ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 4, с. 548–556

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.988

УЛУЧШЕННАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА ТИХОНОВА ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1)]

© 2023 г. М. М. Кокурин[1,*]

[1] 424000 Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1, Марийский гос. ун-т, Россия

**e-mail: kokurin@nextmail.ru*

Поступила в редакцию 18.08.2022 г.
Переработанный вариант 21.09.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Изучается метод Тихонова в применении к некорректным задачам минимизации гладкого невыпуклого функционала. При условии истокопредставимости искомого решения получена оценка точности метода Тихонова в терминах параметра регуляризации, ранее известная только при условии выпуклости минимизируемого функционала или при наложении структурного условия на его нелинейность. Также получена новая оценка точности метода Тихонова в случае приближенно заданного функционала. Библ. 10.

Ключевые слова: некорректная экстремальная задача в гильбертовом пространстве, метод Тихонова, оценка точности.

DOI: 10.31857/S0044466923040117, **EDN:** IPHNWS

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучается задача минимизации

$$J(x) \to \min_{x \in H} \tag{1}$$

нелинейного функционала $J : H \to \mathbb{R}$ на вещественном гильбертовом пространстве H. Эта задача заключается в нахождении точки $x^* \in H$, доставляющей глобальный минимум функционалу J. Существование решения x^* ниже предполагается. Потребуем, чтобы функционал J был дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и его вторая производная Фреше удовлетворяла условию Липшица

$$\|J''(x) - J''(y)\|_{L(H)} \le \Lambda \|x - y\|, \quad x, y \in H, \tag{2}$$

с некоторой константой $\Lambda > 0$. Под $\|\cdot\|$ здесь и далее понимается норма пространства H. Отметим, что из (2) с применением формулы Тейлора для отображений в нормированных пространствах [1, с. 658] следуют оценки

$$\|J'(x + h) - J'(x) - J''(x)h\| \le \frac{1}{2}\Lambda \|h\|^2, \quad h \in H; \tag{3}$$

$$\left|J(x + h) - J(x) - (J'(x), h) - \frac{1}{2}(J''(x)h, h)\right| \le \frac{1}{6}\Lambda \|h\|^3, \quad h \in H, \tag{4}$$

которые понадобятся нам ниже.

Задача оптимизации (1) в общем случае является некорректной [2]. Это означает, что она не может быть решена классическими методами минимизации: даже если с их помощью получена минимизирующая последовательность $\{x_n\} \subset H$, такая что $\lim_{n\to\infty} J(x_n) = J(x^*)$, эта последовательность не обязательно сходится к искомому решению x^* в норме H. Для решения некорректных экстремальных задач используются методы регуляризации, такие как метод Тихонова и методы

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-71-10070).

итеративной регуляризации [2, гл. 2]. В случае точно заданного функционала J метод Тихонова заключается в минимизации регуляризованного функционала

$$T_\alpha : H \to \mathbb{R}, \quad T_\alpha(x) = J(x) + \alpha\|x - \xi\|^2$$

с параметром $\alpha > 0$. Если функционал J является слабо полунепрерывным снизу, существует точка глобального минимума $x_\alpha \in H$ функционала T_α [2, теорема 1.3.2] и ее можно принять в качестве приближения к искомой точке x^*. Слабая полунепрерывность снизу функционала J означает, что для любой последовательности $\{x_n\} \subset H$, слабо сходящейся к некоторой точке $x_0 \in H$, справедливо $\varliminf\limits_{n\to\infty} J(x_n) \geq J(x_0)$. В общем случае, если слабая полунепрерывность снизу функционала J не гарантируется, используется следующая модификация описанной выше процедуры. Наряду с параметром $\alpha > 0$, задают значение $\varepsilon > 0$ и в качестве приближения к решению x^* выбирают точку $x_{\alpha,\varepsilon}$ такую, что

$$\inf_{x\in H} T_\alpha(x) \leq T_\alpha(x_{\alpha,\varepsilon}) \leq \inf_{x\in H} T_\alpha(x) + \varepsilon. \tag{5}$$

Оценки точности метода Тихонова и других методов регуляризации устанавливаются обычно при некоторых дополнительных условиях на искомое решение x^*. Мы будем предполагать, что выполнено условие истокопредставимости

$$\exists w \in H : x^* - \xi = J''(x^*)w \tag{6}$$

с некоторым априори заданным элементом $\xi \in H$. При дополнительном условии выпуклости функционала J известна оценка точности $\|x_\alpha - x^*\| = O(\alpha)$ (см. [3, теорема 3.9]). В [4] такая же по порядку α оценка установлена для невыпуклых функционалов J, удовлетворяющих структурному условию

$$(J''(x^* + h) - J''(x^*))w = J''(x^*)k(h, w). \tag{7}$$

Это равенство должно выполняться для любых элементов $h, w \in H$, обладающих достаточно малой нормой, с отображением $k: H \times H \to H$, на которое наложены некоторые дополнительные требования. В [5] при анализе схемы Лаврентьева в применении к операторным уравнениям вида $F(x) = 0$ с монотонным оператором F применялось структурное условие, которое можно получить из (7), если положить $F = J'$. Фактически, рассмотренная в [5] задача является задачей (1) с выпуклым функционалом J, удовлетворяющим (7). Особенностью работ [4], [5] является получение оценок точности изучаемого метода в зависимости от показателя гладкости искомого решения. Без использования структурных условий, подобных (7), для метода Тихонова в применении к некорректным задачам оптимизации с гладкими невыпуклыми функционалами J в [6] установлена оценка $\|x_\alpha - x^*\| = O(\alpha^{1/2})$. В настоящей статье впервые устанавливается оценка $\|x_\alpha - x^*\| = O(\alpha)$ для произвольных гладких невыпуклых функционалов J.

Изучается также случай, когда вместо точного функционала J в методе Тихонова используется его приближение J_δ. В подобных исследованиях обычно предполагается, что функционалы J_δ и J связаны соотношением

$$|J_\delta(x) - J(x)| \leq \delta\left(1 + \frac{1}{2}\|x - \xi\|^2\right), \quad x \in H, \tag{8}$$

с известным уровнем погрешности δ (см., например, [6], [7]), а параметры α и ε выбираются по определенным правилам в зависимости от δ. В настоящей статье исследуется другой критерий близости приближенного функционала к точному, который также использовался в [4] наряду с (8):

$$\|J'_\delta(x) - J'(x)\| \leq \delta(1 + \|x - \xi\|), \quad x \in H. \tag{9}$$

Таким образом, предполагается, что функционал J_δ всюду дифференцируем по Фреше. При подходящем выборе $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ мы получим оценку точности метода Тихонова с приближенным функционалом, удовлетворяющим условию (9).

Оценки точности метода Тихонова и вычислительных алгоритмов на его основе в применении к задачам в банаховых пространствах приведены, например, в [8–10]. В этих исследованиях функционал J имеет специальный вид $J(x) = \|F(x)\|^r$, $r > 1$, с наложением дополнительных структурных условий на нелинейность оператора F.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Пусть функционал J на гильбертовом пространстве H имеет точку глобального минимума x^*, причем выполнены условие гладкости (2) и условие истокопредставимости (6). Пусть вместо J известен приближенный функционал J_δ и для него справедливо соотношение (9). Рассмотрим функционал

$$T_{\alpha,\delta}(x) = J_\delta(x) + \alpha\|x - \xi\|^2.$$

Метод Тихонова в применении к задаче (1) заключается в нахождении точки $\tilde{x} = \tilde{x}_{\alpha,\varepsilon,\delta} \in H$, такой что

$$\inf_{x\in H} T_{\alpha,\delta}(x) \le T_{\alpha,\delta}(\tilde{x}) \le \inf_{x\in H} T_{\alpha,\delta}(x) + \varepsilon \tag{10}$$

с параметрами $\alpha,\varepsilon > 0$, выбранными подходящим образом в зависимости от δ. Такая точка $\tilde{x}$ всегда существует. Конкретный способ выбора параметров $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ будет уточнен позже.

Из (10) следует, что для произвольного элемента $z \in H$ справедливо неравенство

$$J_\delta(\tilde{x}) + \alpha\|\tilde{x} - \xi\|^2 \le J_\delta(z) + \alpha\|z - \xi\|^2 + \varepsilon,$$

а значит, в силу (9),

$$\begin{aligned}
J(\tilde{x}) + \alpha\|\tilde{x} - \xi\|^2 &\le J(z) + (J_\delta(z) - J_\delta(\tilde{x})) - (J(z) - J(\tilde{x})) + \alpha\|z - \xi\|^2 + \varepsilon = \\
&= J(z) + \int_0^1 (J'_\delta(\tilde{x} + t(z - \tilde{x})) - J'(\tilde{x} + t(z - \tilde{x})), z - \tilde{x})dt + \alpha\|z - \xi\|^2 + \varepsilon \le \\
&\le J(z) + \delta\Big(1 + \max_{t\in[0,1]}\|\tilde{x} + t(z - \tilde{x}) - \xi\|\Big)\|z - \tilde{x}\| + \alpha\|z - \xi\|^2 + \varepsilon = \\
&= J(z) + \delta\Big(1 + \max_{t\in[0,1]}\|(1 - t)(\tilde{x} - \xi) + t(z - \xi)\|\Big)\|z - \tilde{x}\| + \alpha\|z - \xi\|^2 + \varepsilon \le \\
&\le J(z) + \delta(1 + \|\tilde{x} - \xi\| + \|z - \xi\|)\|z - \tilde{x}\| + \alpha\|z - \xi\|^2 + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{11}$$

В ходе дальнейших рассуждений мы будем подставлять вместо z в неравенство (11) и его следствия разные элементы пространства H.

Следуя [6], для оценки величины $\|\tilde{x} - \xi\|$ запишем неравенство (11) с $z = x^*$:

$$J(\tilde{x}) + \alpha\|\tilde{x} - \xi\|^2 \le J(x^*) + \delta(1 + \|\tilde{x} - \xi\| + \|x^* - \xi\|)\|x^* - \tilde{x}\| + \alpha\|x^* - \xi\|^2 + \varepsilon.$$

С учетом неравенства $J(x^*) \le J(\tilde{x})$ отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{x} - \xi\|^2 \le \|x^* - \xi\|^2 + \frac{\delta}{\alpha}(1 + \|\tilde{x} - \xi\| + \|x^* - \xi\|)(\|\tilde{x} - \xi\| + \|x^* - \xi\|) + \frac{\varepsilon}{\alpha}; \\
&\|\tilde{x} - \xi\|\left(\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\|\tilde{x} - \xi\| - \frac{\delta}{\alpha}(1 + 2\|x^* - \xi\|)\right) \le \|x^* - \xi\|^2 + \frac{\delta}{\alpha}(1 + \|x^* - \xi\|)\|x^* - \xi\| + \frac{\varepsilon}{\alpha}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$\lim_{\delta\to 0}\alpha(\delta) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta}{\alpha(\delta)} = 0, \quad \varepsilon(\delta) = O(\alpha^4(\delta)) \quad (\delta \to 0). \tag{13}$$

Пусть $\delta_0 \in (0,1]$ таково, что

$$\forall\delta \in (0, \delta_0], \quad \alpha(\delta) \le 1, \quad \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \le \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Далее предполагается, что $\delta \in (0, \delta_0]$, так что неравенства (14) выполнены.

Заметим, что в случае, если выполнено неравенство

$$\|\tilde{x}-\xi\| \geq 2+4\|x^*-\xi\|, \tag{15}$$

для левой части (12) в силу (14) справедлива оценка

$$\|\tilde{x}-\xi\|\left(\left(1-\frac{\delta}{\alpha}\right)\|\tilde{x}-\xi\|-\frac{\delta}{\alpha}(1+2\|x^*-\xi\|)\right) \geq \frac{1}{4}\|\tilde{x}-\xi\|^2,$$

так что в этом случае

$$\frac{1}{4}\|\tilde{x}-\xi\|^2 \leq \|x^*-\xi\|^2+\frac{\delta}{\alpha}(1+\|x^*-\xi\|)\|x^*-\xi\|+\frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Вновь используя (13), получаем оценку

$$\|\tilde{x}-\xi\| \leq C_1, \quad \delta \in (0,\delta_0]. \tag{16}$$

Поясним смысл сделанного вывода. Здесь и далее мы считаем фиксированными функционал J, константу Λ, элементы ξ и w, зависимости $\alpha=\alpha(\delta)$ и $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ (точный вид этих зависимостей будет указан позже). Через $C_1, C_2, \ldots$ мы будем обозначать константы, не зависящие от δ и J_δ – в частности, это значит, что они не зависят также от α и ε, хотя могут различаться для разных функционалов J или при разном выборе точки ξ. Мы доказали оценку (16) в предположении (15), однако легко видеть, что она справедлива и без этого предположения, поскольку правая часть (15) является константой в указанном выше смысле. Оценка (16) означает, что при любом выборе $\delta \in (0,\delta_0]$ и функционала J_δ, удовлетворяющего неравенству (9), соответствующая точка $\tilde{x}$, определяемая соотношениями (10), не может покидать некоторого круга.

В силу (11) и (16), для произвольного элемента $z \in H$ справедливо

$$\begin{gathered}J(\tilde{x})+\alpha\|\tilde{x}-\xi\|^2 \leq J(z)+\alpha\|z-\xi\|^2+\delta(C_2+\|z-\xi\|)\|z-\tilde{x}\|+\varepsilon;\\ \|\tilde{x}-\xi\|^2-\|z-\xi\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}(J(z)-J(\tilde{x}))+\frac{\delta}{\alpha}(C_2+\|z-\xi\|)\|z-\tilde{x}\|+\frac{\varepsilon}{\alpha}.\end{gathered} \tag{17}$$

Используя легко проверяемое равенство

$$\|\tilde{x}-\xi\|^2-\|z-\xi\|^2=\|\tilde{x}-x^*\|^2-2(x^*-\xi,z-\tilde{x})-\|z-x^*\|^2$$

и условие истокопредставимости (6), получаем отсюда

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}-x^*\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha}(J(z)-J(\tilde{x}))+2(x^*-\xi,z-\tilde{x})+\|z-x^*\|^2+\frac{\delta}{\alpha}(C_2+\|z-\xi\|)\|z-\tilde{x}\|+\frac{\varepsilon}{\alpha}=\\ &=\frac{1}{\alpha}(J(z)-J(\tilde{x}))+2(J''(x^*)w,z-x^*)+2(J''(x^*)w,x^*-\tilde{x})+\|z-x^*\|^2+\\ &\quad+\frac{\delta}{\alpha}(C_2+\|z-\xi\|)\|z-\tilde{x}\|+\frac{\varepsilon}{\alpha}.\end{aligned} \tag{18}$$

Заметим теперь, что в силу (3) справедливо представление

$$J'(\tilde{x})=J'(x^*)+J''(x^*)(\tilde{x}-x^*)+S_1, \quad \|S_1\| \leq \frac{1}{2}\Lambda\|\tilde{x}-x^*\|^2. \tag{19}$$

Здесь $J'(x^*)=0_H$, поэтому

$$(J''(x^*)w,x^*-\tilde{x})=(w,J''(x^*)(x^*-\tilde{x}))=(w,S_1-J'(\tilde{x})).$$

Подставим полученное равенство в (18):

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}-x^*\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha}(J(z)-J(\tilde{x}))+2(J''(x^*)w,z-x^*)+2(w,S_1)-2(w,J'(\tilde{x}))+\\ &\quad+\|z-x^*\|^2+\frac{\delta}{\alpha}(C_2+\|z-\xi\|)\|z-\tilde{x}\|+\frac{\varepsilon}{\alpha}.\end{aligned} \tag{20}$$

Докажем, что элемент $J'(\tilde{x})$ в (20) допускает следующее представление.

Лемма 1. *Пусть выполнены соотношения* (2), (9), (10), (13). *Тогда справедливо представление*

$$J'(\tilde{x})=-2\alpha(\tilde{x}-\xi)+S_2, \quad \|S_2\| \leq C_3(\sqrt{\varepsilon}+\delta). \tag{21}$$

Доказательство. Запишем неравенство (17) в виде

$$T_\alpha(\tilde{x}) \le T_\alpha(z) + \delta(C_2 + \|z - \xi\|)\|z - \tilde{x}\| + \varepsilon. \tag{22}$$

Напомним, что здесь

$$T_\alpha : H \to \mathbb{R}, \quad T_\alpha(x) = J(x) + \alpha\|x - \xi\|^2.$$

Заметим, что $T''_\alpha(x) = J''(x) + 2\alpha E$, где E — единичный оператор в H, поэтому вторая производная T''_α удовлетворяет условию Липшица (2) с той же константой Λ, что и J'', и, значит, справедлива оценка (4) с заменой J на T_α. Положим $z = \tilde{x} - \sigma T'_\alpha(\tilde{x})$, $\sigma > 0$, в (22) и с учетом этой оценки получаем

$$T_\alpha(\tilde{x}) \le T_\alpha(\tilde{x}) - (T'_\alpha(\tilde{x}), \sigma T'_\alpha(\tilde{x})) + \frac{\sigma^2}{2}(T''_\alpha(\tilde{x})T'_\alpha(\tilde{x}), T'_\alpha(\tilde{x})) +$$
$$+ \frac{1}{6}\Lambda\sigma^3\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^3 + \delta\sigma(C_2 + \|\tilde{x} - \sigma T'_\alpha(\tilde{x}) - \xi\|)\|T'_\alpha(\tilde{x})\| + \varepsilon;$$

$$\sigma\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 \le \frac{\sigma^2}{2}\|T''_\alpha(\tilde{x})\|\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 + \frac{1}{6}\Lambda\sigma^3\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^3 + \delta\sigma(C_4 + \sigma\|T'_\alpha(\tilde{x})\|)\|T'_\alpha(\tilde{x})\| + \varepsilon;$$

$$\sigma\|T'_\alpha(\tilde{x})\|(\|T'_\alpha(\tilde{x})\| - C_4\delta) \le \frac{\sigma^2}{2}\|T''_\alpha(\tilde{x})\|\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 + \frac{1}{6}\Lambda\sigma^3\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^3 + \delta\sigma^2\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 + \varepsilon.$$

В силу (2), (3), (14) и (16), здесь

$$\|T'_\alpha(\tilde{x})\| = \|J'(\tilde{x}) + 2\alpha(\tilde{x} - \xi)\| \le \|J'(\xi)\| + \|J''(\xi)\|\|\tilde{x} - \xi\| + \frac{1}{2}\Lambda\|\tilde{x} - \xi\|^2 + 2\alpha\|\tilde{x} - \xi\| \le C_5,$$

$$\|T''_\alpha(\tilde{x})\|_{L(H)} = \|J''(\tilde{x}) + 2\alpha E\|_{L(H)} \le \|J''(\xi)\|_{L(H)} + \Lambda\|\tilde{x} - \xi\| + 2\alpha \le C_6.$$

поэтому

$$\sigma\|T'_\alpha(\tilde{x})\|(\|T'_\alpha(\tilde{x})\| - C_4\delta) \le C_7\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2\sigma^2(1 + \sigma) + \varepsilon. \tag{23}$$

Если выполнено неравенство

$$\|T'_\alpha(\tilde{x})\| \ge 2C_4\delta, \tag{24}$$

то $C_4\delta \le \|T'_\alpha(\tilde{x})\|/2$ и из (23) следует

$$\sigma \le 2C_7\sigma^2(1 + \sigma) + \frac{2\varepsilon}{\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2}.$$

Выберем теперь параметр $\sigma > 0$ так, чтобы

$$C_7\sigma(1 + \sigma) \le \frac{1}{4}.$$

Специально отметим, что выбранное значение σ не зависит от δ или J_δ. Получаем

$$\|T'_\alpha(\tilde{x})\|^2 \le \frac{4\varepsilon}{\sigma};$$

$$\|T'_\alpha(\tilde{x})\| \le 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}.$$

Эта оценка получена нами в предположении (24). Поэтому без данного предположения будет справедлива такая оценка:

$$\|T'_\alpha(\tilde{x})\| \le 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}} + 2C_4\delta,$$

или, что то же самое,

$$\|J'(\tilde{x}) + 2\alpha(\tilde{x} - \xi)\| \le 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}} + 2C_4\delta.$$

Отсюда сразу следует представление (21). Лемма доказана.

Подставим теперь полученное представление (21) в (20). Тогда с использованием (19) и (6) получаем

$$\|\tilde{x}-x^*\|^2 \le \frac{1}{\alpha}(J(z)-J(\tilde{x})) + 2(J''(x^*)w, z-x^*) + 2(w,S_1) + 4\alpha(w,\tilde{x}-\xi) - 2(w,S_2) + \|z-x^*\|^2 +$$
$$+\frac{\delta}{\alpha}(C_2+\|z-\xi\|)\|z-\tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{\alpha} \le \frac{1}{\alpha}(J(z)-J(\tilde{x})) + 2(J''(x^*)w, z-x^*) + \Lambda\|w\|\|\tilde{x}-x^*\|^2 +$$
$$+4\alpha(w,\tilde{x}-x^*) + 4\alpha(w, J''(x^*)w) + \|z-x^*\|^2 + 2C_3\|w\|(\sqrt{\varepsilon}+\delta) + \frac{\delta}{\alpha}(C_2+\|z-\xi\|)\|z-\tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

справедливой для любого $z \in H$. Потребуем теперь, чтобы выполнялось дополнительное условие

$$\Lambda\|w\| < 1. \tag{25}$$

Тогда

$$\|\tilde{x}-x^*\|^2 \le C_8\left(\frac{1}{\alpha}(J(z)-J(\tilde{x})) + 2(J''(x^*)w, z-x^*) + 4\alpha(w,\tilde{x}-x^*) +\right.$$
$$\left.+ 4\alpha(w, J''(x^*)w) + \|z-x^*\|^2 + 2C_3\|w\|(\sqrt{\varepsilon}+\delta) + \frac{\delta}{\alpha}(C_2+\|z-\xi\|)\|z-\tilde{x}\| + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right).$$

Положим здесь $z = x^* - 2\alpha w$ и с учетом (13), (16) получим

$$\|\tilde{x}-x^*\|^2 \le \frac{C_8}{\alpha}(J(x^*-2\alpha w)-J(\tilde{x})) + C_9\left(\alpha^2+\delta+\left(\alpha+\frac{\delta}{\alpha}\right)\|\tilde{x}-x^*\|\right). \tag{26}$$

Оценим величину $J(x^*-2\alpha w) - J(\tilde{x})$ в (26). Справедлива

Лемма 2. *Пусть выполнены соотношения* (2), (6), (9), (10), (13). *Тогда справедлива оценка*

$$J(x^*-2\alpha w) - J(\tilde{x}) \le C_{10}\alpha(\alpha^2+\delta+\alpha\|\tilde{x}-x^*\|). \tag{27}$$

Доказательство. С использованием соотношения (4) получаем

$$J(x^*-2\alpha w) - J(\tilde{x}) = (J(x^*-2\alpha w) - J(x^*)) + (J(x^*)-J(\tilde{x})) \le$$
$$\le (J'(x^*), -2\alpha w) + \frac{1}{2}(J''(x^*)(-2\alpha w), -2\alpha w) + \frac{1}{6}\Lambda(2\alpha\|w\|)^3 + (J(x^*)-J(\tilde{x})) \le \tag{28}$$
$$\le 2\alpha^2(J''(x^*)w,w) + (J(x^*)-J(\tilde{x})) + C_{11}\alpha^3.$$

Следующие рассуждения справедливы для любого самосопряженного линейного непрерывного оператора B в пространстве H. Конкретный выбор оператора B будет осуществлен позже и не будет зависеть от δ. Имеем

$$J(x^*) - J(\tilde{x}) \le J(\tilde{x} - BJ'(\tilde{x})) - J(\tilde{x}) \le -(J'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) + \frac{1}{2}(J''(\tilde{x})BJ'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) +$$
$$+\frac{1}{6}\Lambda\|B\|^3\|J'(\tilde{x})\|^3 \le -(J'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) + \frac{1}{2}(J''(x^*)BJ'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) +$$
$$+\frac{1}{2}\Lambda\|\tilde{x}-x^*\|\|B\|^2\|J'(\tilde{x})\|^2 + \frac{1}{6}\Lambda\|B\|^3\|J'(\tilde{x})\|^3.$$

В силу (13), (16) и (21), $\|J'(\tilde{x})\| \le C_{12}\alpha$, поэтому получаем

$$J(x^*) - J(\tilde{x}) \le -(J'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) + \frac{1}{2}(J''(x^*)BJ'(\tilde{x}), BJ'(\tilde{x})) + C_{13}\alpha^2(\alpha+\|\tilde{x}-x^*\|) =$$
$$= \left(J'(\tilde{x}), \left(-B+\frac{1}{2}BJ''(x^*)B\right)J'(\tilde{x})\right) + C_{13}\alpha^2(\alpha+\|\tilde{x}-x^*\|).$$

Вновь используем представление (21):

$$J(x^*) - J(\tilde{x}) \le \left(-2\alpha(\tilde{x}-\xi)+S_2, \left(-B+\frac{1}{2}BJ''(x^*)B\right)(-2\alpha(\tilde{x}-\xi)+S_2)\right) +$$
$$+C_{13}\alpha^2(\alpha+\|\tilde{x}-x^*\|) = \left(-2\alpha(x^*-\xi), \left(-B+\frac{1}{2}BJ''(x^*)B\right)(-2\alpha(x^*-\xi))\right) +$$

$$+ 2\left(-2\alpha(x^* - \xi), \left(-B + \frac{1}{2}BJ''(x^*)B\right)(-2\alpha(\tilde{x} - x^*) + S_2)\right) +$$
$$+ \left((-2\alpha(\tilde{x} - x^*) + S_2), \left(-B + \frac{1}{2}BJ''(x^*)B\right)(-2\alpha(\tilde{x} - x^*) + S_2)\right) +$$
$$+ C_{13}\alpha^2(\alpha + \|\tilde{x} - x^*\|) \le 4\alpha^2\left(x^* - \xi, \left(-B + \frac{1}{2}BJ''(x^*)B\right)(x^* - \xi)\right) +$$
$$+ C_{14}(\alpha(\alpha\|\tilde{x} - x^*\| + \delta + \sqrt{\varepsilon}) + (\alpha\|\tilde{x} - x^*\| + \delta + \sqrt{\varepsilon})^2 + \alpha^2(\alpha + \|\tilde{x} - x^*\|)) \le$$
$$\le 4\alpha^2\left(x^* - \xi, \left(-B + \frac{1}{2}BJ''(x^*)B\right)(x^* - \xi)\right) + C_{15}(\alpha^3 + \alpha^2\|\tilde{x} - x^*\| + \alpha\delta).$$

В последнем переходе мы использовали соотношения (13) и неравенство (16). Комбинируя полученную оценку с (28), получаем

$$\begin{aligned} J(x^* - 2\alpha w) - J(\tilde{x}) \le 2\alpha^2(J''(x^*)w, w) + 4\alpha^2\left(x^* - \xi, \left(-B + \frac{1}{2}BJ''(x^*)B\right)(x^* - \xi)\right) + \\ + C_{16}\alpha\left(\alpha^2 + \delta + \alpha\|\tilde{x} - x^*\|\right) = 2\alpha^2\Delta + C_{16}\alpha\left(\alpha^2 + \delta + \alpha\|\tilde{x} - x^*\|\right), \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta = (J''(x^*)w, w) + 2\left(x^* - \xi, \left(-B + \frac{1}{2}BJ''(x^*)B\right)(x^* - \xi)\right) = \left(J''(x^*)^{1/2}w, J''(x^*)^{1/2}w\right) + \\ + 2\left(J''(x^*)w, \left(-B + \frac{1}{2}BJ''(x^*)B\right)J''(x^*)w\right) = (J''(x^*)^{1/2}w, (E - 2J''(x^*)^{1/2}BJ''(x^*)^{1/2} + \\ + J''(x^*)^{1/2}BJ''(x^*)BJ''(x^*)^{1/2})J''(x^*)^{1/2}w) = \left(J''(x^*)^{1/2}w, \left(E - J''(x^*)^{1/2}BJ''(x^*)^{1/2}\right)^2 J''(x^*)^{1/2}w\right) = \\ = \left\|\left(E - J''(x^*)^{1/2}BJ''(x^*)^{1/2}\right)J''(x^*)^{1/2}w\right\|^2 = \left\|J''(x^*)^{1/2}w - J''(x^*)^{1/2}B(x^* - \xi)\right\|^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Если $x^* = \xi$, то условие (6), а значит, и все дальнейшие выводы из него, справедливы с $w = 0_H$, поэтому $\Delta = 0$ в (30). Предположим, что $x^* \neq \xi$. Отметим, что все последние рассуждения справедливы для любого самосопряженного оператора $B \in L(H)$. Подберем его теперь так, чтобы $B(x^* - \xi) = w$, что опять же влечет $\Delta = 0$ в (30). Если $(x^* - \xi, w) \neq 0$, то подходит оператор B, заданный формулой $Bx = \dfrac{(x, w)}{(x^* - \xi, w)}w$, а если $(x^* - \xi, w) = 0$ – то заданный формулой

$$Bx = x - \frac{(x, x^* - \xi - w)}{\|x^* - \xi\|^2}(x^* - \xi - w).$$

Теперь из (29) следует оценка (27). Лемма доказана.

3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА ТИХОНОВА

Перейдем теперь к получению искомой оценки точности метода Тихонова. Подставим (27) в (26):

$$\|\tilde{x} - x^*\|^2 \le C_{17}\left(\alpha^2 + \delta + \left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha}\right)\|\tilde{x} - x^*\|\right). \tag{31}$$

Заметим, что для любого $\epsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha}\right)\|\tilde{x} - x^*\| \le \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha}\right)^2}{\epsilon^2} + \epsilon^2\|\tilde{x} - x^*\|^2\right).$$

Комбинируя его с (31) и выбирая ϵ так, чтобы $\frac{1}{2}C_{17}\epsilon^2 < 1$, приходим к оценке

$$\|\tilde{x} - x^*\|^2 \le C_{18}\left(\alpha^2 + \delta + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right). \tag{32}$$

Наконец, выберем

$$\alpha(\delta) = K_1\delta^{1/2}, \quad \varepsilon(\delta) = K_2\delta^2 \tag{33}$$

с произвольными $K_1, K_2 > 0$. Отметим, что эти зависимости удовлетворяют соотношениям (13). Приходим к окончательной оценке

$$\|\tilde{x} - x^*\| \le C_{19}\delta^{1/2}. \tag{34}$$

Для сравнения, в [6], [7] установлена оценка $\|\tilde{x} - x^*\| = O(\delta^{1/4})$ в случае, если связь между точным и приближенным функционалами определяется соотношением (8). При этом рассматривался как априорный, так и апостериорный способ выбора параметра α в зависимости от уровня погрешности δ.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть вместо точного функционала J известно его приближение J_δ, выполнены условия* (2), (6), (9), (25) *и параметры α, ε в* (10) *выбираются по правилу* (33). *Тогда для точности приближения $\tilde{x}$, доставляемого методом Тихонова* (10) *в применении к задаче* (1)*, справедлива оценка* (34).

Рассмотрим теперь случай, когда известен точный функционал J и метод Тихонова имеет вид (5). Нетрудно видеть, что тогда выполнено условие (9) с $J_\delta = J$, $\delta = 0$. При отсутствии погрешности в минимизируемом функционале параметр ε в методе Тихонова следует выбирать в зависимости от значения α. В соответствии с условием (13) примем $\varepsilon(\alpha) = K_3\alpha^4$ с произвольным $K_3 > 0$. При этом все проведенные здесь рассуждения вплоть до (32) остаются справедливыми, а сама оценка (32) принимает вид

$$\|x_{\alpha,\varepsilon} - x^*\| \le C_{20}\alpha. \tag{35}$$

Если же функционал J слабо полунепрерывен снизу, можно положить $\varepsilon = 0$ в (5) и получить оценку

$$\|x_\alpha - x^*\| \le C_{20}\alpha \tag{36}$$

для $x_\alpha = \operatorname*{argmin}_{x\in H} T_\alpha(x)$. Тем самым, доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2), (6), (25). *Тогда при выборе параметра ε в методе Тихонова* (5) *с точно заданным функционалом J по правилу $\varepsilon(\alpha) = K_3\alpha^4$, $K_3 > 0$ справедлива оценка* (35). *Если, кроме того, функционал J слабополунепрерывен снизу, то для точки x_α, доставляющей глобальный минимум функционалу Тихонова T_α, справедлива оценка* (36).

Подчеркнем, что теорема 2 относится к случаю точно заданного функционала J и не связана с введенным в настоящей статье предположением (9). Установленные в этой теореме оценки ранее были известны только при условии выпуклости функционала J или при наложении структурного условия на его нелинейность. Теорема 2 усиливает оценку $\|x_\alpha - x^*\| = O(\alpha^{1/2})$, полученную в [6] без использования подобных условий. Кроме того, теоремы 1 и 2 усиливают результаты, полученные в [4], в случае, когда показатель истокопредставимости равен $p = 1$. А именно, в [4] получены те же самые оценки (34) и (36), что и в настоящей статье, однако мы при доказательстве теоремы 1 накладываем на погрешность функционала J только условие (9), а в [4] используются сразу оба условия (8), (9) и еще структурное условие на нелинейность. Отметим также, что в [4] доказана невозможность существенного улучшения обсуждаемых оценок точности метода Тихонова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачёв В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011.
2. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
3. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
4. *Кокурин М.Ю.* Необходимые и достаточные условия степенной сходимости приближений в схеме Тихонова для решения некорректных экстремальных задач // Известия вузов. Математика. 2017. № 6. С. 60–69.
5. *Tautenhahn U.* On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill–posed problems // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. 191–207.
6. *Кокурин М.Ю.* Оценки скорости сходимости в схеме Тихонова для решения некорректных невыпуклых экстремальных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 7. С. 1103–1112.
7. *Kokurin M.Y.* Source conditions and accuracy estimates in Tikhonov’s scheme of solving ill–posed nonconvex optimization problems // J. of Inverse and Ill–Posed Problems. 2018. V. 26. № 4. P. 463–475.
8. *Schuster T., Kaltenbacher B., Hofmann B., Kazimierski K.* Regularization Methods in Banach Spaces // Radon Series on Computational and Applied Mathematics. 2012.
9. *Anzengruber S.W., Ramlau R.* Morozov’s discrepancy principle for Tikhonov-type functionals with nonlinear operators // Inverse Problems. 2010. V. 26. № 2. 025001.
10. *Zhong M., Wang W.* A global minimization algorithm for Tikhonov functionals with p-convex ($p \geq 2$) penalty terms in Banach spaces // Inverse Problems. 2016. V. 32. № 10. 104008.