v_2D_x(\ln g)\right) + u_2(b_1u_1 + b_2v_1 + b_3) + \nu_1v_1^3 + \nu_2u_1v_1^2 + \nu_3u_1^2v_1 + \nu_4v_1^2 + \\ &\quad + \nu_5u_1v_1 + \nu_6v_1 + q_1u_1^3 + q_2u_1^2 + q_3u_1 + q_4, \end{aligned}$$

где все неизвестные функции зависят только от переменных нулевого порядка.

Поскольку из (3.40)–(3.46) никаких дополнительных условий не возникло, а число неизвестных функций сильно выросло, то потребовалось колоссальное количество времени на построение и анализ системы уравнений для них. Попытка даже схематично описать проведенные расчеты потерпела фиаско, поскольку выделение подслучаев сводилось к множественному перебору вариантов – равенство/неравенство нулю различного рода множителей. Результат этих громоздких вычислений сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Не приводящиеся к треугольному виду системы* (1.1)*, удовлетворяющие семи условиям интегрируемости* (3.1)*, приводятся подходящими преобразованиями* (2.1)–(2.4) *к одной из следующих систем:*

$$\begin{gathered} u_t = u_3 + uu_1 + v_1, \\ v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + 3(c-2)u_1u_2 + \frac{1}{4}(c-1)(u^2+2v)u_1 + \frac{1}{2}(c-3)uv_1; \end{gathered} \tag{3.48}$$

$$\begin{gathered} u_t = u_3 + uu_1 + v_1, \\ v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{3}{2}(c-2)u_1u_2 + \frac{1}{4}(c-1)(u^2+2v)u_1 + \frac{1}{2}(c-3)uv_1; \end{gathered} \tag{3.49}$$

$$\begin{gathered} u_t = u_3 + (u+v)u_1 - \frac{1}{2}(c-3)uv_1 + \frac{1}{2}(5c-11)vv_1, \\ v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - (v-(c+2)u)u_1 + \frac{1}{2}(c-3)(u+v)v_1; \end{gathered} \tag{3.50}$$

$$\begin{gathered} u_t = u_3 + v_2, \\ v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - \frac{3}{2}(c-3)uu_2 + \frac{1}{2}(c-1)uv_1 - \frac{1}{6}(c-3)u^3; \end{gathered} \tag{3.51}$$

$$\begin{gathered} u_t = u_3 + v_2, \\ v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - \frac{3}{2}(c-3)uu_2 + \frac{1}{2}(c-1)uv_1 - \frac{3}{4}(c-2)u_1^2 - \frac{1}{6}(c-3)u^3; \end{gathered} \tag{3.52}$$

$$\begin{gathered} u_t = u_3 + (3c-7)u(u_1 - v_2) + \frac{1}{2}(5c-11)v_1v_2 - \frac{1}{2}(5c-13)v_1u_1, \\ v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - \frac{3}{2}(c-3)u_2 + \frac{1}{2}(3c-7)(v_1-2u)v_1 + 2(c-1)u^2; \end{gathered} \tag{3.53}$$

$$\begin{gathered} u_t = u_3 + \left(v(c-2) - \frac{1}{2}(c-1)u\right)v_2 - \frac{1}{3}uv(v_1(c-1) + 2u_1) - \\ - \frac{1}{6}(c-1)(3v_1 + v^2)u_1 - \frac{1}{6}(v^2(c-3) + 2u^2)v_1 + (c-2)v_1^2, \\ v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(u(c+1) - (c-1)v)u_2 + \frac{1}{2}(c+1)u_1^2 - \frac{1}{2}(c-1)v_1u_1 - \\ - \frac{1}{3}(u_1(c+1) - 2v_1)uv + \frac{1}{3}v^2u_1 - \frac{1}{6}(c+1)u^2v_1 - \frac{1}{6}(c+3)u^2u_1; \end{gathered} \tag{3.54}$$

$$\begin{gathered} u_t = u_3 + \frac{1}{2}\left((5c-11)\left(v_1 - \frac{1}{6}v^2\right) - (3c-7)u\right)v_2 - 2uu_1 + \frac{1}{6}(3c-7)uvv_1 - \\ - \left(u_1(c-3) + \frac{1}{6}(5c-11)vv_1\right)\left(v_1 - \frac{1}{6}v^2\right), \\ v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + 3u_2 + vu_1 + uv_1 - \frac{1}{12}(3c-7)v^2v_1; \end{gathered} \tag{3.55}$$

$$\begin{gathered} u_t = u_3 + \left(\frac{1}{6}(3c-7)v^2 + \frac{1}{2}(5c-11)v_1 + 2(c-2)u\right)v_2 + 2(c-1)uu_1 + \\ + \frac{1}{2}(5c-9)u_1v_1 + \frac{2}{3}(c-3)uvv_1 + \frac{1}{3}(c-4)v^2u_1 + \frac{2}{9}(c-2)v^3v_1 + \frac{1}{3}(3c-7)vv_1^2, \\ v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{3}{2}(c-3)\left(u_2 - \frac{2}{9}v^2v_1\right) - (c-1)(uv_1 + vu_1); \end{gathered} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2}(c-3)v_2 - (c-1)(vu_1 + uv_1) - \frac{1}{3}(c+3)u^2 u_1, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{6}((3c+7)u^2 + 6(c+2)u_1 + 6(c+1)v)u_2 + \frac{1}{2}(3c+1)v_1 u_1 + \\ &+ 2(c-1)vv_1 + \frac{2}{3}(c+3)uvu_1 + \frac{1}{3}(c+4)u^2 v_1 + \frac{1}{3}(3c+7)uu_1^2 + \frac{1}{9}(5c+11)u^3 u_1; \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + \frac{3}{2}(c-3)v_2 + 2(c-1)v^2 - (c+3)vu_1 + \frac{1}{2}(c+3)u_1^2, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + (u_1(c+2) - (c+3)v)u_2 - \frac{1}{2}(c+7)u_1 v_1 + (c+3)vv_1; \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + \frac{3}{2}(3c-7)v_2 + \frac{1}{2}(c-3)(vu_1 + uv_1) - \frac{1}{12}(3c+7)u^2 u_1, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 - \frac{1}{12}(u^2(5c+11) - 12u_1(c+2) + 6(c+3)v)u_2 - (c-3)vv_1 - \\ &- 2v_1 u_1 + \frac{1}{6}(3c+7)vuu_1 + \frac{1}{6}(c+3)u^2 v_1 - \frac{1}{6}(5c+11)uu_1^2 + \frac{1}{36}(13c+29)u^3 u_1; \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2 v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1 v_1^2 + \\ &+ c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1) + c_2\eta(2v_1 + (c+1)u_1) + c_3\varphi(v_1(c-3) - 4u_1), \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2 v_1 - 3u_1 v_1^2 + \\ &+ c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1) + c_2\eta(2u_1 - (c-1)v_1) - 2c_3\varphi(v_1(c-3) - u_1); \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2 v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1 v_1^2 + \\ &+ c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1) + 2c_2\zeta^2(2u_1 - v_1) + c_3(5c+11)\varphi^{-4}(u_1 + (c+2)v_1), \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2 v_1 - 3u_1 v_1^2 + \\ &+ c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1) - c_2(c-3)\zeta^2(u_1 - 2v_1) + 2c_3\varphi^{-4}(u_1 - (c+2)v_1); \end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2 v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1 v_1^2 + \\ &+ c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1) + c_2(5c+11)\varphi^{-4}(u_1 + (c+2)v_1) + c_3\varphi(v_1(c-3) - 4u_1), \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2 v_1 - 3u_1 v_1^2 + \\ &+ c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1) + 2c_2\varphi^{-4}(u_1 - (c+2)v_1) - 2c_3\varphi(v_1(c-3) - u_1); \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2 v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1 v_1^2 + \\ &+ c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1) + 2c_2\zeta^2(2u_1 - v_1) + c_3\eta(2v_1 + (c+1)u_1), \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2 v_1 - 3u_1 v_1^2 + \\ &+ c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1) - c_2(c-3)\zeta^2(u_1 - 2v_1) + c_3\eta(2u_1 - (c-1)v_1); \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}u_t &= u_3 + 3(u_1+v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + cc_2\xi(u_1^2(c+3) - 2v_1^2(c+2) - \\ &\quad - 2u_1v_1(c+1) + 2v_2) - \frac{2}{3}(3c+5)c_2^2\xi^2(u_1+2v_1) + c_1\eta(2v_1 + (c+1)u_1),\\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + cc_2\xi(u_1^2(c-1) + \\ &\quad + 2cu_1v_1(c+1) + 2v_1^2 + 2u_2) - \frac{2}{3}(3c+5)c_2^2\xi^2(v_1+2u_1) + c_1\eta(2u_1 - (c-1)v_1);\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}u_t &= u_3 + 3(u_1+v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + cc_2\xi(u_1^2(c+3) - 2v_1^2(c+2) - \\ &\quad - 2u_1v_1(c+1) + 2v_2) - c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1) - \frac{2}{3}(3c+5)c_2^2\xi^2(u_1+2v_1) + \frac{4}{9}cc_1c_2\xi^3,\\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + cc_2\xi(u_1^2(c-1) + \\ &\quad + 2cu_1v_1(c+1) + 2v_1^2 + 2u_2) + c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1) - \frac{2}{3}(3c+5)c_2^2\xi^2(v_1+2u_1) + \frac{4}{9}cc_1c_2\xi^3;\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}u_t &= u_3 + 3(u_1+v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 - c_2\varphi^{-2}(2u_1^2 + (3v_1^2 + 4u_1v_1)(c+3) - \\ &\quad - 2v_2) - \frac{4}{15}c_2^2\varphi^{-4}(u_1(c+10) + 2(c+5)v_1) + 6(11c-25)c_1^2\zeta^2(2u_1 - v_1),\\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + c_2\varphi^{-2}(2v_1^2 - (3u_1^2 + \\ &\quad + 4u_1v_1 - u_2)(c-3)) - \frac{4}{15}c_2^2\varphi^{-4}(2u_1(c-5) + (c-10)v_1) - 3(11c-25)c_1^2(c-3)\zeta^2(u_1 - 2v_1);\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}u_t &= u_3 + 3(u_1+v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 - c_2\varphi^{-2}(2u_1^2 + (3v_1^2 + 4u_1v_1)(c+3) - \\ &\quad - 2v_2) + \frac{4}{9}cc_1c_2\varphi^{-6} - \frac{4}{15}c_2^2\varphi^{-4}(u_1(c+10) + 2(c+5)v_1) + 2c_1\varphi^{-4}(u_1 + (c+2)v_1),\\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 - c_2\varphi^{-2}(2v_1^2 - (3u_1^2 + 4u_1v_1 - \\ &\quad - u_2)(c-3)) - \frac{2}{9}(3c-5)c_1c_2\varphi^{-6} - \frac{4}{15}c_2^2\varphi^{-4}(2u_1(c-5) + (c-10)v_1) + c_1\varphi^{-4}(u_1(5c-11) + (c-3)v_1);\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}u_t &= u_3 + 3(u_1+v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + \frac{3}{2}cc_2\zeta(v_1^2(c+1) - (u_1^2 + u_1v_1)(c-3) + \\ &\quad + 2v_2) + 3\zeta^2c_2^2(cv_1 - (2c-5)u_1) - c_1c_2\zeta^3 - \frac{3}{5}c_1\zeta^2(2u_1 - v_1),\\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + \frac{3}{2}cc_2\zeta(2u_1^2(c-2) - 2u_1v_1 - \\ &\quad - 2v_1^2 + (3c-7)u_2) + \frac{3}{2}c_2^2\zeta^2(v_1(c-5) + (7c-15)u_1) + \frac{3}{10}c_1(c-3)\zeta^2(u_1 - 2v_1) + \frac{1}{2}c_1c_2(3c-7)\zeta^3;\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}u_t &= u_3 + 3(u_1+v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1v_1^2 + \frac{3}{2}cc_2\zeta(v_1^2(c+1) - \\ &\quad - (u_1^2 + u_1v_1)(c-3) + 2v_2) + 3c_2^2\zeta^2(cv_1 - (2c-5)u_1) + c_1\xi^2(v_1(c+1) - 2u_1),\\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 + \frac{3}{2}cc_2\zeta(2u_1^2(c-2) - \\ &\quad - 2u_1v_1 - 2v_1^2 + (3c-7)u_2) + \frac{3}{2}c_2^2\zeta^2(v_1(c-5) + (7c-15)u_1) + c_1\xi^2(2u_1(c-2) - (c-3)v_1);\end{aligned} \tag{3.69}$$

$$u_t = u_3 + 3(u_1 + v_1)v_2 - \frac{1}{2}(c+3)v_1^3 + 3u_1^2 v_1 - \frac{3}{2}(c+1)u_1 v_1^2 - c_2\varphi^{-2}(2u_1^2 + (3v_1^2 + 4u_1v_1)(c+3) -$$
$$- 2v_2) + \frac{4}{27}(c+1)c_2^3\varphi^{-6} - \frac{2}{15}c_2^2\varphi^{-4}(u_1(c+15) - (3c-5)v_1) + \frac{3}{2}c_1\varphi(4u_1 - (c-3)v_1) - 2cc_1c_2\varphi^{-1},$$
$$v_t = \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u_1+v_1)u_2 - u_1^3) - \frac{3}{2}(c-1)u_1^2v_1 - 3u_1v_1^2 - \tag{3.70}$$
$$- c_2\varphi^{-2}(2v_1^2 - (3u_1^2 + 4u_1v_1 - u_2)(c-3)) - \frac{4}{27}(c-1)c_2^3\varphi^{-6} + \frac{2}{15}c_2^2\varphi^{-4}(u_1(3c+5) - (c-15)v_1) +$$
$$+ 3c_1\varphi(v_1(c-3) - u_1) + c_1c_2(3c-5)\varphi^{-1};$$

где $\xi = e^{\frac{1}{2}(u-v)(c+1)}$, $\zeta = e^{-\frac{1}{2}(c-1)u+(c+2)v}$, $\eta = e^{-\frac{1}{2}(c+3)u-v}$, $\varphi = e^{u+\frac{1}{2}(c+3)v}$.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Системы (3.48)–(3.50) впервые были представлены в [1]. Если в (3.60)–(3.70) положить $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, то получим систему (2.4) из [10], которую можно записать в дивергентном виде:

$$u_t = D_x\left[u_2 + 3(u+v)v_1 - \frac{1}{2}(c+3)v^3 + 3u^2v - \frac{3}{2}(c+1)uv^2\right],$$
$$v_t = D_x\left[\frac{1}{2}(3c-7)v_2 + \frac{1}{2}(c-3)(3(u+v)u_1 - u^3) - \frac{3}{2}(c-1)u^2v - 3uv^2\right].$$

Дополнительные исследования позволили найти несколько дифференциальных подстановок, связывающих (3.48)–(3.50) с другими системами теоремы. Приведенные ниже формулы вида $\{u' = f(\mathbf{u}_i), v' = g(\mathbf{v}_j); (\mathrm{A}) \to (\mathrm{B})\}$ означают, что решение (u', v') системы (A) связано с решением (u, v) системы (B):

$$u' = u, \quad v = v_1 - \frac{1}{2}u^2; \qquad (3.48) \to (3.51),\ (3.49) \to (3.52)$$

$$u' = u, \quad v = v_1 - u; \qquad (3.50) \to (3.53)$$

$$u' = u_1 - \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{6}(c+1)uv + \frac{1}{12}(c-1)v^2,$$
$$v' = v_1 - \frac{1}{6}(c+2)u^2 + \frac{1}{6}(c+1)uv - \frac{1}{12}(c+3)v^2; \qquad (3.50) \to (3.54)$$

$$u' = u, \quad v' = v_1 - \frac{1}{2}(c+3)u - \frac{1}{6}v^2; \qquad (3.50) \to (3.55)$$

$$u' = u, \quad v' = v_1 + u - \frac{1}{6}(c+1)v^2; \qquad (3.50) \to (3.56)$$

$$u' = u_1 + \frac{1}{6}(c+1)u^2 + v, \quad v' = v; \qquad (3.50) \to (3.57)$$

$$u' = u_1 - v, \quad v' = v; \qquad (3.50) \to (3.58)$$

$$u' = u_1 - \frac{1}{12}(c+3)u^2 + \frac{1}{2}(c-3)v, \quad v' = v; \qquad (3.50) \to (3.59)$$

$$u' = \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)(2u_1 + v_1)v_1 - c_1\xi^2,$$
$$v' = -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 - c_1\xi^2,$$
$$c_2 = c_3 = 0; \qquad (3.50) \to (3.60)$$

$$u' = \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)v_1(2u_1+v_1) + \\ + cc_2\xi(c+1)(u_1+v_1) + \frac{2}{3}cc_2^2\xi^2 - 2c_1\eta,$$

$$v' = -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 - \\ - 2cc_2\xi(c+2)(u_1+v_1) - \frac{2}{3}c_2^2\xi^2(9c+20) + c_1(c+3)\eta; \qquad (3.50) \to (3.64)$$

$$u' = \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)v_1(2u_1+v_1) + \\ + c_2\xi(c+5)(u_1+v_1) - \left(c_1 - \frac{2}{3}cc_2^2\right),$$

$$v' = -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 - \\ - 2c_2\xi(2c+5)(u_1+v_1) - \left(c_1 + \frac{2}{3}(9c+20)c_2^2\right)\xi^2; \qquad (3.50) \to (3.65)$$

$$u' = \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)(2u_1+v_1)v_1 + \\ + c_2(c+1)\varphi^{-2}v_1 + (c_2(c+1)\varphi^{-2} + 15c_1(3c-7)\zeta)u_1 + \\ + 3c_1^2(47c-105)\zeta^2 + \frac{1}{15}c_2(3c-5)(c_2\varphi^{-2}G_1\zeta)\varphi^{-2},$$

$$v' = -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 + \\ + c_2(c+1)(u_1+v_1)\varphi^{-2} - \frac{1}{15}c_2^2(7c+15)\varphi^{-4} + \\ + 30c_1\zeta v_1 - 3c_1(3c-5)(3c_1\zeta + 2c_2\varphi^{-2})\zeta; \qquad (3.50) \to (3.66)$$

$$u' = \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)(2u_1+v_1)v_1 + \\ + c_2(c+1)(u_1+v_1)\varphi^{-2} + \frac{1}{15}c_2^2(3c-5)\varphi^{-4} - c_1(c-1)\varphi^{-4},$$

$$v' = -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 + \\ + c_2(c+1)(u_1+v_1)\varphi^{-2} - \frac{1}{15}c_2^2(7c+15)\varphi^{-4} + c_1(c+1)\varphi^{-4}; \qquad (3.50) \to (3.67)$$

$$u' = \frac{3}{2}(c-1)u_2 + \frac{3}{4}(c-3)u_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)v_1(2u_1+v_1) + \\ + 3cc_3\zeta u_1 + \frac{1}{2}c_2(c+5)\zeta v1 + \frac{3}{10}(c_2^2(4c-5) + 2c_2c_3(2c+5) + cc_3^2)\zeta^2,$$

$$v' = -\frac{3}{4}(c+1)(2v_2 + u_1^2 + 2u_1v_1) - \frac{3}{4}(3c+7)v_1^2 - \\ - \frac{3}{2}(c_2(3c+5) + (7c+15)c_3)\zeta v_1 + \frac{3}{2}c_2(c-5)\zeta u_1 - \\ - \frac{3}{10}(c_2^2(c+10) + 2c_2c_3(3c+10) + (9c+20)c_3^2)\zeta^2,$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(c-5)c_2^2 + \frac{1}{2}(c+5)c_2c_3 + (2c+5)c_3^2. \qquad (3.50) \to (3.68)$$

Интересен тот факт, что (3.48) и (3.49) допускают подстановку

$$u' = v, \quad v' = \frac{3}{2}(c-3)v_2 + \frac{1}{4}(c-5)v^2 + u.$$

Подобрав нужные точечные преобразования в полученных системах для u и v, снова приходим к (3.48) и (3.49) соответственно.

Автор выражает благодарность А.Г. Мешкову за постановку задачи, предоставление пакета Jet для симметрийного анализа эволюционных уравнений и систем, а также за полезные рекомендации по ходу вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дринфельд В.Г., Соколов В.В.* Новые эволюционные уравнения, обладающие (L, A)-парой, Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики, 1981. Тр. сем. С.Л. Соболева. Вып. 2. С. 5–9.
2. *Foursov M.V.* Towards the complete classification of homogeneous two-component integrable equations // J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 3088–3096.
3. *Wang D.S.* Complete integrability and the Miura transformation of a coupled KdV equation // Appl. Math. Lett. 2010. V. 23. P. 665–669.
4. *Wang D.S., Liu J., Zhang Z.* Integrability and equivalence relationships of six integrable coupled Korteweg-de Vries equations // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 36. № 12. P. 3516–3530.
5. *Meshkov A.G.* Necessary conditions of the integrability // Inverse Problem. 1994. V. 10. № 3. P. 635–653.
6. *Meshkov A.G., Kulemin I.V.* To the classification of integrable systems in 1+1. dimensions // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics. Proc. 2nd Int. Conf., Kyiv, Ukraine, July 7–13, 1997. P. 115–121.
7. *Meshkov A.G., Sokolov V.V.* Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere // Comm. Math. Phys. 2002. V. 232. № 1. P. 1–18.
8. *Балахнев М.Ю.* Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений // Теор. и матем. физ. 2005. Т. 142. № 1. С. 13–20.
9. *Balakhnev M.Ju., Meshkov A.G.* Integrable anisotropic evolution equations on a sphere // SIGMA 1. 2005. 027. 11 pages, nlin.SI/0512032.
10. *Мешков А.Г.* К симметрийной классификации эволюционных систем третьего порядка дивергентного вида // Фунд. и прикл. матем. 2006. Т. 12. № 7. С. 141–161.
11. *Meshkov A.G., Balakhnev M.Ju.* Two-field integrable evolutionary systems of the third order and their differential substitutions // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2008. V. 4. paper 018. P. 1–29.
12. *Мешков А.Г., Соколов В.В.* Интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепарантой // Уфимск. матем. журн. 2012. Т. 4. № 3. С. 104–154.