

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.95

**ПРЯМАЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО ОТЫСКАНИЮ ИСТОЧНИКА**

© 2023 г. К. Б. Сабитов^{1,2,*}

¹ 450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112, Институт математики
с вычислительным центром УФИЦ РАН, Россия

² 453103 Стерлитамак, пр-т Ленина, 49, Стерлитамакский филиал
Уфимского университета науки и технологий, Россия

*e-mail: sabitov_fmj@mail.ru

Поступила в редакцию 05.02.2021 г.
Переработанный вариант 17.11.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

В работе для уравнения колебаний прямоугольной пластинки изучены начально-граничная и обратные задачи по отысканию правой части (источника колебаний). Решения задач построены в явном виде как суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования. При обосновании существования решения обратной задачи по определению сомножителя правой части, зависящей от пространственных координат, возникает проблема малых знаменателей от двух натуральных переменных, в связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили доказать существование решения этой задачи в классе регулярных решений, накладывая определенные условия гладкости на данные граничные функции. Библиография: 21.

Ключевые слова: уравнение колебаний прямоугольной пластины, начально-граничная и обратные задачи, интегральное уравнение Вольтерра, единственность, ряд, малые знаменатели, существование.

DOI: 10.31857/S0044466923040142, **EDN:** IVVXNL

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Поперечные колебания тонкой однородной прямоугольной пластины толщины h , при этом толщина ее полагается малой по сравнению с другими размерами, со сторонами p и q , описывается дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка [1, с. 394]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u = F(x, y, t), \quad (1)$$

где $\alpha^2 = EJ/(\rho h)$, EJ – жесткость пластинки, ρ – плотность пластинки, E – модуль упругости материала, J – момент инерции, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $F(x, y, t)$ – непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу площади пластинки, $u(x, y, t)$ – смещение точки (x, y) пластинки в момент времени t .

Отметим, что многие задачи о колебаниях мембран, пластинок и оболочек имеют важное прикладное значение в строительной механике, машиностроении, авиастроении, судостроении, ядерных энергетических установках и т.д. Во многих случаях использование пластин связано с условиями закрепления на отдельных участках их контура. Такие задачи изучены в известных работах [2, с. 444–449], [3, с. 132–133], [4, с. 35–69] и многих других.

Рассмотрим уравнение (1) в области

$$Q = D \times (0, T), \quad \text{где} \quad D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

здесь p и q отмечены выше, размеры пластинки, T – заданная положительная постоянная, и поставим следующие задачи.

Задача 1. Найти определенную в области Q функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y, t) \in C_{xy,t}^{4,2}(\bar{Q}); \quad (2)$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q; \tag{3}$$

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u_{xx}(0, y, t) = u(p, y, t) = u_{xx}(p, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0, t) = u_{yy}(x, 0, t) = u(x, q, t) = u_{yy}(x, q, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq t \leq T; \end{aligned} \tag{4}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \tag{5}$$

где $F(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Здесь граничные условия (4) означают, что все стороны пластинки подперты, т.е. свободно могут двигаться вокруг точек закрепления.

Задача 2. Пусть $F(x, y, t) = f(x, y)g(t)$. Найти функции $u(x, y, t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условиям (2)–(5), и, кроме того,

$$g(t) \in C[0, T]; \tag{6}$$

$$u(x_0, y_0, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{7}$$

где $f(x, y)$ и $h(t)$ – заданные достаточно гладкие функции, (x_0, y_0) – заданная точка из области D .

Задача 3. Пусть $F(x, y, t) = f(x, y)g(t)$. Найти пару функций $u(x, y, t)$ и $f(x, y)$, удовлетворяющих условиям (2)–(5) и, кроме того,

$$f(x, y) \in C(\bar{D}); \tag{8}$$

$$u(x, y, t_0) = \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \tag{9}$$

где $g(t)$ и $\varphi_0(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, t_0 – заданная точка из полуинтервала $(0, T]$.

Из постановок этих задач видно, что задача 1 представляет собой прямую начально-граничную задачу для неоднородного уравнения колебаний прямоугольной пластинки. Задачи 2 и 3 являются обратными, поэтому здесь условия (7) и (9) являются дополнительными для определения сомножителей $g(t)$ и $f(x, y)$ правой части $F(x, y, t)$ уравнения (1).

Данная работа является продолжением исследований автора [5–9], посвященных обоснованию корректности постановки начально-граничных и обратных задач для одномерного уравнения балки. Постановка обратных задач 2 и 3 исходит из работ [10–15], где аналогичные задачи изучены для уравнений теплопроводности, струны и операторных уравнений. Решения поставленных задач построены в явном виде как суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений. Отметим, что при обосновании сходимости рядов, представляющих решение задачи 3, возникает проблема малых знаменателей [16], [17], которая создает дополнительные трудности. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой. На основе этой оценки обоснована сходимость рядов в классе регулярных решений уравнения (1).

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ 1

2.1. Энергетическое неравенство. Единственность решения

Теорема 1. Если существует решение начально-граничной задачи (2)–(5), то при любом $t \in [0, T]$ для решения справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \iint_D [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy \leq \\ & \leq e^T \left[\iint_D [\psi^2 + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)] dx dy + \iiint_Q F^2(x, y, t) dx dy dt \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что интеграл

$$E_0(t) = \frac{1}{2} \iint_D [\rho h u_t^2 + EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy = \rho h \frac{1}{2} \iint_D [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy = \rho h E(t)$$

представляет собой закон сохранения энергии свободных колебаний однородной пластинки при нулевых граничных условиях (4).

Действительно, кинетическая энергия движущейся пластинки состоит из поступательного движения элемента $dx dy$ параллельно смещению $u(x, y, t)$ и определяется интегралом

$$K(t) = \frac{1}{2} \iint_D \rho h u_t^2 dx dy,$$

где ρh есть масса единицы площади пластинки.

Потенциальная энергия колебаний пластинки зависит от жесткости EJ при изгибе и находится интегралом [2, с. 446]

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \iint_D EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2) dx dy.$$

Следовательно, интеграл $E_0(t) = K(t) + \Pi(t)$ представляет собой полную энергию свободных поперечных колебаний пластинки.

Доказательство теоремы. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} u_t Lu = & \frac{1}{2} [u_t^2 + \alpha^2 (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)]_t' + \alpha^2 (u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty} u_{xy})_x' + \\ & + \alpha^2 (u_t u_{yyy} - u_{ty} u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx} u_{xy})_y' \end{aligned}$$

и интегрируя его по области

$$Q_\tau = Q \cap \{t < \tau\}, \quad 0 < \tau \leq T,$$

будем иметь

$$E(\tau) - E(0) + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \iiint_{Q_\tau} F u_t dx dy dt, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \alpha^2 \iint_{S_1} (u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty} u_{xy}) dy dt, \\ J_2 &= \alpha^2 \iint_{S_2} (u_t u_{yyy} - u_{ty} u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx} u_{xy}) dx dt, \\ J_3 &= \alpha^2 \iint_{S_3} (u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty} u_{xy}) dy dt, \\ J_4 &= \alpha^2 \iint_{S_4} (u_t u_{yyy} - u_{ty} u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx} u_{xy}) dx dt, \end{aligned}$$

$S_i, i = \overline{1, 4}$ – грани параллелепипеда Q_τ , лежащие соответственно на плоскостях $x = p, y = q, x = 0, y = 0$.

Пусть выполнены граничные условия (4), т.е. $u = u_{xx} = 0$ при $x = 0$ и $x = p$, и $u = u_{yy} = 0$ при $y = 0$ и $y = q$. Тогда $u_t = u_y = u_{ty} = 0$ при $x = 0$ и $x = p$, поэтому интегралы $J_1 = J_3 = 0$. Аналогично $u_t = u_x = u_{tx} = 0$ при $y = 0$ и $y = q$, в силу чего, интегралы $J_2 = J_4 = 0$.

Тогда из равенства (11) следует, что

$$E(\tau) \leq E(0) + \frac{1}{2} \iiint_{Q_\tau} F^2(x, y, t) dx dy dt + \frac{1}{2} \iiint_{Q_\tau} u_t^2 dx dy dt = A + \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \iint_D u_t^2 dx dy \leq A + \int_0^\tau E(t) dt, \quad (12)$$

где

$$A = E(0) + \frac{1}{2} \iiint_{Q_\tau} F^2(x, y, t) dx dy dt.$$

Отсюда, следуя [18, с. 77], получим

$$A + \int_0^T E(t)dt \leq Ae^T. \tag{13}$$

Тогда из неравенств (12), (13) следует оценка (10).

Следствие 1. Если в условиях теоремы 1 правая часть $F(x, y, t)$ уравнения (1) равна нулю, то при любом $t \in [0, T]$ справедливо равенство

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \iint_D [\Psi^2(x, y) + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)] dx dy, \tag{14}$$

т.е. равенство (14) означает, что полная энергия собственных колебаний однородной пластины остается в течение всего процесса колебаний постоянной и равной ее начальной энергии.

Справедливость равенства (14) следует из соотношения (11).

Следствие 2 (теорема единственности). Если существует решение задачи (2)–(5), то оно единственно.

Доказательство. Пусть существуют две функции $u_1(x, y, t)$ и $u_2(x, y, t)$, удовлетворяющие условиям следствия 2. Тогда их разность $u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t) = u(x, y, t)$ принадлежит классу (2), удовлетворяет однородному уравнению $Lu \equiv 0$ в Q , нулевым начальным условиям $u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) \equiv 0$ и граничным условиям (4). Для такого решения из равенства (14) имеем

$$E(t) = \frac{1}{2} \iint_Q [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy = 0$$

при любом $t \in [0, T]$. Данное равенство возможно только тогда, когда $u_t \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$, $u_{xy} \equiv 0$ и $u_{yy} \equiv 0$ в области Q . Из этих условий следует, что $u(x, y, t) = ax + by + c$, где a, b и c – произвольные постоянные. По условию эта функция должна удовлетворять одному из граничных условий (4) и нулевым начальным условиям. Из граничных условий (4) следует, что $a = b = c = 0$. Следовательно, $u(x, y, t) \equiv 0$ в \bar{Q} .

2.2. Колебания пластины, шарнирно опирающейся на все края

Разделяя переменные $u(x, y, t) = v(x, y)f(t)$ в уравнении (1) при $F(x, y, t) \equiv 0$, относительно функции $v(x, y)$ получим следующую спектральную задачу:

$$\Delta(\Delta v) + \lambda^2 v = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} v(0, y) = u_{xx}(0, y) = v(p, y) = v_{xx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \\ v(x, 0) = v_{yy}(x, 0) = v(x, q) = v_{yy}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p. \end{aligned} \tag{16}$$

В качестве решения спектральной задачи (15), (16) возьмем функции

$$v_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}, \tag{17}$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{p}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2, \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Отметим, что система собственных функций (17) задачи (15), (16) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(D)$ и образует там базис.

Следуя работам [5], [6], введем функции

$$u_{mn}(t) = \iint_D u(x, y, t) v_{mn}(x, y) dx dy, \tag{19}$$

где $u(x, y, t)$ – решение начально-граничной задачи (2)–(5).

Дифференцируя равенство (19) дважды по $t \in (0, T)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$u_{mn}''(t) = \iint_D F(x, y, t)v_{mn}(x, y)dxdy - \alpha^2 \iint_D (u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy})v_{mn}(x, y)dxdy. \quad (20)$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий (4) и (16), будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_D u_{xxxx}v_{mn}(x, y)dxdy &= \left(\frac{m\pi}{p}\right)^4 u_{mn}(t), \\ \iint_D u_{yyyy}v_{mn}(x, y)dxdy &= \left(\frac{n\pi}{q}\right)^4 u_{mn}(t), \\ \iint_D u_{xxyy}v_{mn}(x, y)dxdy &= \left(\frac{m\pi}{p}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2 u_{mn}(t). \end{aligned}$$

Подставляя значения этих интегралов в равенство (20), получим

$$u_{mn}''(t) - \alpha^2 \lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) = F_{mn}(t), \quad (21)$$

здесь

$$F_{mn}(t) = \iint_D F(x, y, t)v_{mn}(x, y)dxdy. \quad (22)$$

Общее решение дифференциального уравнения (21) находится по формуле

$$u_{mn} = a_{mn} \cos \alpha \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \alpha \lambda_{mn} t + \frac{1}{\alpha \lambda_{mn}} \int_0^t F_{mn}(s) \sin[\alpha \lambda_{mn}(t-s)] ds, \quad (23)$$

где a_{mn} и b_{mn} — произвольные постоянные. Для определения неизвестных a_{mn} и b_{mn} воспользуемся начальными условиями (5) и формулой (19):

$$u_{mn}(0) = \iint_D u(x, y, 0)v_{mn}(x, y)dxdy = \iint_D \varphi(x, y)v_{mn}(x, y)dxdy = \varphi_{mn}, \quad (24)$$

$$u_{mn}'(0) = \iint_D u_t(x, y, 0)v_{mn}(x, y)dxdy = \iint_D \psi(x, y)v_{mn}(x, y)dxdy = \psi_{mn}. \quad (25)$$

Удовлетворив функции (23) начальным условиям (24) и (25), найдем

$$a_{mn} = \varphi_{mn}, \quad b_{mn} = \frac{\psi_{mn}}{\alpha \lambda_{mn}}.$$

Подставляя найденные значения a_{mn} и b_{mn} в формулу (23), получим явный вид функций

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t + \tilde{F}_{mn}(t), \quad (26)$$

где

$$\tilde{F}_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t F_{mn}(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds, \quad \omega_{mn} = \alpha \lambda_{mn}. \quad (27)$$

На основании частных решений (26) и (17) решение задачи (2)–(5) можно определить в виде суммы ряда Фурье:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mn}(x, y). \quad (28)$$

В дальнейшем правую часть $F(x, y, t)$ уравнения (1) представим в виде: $F(x, y, t) = f(x, y)g(t)$, так как в задачах 2 и 3 используется такое представление. Тогда функции (22) и (26) принимают вид:

$$F_{mn}(t) = f_{mn}g(t), \tag{29}$$

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} \cos \omega_{mn}t + \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn}t + f_{mn}g_{mn}(t), \tag{30}$$

где

$$f_{mn} = \iint_D f(x, y)v_{mn}(x, y)dxdy, \tag{31}$$

$$g_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t g(s) \sin[\omega_{mn}(t - s)]ds. \tag{32}$$

Лемма 1. При любом $t \in [0, t]$ справедливы оценки

$$|u_{mn}(t)| \leq C_1 \left(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |\Psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |f_{mn}| \|g\|_{L_2(0,T)} \right), \tag{33}$$

$$|u''_{mn}(t)| \leq C_2 (\lambda_{mn}^2 |\varphi_{mn}| + \lambda_{mn} |\Psi_{mn}| + \lambda_{mn} |f_{mn}| \|g\|_{L_2(0,T)}), \tag{34}$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, p, q и T .

Справедливость оценок (33) и (34) следует из формул (26), (27) и (29).

Формально из ряда (28) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn}(t)v_{mn}(x, y), \tag{35}$$

$$u_{xxxx} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{m\pi}{p} \right)^4 v_{mn}(x, y), \tag{36}$$

$$u_{yyyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{n\pi}{q} \right)^4 v_{mn}(x, y), \tag{37}$$

$$u_{xxyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{m\pi}{p} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{q} \right)^2 v_{mn}(x, y). \tag{38}$$

Ряды (28), (35)–(38) при любых $(x, y, t) \in \bar{Q}$ на основании леммы 1 мажорируются рядом

$$C_3 \sum_{m,n=1}^{\infty} (\lambda_{mn}^2 |\varphi_{mn}| + \lambda_{mn} |\Psi_{mn}| + \lambda_{mn} |f_{mn}| \|g\|_{L_2(0,T)}). \tag{39}$$

Лемма 2. Если $\varphi(x, y) \in C^6(\bar{D})$, $\varphi(0, y) = \varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xxxx}(0, y) = \varphi(p, y) = \varphi_{xx}(p, y) = \varphi_{xxxx}(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $\varphi(x, 0) = \varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yyyy}(x, 0) = \varphi(x, q) = \varphi_{yy}(x, q) = \varphi_{yyyy}(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$; $\psi(x, y) \in C^4(\bar{D})$, $\psi(0, y) = \psi_{xx}(0, y) = \psi(p, y) = \psi_{xx}(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $\psi(x, 0) = \psi_{yy}(x, 0) = \psi(x, q) = \psi_{yy}(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $f(x, y) \in C^4(\bar{D})$, $f(0, y) = f_{xx}(0, y) = f(p, y) = f_{xx}(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $f(x, 0) = f_{yy}(x, 0) = f(x, q) = f_{yy}(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $g(t) \in C(0, T) \cap L_2(0, T)$, то справедливы представления:

$$\begin{aligned} \varphi_{mn} = & \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-6} (|\varphi_{mn}^{(6,0)}| + 6|\varphi_{mn}^{(5,1)}| + 15|\varphi_{mn}^{(4,2)}| + 20|\varphi_{mn}^{(3,3)}| + \\ & + 15|\varphi_{mn}^{(2,4)}| + 6|\varphi_{mn}^{(1,5)}| + |\varphi_{mn}^{(0,6)}|) = \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-6} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 6 \\ i+j=6}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}|; \end{aligned} \tag{40}$$

$$\Psi_{mn} = \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-4} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 4 \\ i+j=4}} |\Psi_{mn}^{(i,j)}| \quad (41)$$

$$f_{mn} = \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-4} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 4 \\ i+j=4}} |f_{mn}^{(i,j)}| \quad (42)$$

где $\varphi_{mn}^{(i,j)}$, $\Psi_{mn}^{(i,j)}$, $f_{mn}^{(i,j)}$ – коэффициенты Фурье соответствующих производных

$$\frac{\partial^{i+j} \varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \frac{\partial^{i+j} \Psi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j},$$

по системам функций $\frac{\partial^{i+j} v_{mn}(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}$, при этом следующие ряды сходятся:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\varphi_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \iint_D \left(\frac{\partial^6 \varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy, \quad i + j = 6, \quad (43)$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\Psi_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \iint_D \left(\frac{\partial^4 \Psi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy, \quad i + j = 4, \quad (44)$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \iint_D \left(\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy, \quad i + j = 4. \quad (45)$$

Доказательство. Следуя аналогично работе [19, с. 335], интегрируя по частям в интегралах формул (24), (25), (22), получим искомые представления (40)–(42), а оценки (43)–(45) являются аналогами неравенств Бесселя для двойных рядов Фурье.

На основании леммы 2 обоснуем сходимость ряда (39). Из равенства (18) следует, что

$$\left(\frac{\pi}{l_M} \right)^2 (m^2 + n^2) \leq \lambda_{mn} \leq \left(\frac{\pi}{l_m} \right)^2 (m^2 + n^2), \quad l_m = \min\{p, q\}; \quad \frac{1}{\left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right)^2} \leq \frac{l_M^2}{(m+n)^2}, \quad l_M = \max\{p, q\}. \quad (46)$$

Тогда ряд (39) мажорируется рядом

$$C_4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^2} \left[\sum_{\substack{i+j=6 \\ 0 \leq i, j \leq 6}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}| + \sum_{\substack{i+j=4 \\ 0 \leq i, j \leq 4}} |\Psi_{mn}^{(i,j)}| + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 4 \\ i+j=4}} |f_{mn}^{(i,j)}| \right],$$

который в силу сходимости рядов (43)–(45) и неравенства

$$\frac{1}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4mn} < \frac{1}{mn}$$

сходится при любом $t \in [0, T]$. Отсюда следует, что ряды (28), (35)–(38) сходятся равномерно на \bar{Q} . Тогда сумма ряда (28) удовлетворяет всем условиям задачи (2)–(5).

Следовательно, нами доказана следующая

Теорема 2. Если функции $\varphi(x, y)$, $\Psi(x, y)$, $f(x, y)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то существует единственное решение задачи (2)–(5), которое определяется суммой ряда (28).

Теперь установим устойчивость решения поставленной задачи от начальных функций $\varphi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ и правой части $F(x, y, t)$.

Теорема 3. Для решения (28) задачи (2)–(5) имеют место оценки:

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(D)} \leq C_5 (\|\varphi(x, y)\|_{L_2(D)} + \|\Psi(x, y)\|_{L_2(D)} + \|F(x, y, t)\|_{L_2(Q)}), \quad (47)$$

$$\|u(x, y, t)\|_{C(\bar{Q})} \leq C_6 (\|\varphi(x, y)\|_{C^2(\bar{D})} + \|\Psi(x, y)\|_{C(\bar{D})} + \|F(x, y, t)\|_{C(\bar{Q})}). \quad (48)$$

Доказательство. Поскольку система (17) ортонормирована в $L_2(D)$, то из формулы (28) на основании оценки (33) получим

$$\begin{aligned} \|u(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}^2(t) \leq 3C_1^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(|\varphi_{mn}|^2 + \frac{1}{\lambda_{mn}^2} |\psi_{mn}|^2 + \frac{1}{\lambda_{mn}^2} |f_{mn}|^2 \|g\|_{L_2(0,T)}^2 \right) = \\ &= 3C_1^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} (|\varphi_{mn}|^2 + |\psi_{mn}|^2 + |f_{mn}|^2 \|g\|_{L_2(0,T)}^2) \leq 3C_1^2 (\|\varphi(x, y)\|_{L_2(D)}^2 + \|\psi(x, y)\|_{L_2(D)}^2 + \|F(x, y, t)\|_{L_2(Q)}^2). \end{aligned}$$

Отсюда и получим оценку (47).

Пусть (x, y, t) – произвольная точка из \bar{Q} . Тогда из (28) с учетом оценки (33) имеем

$$|u(x, y, t)| \leq \frac{2C_1}{\sqrt{pq}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |\psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |f_{mn}| \|g\|_{L_2(0,T)} \right). \tag{49}$$

По условию коэффициент φ_{mn} можно представить

$$|\varphi_{mn}| = \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-2} (|\varphi_{mn}^{(2,0)}| + 2|\varphi_{mn}^{(1,1)}| + |\varphi_{mn}^{(0,2)}|) = \left[\pi \left(\frac{m}{p} + \frac{n}{q} \right) \right]^{-2} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ i+j=2}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}|. \tag{50}$$

Тогда из неравенства (49) с учетом (50) и (46) и используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |u(x, y, t)| &\leq \tilde{C}_1 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(m+n)^2} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ i+j=2}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}| + \frac{1}{m^2+n^2} |\psi_{mn}| + \frac{1}{m^2+n^2} |f_{mn}| \|g\|_{L_2(0,T)} \right] \leq \\ &\leq \tilde{C}_1 \left[\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^4} \right)^{1/2} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ i+j=2}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}| \right)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}|^2 \right)^{1/2} + \right. \\ &+ \left. \|g\|_{L_2(0,T)} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}|^2 \right)^{1/2} \right] \leq \tilde{C}_2 \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ i+j=2}} \left\| \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{L_2(D)} + \|\psi(x, y)\|_{L_2(D)} + \|F(x, y, t)\|_{L_2(Q)} \right) \leq \\ &\leq C_6 (\|\varphi(x, y)\|_{C^2(\bar{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C(\bar{D})} + \|F(x, y, t)\|_{C(\bar{Q})}), \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость оценки (48).

Таким образом, нами полностью доказана корректность постановки задачи (2)–(5). При этом отметим, что при доказательстве теоремы 2 существования решения задачи на начальные условия (5) наложены достаточно сильные условия гладкости. Если ввести понятие обобщенного решения этой задачи, то эти условия можно значительно ослабить.

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 2

На основе прямой задачи исследуем задачу 2 по отысканию пары функций $u(x, y, t)$ и $g(t)$.

Для этого удовлетворим функцию (28) граничному условию (7):

$$u(x_0, y_0, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x_0, y_0) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{51}$$

Заменив в (51) функцию $u_{mn}(t)$ ее выражением (30), получим интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t g(s) K(t, s) ds = \tilde{h}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{52}$$

здесь

$$K(t, s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}}{\omega_{mn}} \sin[\omega_{mn}(t-s)] v_{mn}(x_0, y_0), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (53)$$

$$\tilde{h}(t) = h(t) - \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \right) v_{mn}(x_0, y_0). \quad (54)$$

В силу условий теоремы 1 функция $f(x, y)$ должна удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} f(x, y) \in C^4(\bar{D}), \quad f(0, y) = f_{xx}(0, y) = f(x, y) = f_{xx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q; \\ f(x, 0) = f_{yy}(x, 0) = f(x, q) = f_{yy}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p. \end{aligned} \quad (55)$$

В силу условий (55) ряд (53) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по t первого и второго порядков, сходятся равномерно на $0 \leq s \leq t \leq T$, поэтому функции $K(t, s)$, $K_t(t, s)$ и $K_{tt}(t, s)$ непрерывны на указанном множестве.

Если функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то ряд в правой части равенства (54) равномерно сходится на $[0, T]$ и допускает там почленное дифференцирование по t дважды. Следовательно, при условии $h(t) \in C^2[0, T]$ функция $\tilde{h}(t)$ также принадлежит $C^2[0, T]$.

Теперь, продифференцировав интегральное уравнение (52) по t , получим

$$K(t, t)g(t) + \int_0^t g(s) \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} ds = \tilde{h}'(t). \quad (56)$$

Из равенства (53) следует, что $K(t, t) \equiv 0$. Тогда, дифференцируя уравнение (56) еще раз по t , будем иметь

$$\left. \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} \right|_{s=t} g(t) + \int_0^t g(s) \frac{\partial K^2(t, s)}{\partial t^2} ds = \tilde{h}''(t). \quad (57)$$

На основании соотношения (53) вычислим

$$\left. \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} \right|_{s=t} = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} v_{mn}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0). \quad (58)$$

Отсюда видно, что если $f(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение (57) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра II рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Следовательно, интегральное уравнение (57), стало быть, и интегральное уравнение (52), имеют единственное решение $g(t)$ в классе $C[0, T]$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям (55), $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(0) = \varphi(x_0, y_0)$, $h'(0) = \psi(x_0, y_0)$. Тогда, если $f(x_0, y_0) \neq 0$, то задача (2)–(7) имеет единственное решение. Это решение определяется по формуле (28), в которой функция $g(t)$ находится из интегрального уравнения (57).

Теперь выясним, насколько существенно условие $f(x_0, y_0) \neq 0$ в теореме 4. Пусть при некоторых $m = m_0$, $\tilde{x}_0 = x_0/p \in (0, 1)$ или $n = n_0$, $\tilde{y}_0 = y_0/q \in (0, 1)$ выполняется равенство

$$\sin \frac{m_0 \pi x_0}{p} = \sin m_0 \pi \tilde{x}_0 = 0 \quad \text{или} \quad \sin \frac{n_0 \pi y_0}{q} = \sin n_0 \pi \tilde{y}_0 = 0.$$

Ясно, что такие \tilde{x}_0 и \tilde{y}_0 существуют. Пусть выполнено первое из этих равенств. Тогда для функции $f(x, y) = \sin \frac{m_0 \pi x}{p} \sin \frac{n \pi y}{q}$ при любой функции $g(t) \in C[0, T]$ существует ненулевое решение задачи 2 (где $\varphi(x, y) = \psi(x, y) \equiv 0$)

$$u_{m_0 n}(x, y, t) = \sin \frac{m_0 \pi x}{p} \sin \frac{n \pi y}{q} \frac{1}{\omega_{m_0 n}} \int_0^t g(s) \sin[\omega_{m_0 n}(t-s)] ds.$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 3

Решение (28) прямой задачи 1 удовлетворим граничному условию (9). Тогда получаем уравнение

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t_0)v_{mn}(x,y) = \varphi_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{0mn}v_{mn}(x,y), \tag{59}$$

здесь

$$\varphi_{0mn} = \iint_D \varphi_0(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy, \tag{60}$$

а $u_{mn}(t_0)$ определяется равенством (30), где коэффициенты f_{mn} пока неизвестны и подлежат нахождению. Из уравнения (59) найдем

$$f_{mn} = \frac{1}{g_{mn}(t_0)} \left(\varphi_{0mn} - \varphi_{mn} \cos \omega_{mn}t - \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn}t \right), \tag{61}$$

при условии, что при всех $m, n \in \mathbb{N}$

$$g_{mn}(t_0) \neq 0, \tag{62}$$

где $g_{mn}(t)$ определяется по формуле (32).

Подставляя (61) в равенство (30), построим в явном виде функции

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} \cos \omega_{mn}t + \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn}t + \frac{g_{mn}(t)}{g_{mn}(t_0)} \left(\varphi_{0mn} - \varphi_{mn} \cos \omega_{mn}t_0 - \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn}t_0 \right). \tag{63}$$

Тогда решение задачи 3 определится как сумма рядов

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mn}(x,y), \tag{64}$$

$$f(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}v_{mn}(x,y), \tag{65}$$

где коэффициенты $u_{mn}(t)$ и f_{mn} находятся соответственно формулами (63) и (61).

Теперь докажем единственность решения задачи. Пусть $\varphi(x,y) = \psi(x,y) = \varphi_0(x,y) \equiv 0$ и выполнены условия (62) при всех $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда из равенств (24), (25), (60), (61) и (63) следует, что $u_{mn}(t) \equiv 0$ и $f_{mn} \equiv 0$. Отсюда в силу равенств (19) и (31) получаем, что при всех $t \in [0, T]$ и $m, n \in \mathbb{N}$

$$\iint_D u(x,y,t)v_{mn}(x,y)dxdy = 0, \quad \iint_D f(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy = 0.$$

Эти равенства в силу полноты системы функций (17) в пространстве $L_2(D)$ означают, что $u(x,y,t) = 0$ почти всюду на \bar{D} при любом $t \in [0, T]$ и $f(x,y) = 0$ почти всюду на \bar{D} . Отсюда в силу условий (2) и (8) следует, что $u(x,y,t) \equiv 0$ в \bar{Q} и $f(x,y) \equiv 0$ в \bar{D} при любой непрерывной на $[0, T]$ функции $g(t)$.

Если при некоторых t_0 , $m = m_0$ или $n = n_0$ выражение $g_{m_0n}(t_0) = 0$ или $g_{mn_0}(t_0) = 0$, то однородная задача 3 (где $\varphi(x,y) = \psi(x,y) = \varphi_0(x,y) \equiv 0$) при любой непрерывной функции $g(t)$ имеет ненулевое решение

$$u(x,y,t) = f_{m_0n}g_{m_0n}(t)v_{m_0n}(x,y), \quad f(x,y) = f_{m_0n}v_{m_0n}(x,y),$$

где $f_{m_0n} \neq 0$ – произвольная постоянная.

Теперь возникает вопрос о существовании нулей функций $g_{mn}(t_0)$. Пусть функция $g(s)$ монотонная на $[0, t_0]$. Тогда на основании второй теоремы о среднем имеем

$$\begin{aligned} \omega_{mn}g_{mn}(t_0) &= g(0)\int_0^{\xi} \sin[\omega_{mn}(t_0 - s)]ds + g(t_0)\int_{\xi}^{t_0} \sin[\omega_{mn}(t_0 - s)]ds = \\ &= \frac{g(0)}{\omega_{mn}}[\cos \omega_{mn}(t_0 - \xi) - \cos \omega_{mn}t_0] + \frac{g(t_0)}{\omega_{mn}}[1 - \cos \omega_{mn}(t_0 - \xi)] = \\ &= \frac{\cos \omega_{mn}(t_0 - \xi)}{\omega_{mn}}[g(0) - g(t_0)] + \frac{g(t_0)}{\omega_{mn}} - \frac{g(0)}{\omega_{mn}} \cos \omega_{mn}t_0, \quad 0 < \xi < t_0. \end{aligned} \quad (66)$$

Теперь уточним монотонность функции $g(s)$ на $[0, t_0]$. Пусть она возрастающая и неотрицательная. Тогда $g(t_0) = g(0) + \alpha$, $\alpha \geq 0$. Тогда из равенства (66) получим

$$\begin{aligned} \omega_{mn}g_{mn}(t_0) &= \frac{g(0)}{\omega_{mn}}(1 - \cos \omega_{mn}t_0) + \frac{\alpha}{\omega_{mn}}(1 - \cos \omega_{mn}(t_0 - \xi)) \geq \\ &\geq \frac{g(0)}{\omega_{mn}}(1 - \cos \omega_{mn}t_0) = \frac{2g(0)}{\omega_{mn}} \sin^2 \frac{\omega_{mn}t_0}{2}. \end{aligned} \quad (67)$$

Отсюда видно, что при $g(s) = \text{const} \neq 0$

$$g_{mn}(t_0) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\omega_{mn}t_0}{2} = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{\pi k}{\alpha \lambda_{mn}} \quad k, m, n \in \mathbb{N},$$

т.е. при этих значениях t_0 нарушается единственность решения задачи 3.

Следовательно, нами установлен критерий единственности решения задачи 3.

Теорема 5. Если существует решение задачи 3, то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех $m, n \in \mathbb{N}$ выполнены условия (62).

Поскольку выражение $g_{mn}(t_0)$ может иметь счетное множество нулей, то возникает проблема малых знаменателей [16], [17], [18, с. 112–118] и поэтому необходимо установить оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой.

Выражение $\sin(\omega_{mn}t_0/2)$ представим в следующем виде:

$$\sin \frac{\omega_{mn}t_0}{2} = \sin \pi N^2 v_{mn}, \quad N = \max\{m, n\}, \quad (68)$$

где

$$v_{mn} = d \left[\left(\frac{qm}{N} \right)^2 + \left(\frac{pn}{N} \right)^2 \right], \quad d = \frac{\alpha t_0 \pi}{2(pq)^2}.$$

Поскольку v_{mn} зависит от n и m , то в зависимости от данных задачи α , p , q и t_0 выражение v_{mn} может принимать только рациональные или иррациональные значения. Если v_{mn} принимает только рациональные значения, то выражение (68) будет иметь счетное множество нулей. Поэтому остается рассмотреть случай, когда v_{mn} принимает иррациональные значения. Также заметим, что множество значений v_{mn} ограничено

$$dl_m^2 < v_{mn} \leq d(p^2 + q^2), \quad l_m = \min\{p, q\}.$$

Предварительно из теории чисел приведем утверждение, которое является аналогом теоремы Рота [20, с. 268].

Утверждение. Для любого иррационального алгебраического числа β степени $s \geq 2$ и произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $C_1 > 0$ такое, что при любых целых p и q ($q > 0$) справедливо неравенство

$$\left| \beta - \frac{p}{q^2} \right| > \frac{C_1}{q^{4+\varepsilon}}. \quad (69)$$

Лемма 3. Если v_{mn} является иррациональным алгебраическим числом степени $s \geq 2$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что при всех $N \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$|\sin \pi N^2 v_{mn}| > \frac{C_2}{N^{2+\varepsilon}}, \tag{70}$$

где C_2 зависит от m и n .

Доказательство. Для всякого $N \in \mathbb{N}$ можно подобрать $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы имело место неравенство

$$\left| v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right| < \frac{1}{2N^2}. \tag{71}$$

Действительно, следуя [21], число m можно взять таким:

$$k = \begin{cases} [v_{mn}N^2], & \text{если } \{v_{mn}N^2\} < 1/2, \\ [v_{mn}N^2] + 1, & \text{если } \{v_{mn}N^2\} > 1/2, \end{cases}$$

где $[v_{mn}N^2]$ и $\{v_{mn}N^2\}$ – целая и дробная части иррационального числа $v_{mn}N^2$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, такое, что выполняется неравенство (71). Тогда в силу известного неравенства

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{72}$$

и оценки (69) из соотношения (68) будем иметь

$$|\sin \pi N^2 v_{mn}| = \left| \sin \pi N^2 \left(v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right) \right| > 2N^2 \left| v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right| > \frac{C_2}{N^{2+\varepsilon}} \geq \frac{C_0}{N^{2+\varepsilon}},$$

так как множество значений C_2 от m и n ограничено снизу постоянной $C_0 > 0$ в силу ограниченности множества значений v_{mn} .

Отметим, что если v_{mn} является иррациональным числом с неограниченным множеством элементов при разложении в цепные дроби [18, с. 115], [19, с. 267], то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется бесконечное множество чисел $k, N \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\left| v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right| < \frac{\varepsilon}{N^4}.$$

Тогда на основании этого неравенства имеем

$$|\sin \pi N^2 v_{mn}| = \left| \sin \pi N^2 \left(v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right) \right| \leq \pi N^2 \left| v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right| < \frac{\pi \varepsilon}{N^2}.$$

Отсюда следует, что для таких чисел v_{mn} выражение $\sin \pi N^2 v_{mn}$, которое является знаменателем, может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому для таких иррациональных чисел v_{mn} решение обратной задачи в виде рядов (64) и (65) не существует.

Если же множество элементов числа v_{mn} ограничено, то существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для всех $k, N \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left| v_{mn} - \frac{k}{N^2} \right| \geq \frac{\varepsilon_0}{N^4}.$$

Как известно из теории чисел, что алгебраические числа степени 2, т.е. квадратические иррациональности, имеют ограниченное множество элементов. В этом случае имеет место оценка (70), где только $\varepsilon = 0$.

Для обоснования сходимости рядов (64) и (65) в соответствующих классах (2) и (8) установим оценки для коэффициентов этих рядов.

Лемма 4. Пусть функции $g(t)$ возрастающая и положительная на сегменте $[0, T]$ и v_{mn} является алгебраическим иррациональным числом степени $s \geq 2$. Тогда при любом $N \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$|g_{mn}(t)| \leq \frac{2 \|g\|_C}{\omega_{mn}^2} = \frac{C_3}{\lambda_{mn}^2} \leq \frac{C_4}{N^2}, \tag{73}$$

$$|g_{mn}(t_0)| \geq \frac{C_5}{N^{8+2\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{4}, \quad (74)$$

где $\|g\|_C = \sup_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$, C_i – здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α , p , q , t_0 и $\|g\|_C$.

Доказательство. Из равенства (18) следует, что

$$\left(\frac{\pi}{l_M}\right)^2 N^2 \leq \lambda_{mn} \leq 2\left(\frac{\pi}{l_m}\right)^2 N^2,$$

где $l_m = \min\{p, q\}$, $l_M = \max\{p, q\}$. Тогда из левой части неравенства (67) следует оценка (73). На основании леммы 1 с учетом правой части соотношения (67), получим оценку (74):

$$|g_{mn}(t_0)| \geq \frac{2g(0)}{\omega_{mn}^2} |\sin \pi v_{mn} N^2|^2 \geq \frac{2g(0)C_0^2}{\omega_{mn}^2} \frac{1}{N^{4+2\varepsilon}} = \frac{C_5}{N^{8+2\varepsilon}}.$$

Лемма 5. Пусть v_{mn} является алгебраическим числом степени $s \geq 2$. Тогда при любом $t \in [0, T]$ и $N \in \mathbb{N}$ справедливы оценки:

$$|u_{mn}(t)| \leq C_6 N^{4+2\varepsilon} \left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2} |\psi_{mn}| \right), \quad (75)$$

$$|u''_{mn}(t)| \leq C_7 N^{8+2\varepsilon} \left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2} |\psi_{mn}| \right), \quad (76)$$

$$|f_{mn}| \leq C_8 N^{8+2\varepsilon} \left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2} |\psi_{mn}| \right). \quad (77)$$

Доказательство оценок (75)–(77) непосредственно следует из формул (63) и (61) на основе леммы 4.

Формально из ряда (64) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn}(t) v_{mn}(x, y), \quad (78)$$

$$u_{xxxx} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{m\pi}{p}\right)^4 v_{mn}(x, y), \quad (79)$$

$$u_{yyyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{n\pi}{q}\right)^4 v_{mn}(x, y), \quad (80)$$

$$u_{xxyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \left(\frac{m\pi}{p}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2 v_{mn}(x, y). \quad (81)$$

Ряды (64), (65), (78)–(81) при любых $(x, y, t) \in \bar{Q}$ на основании леммы 5 мажорируются рядом

$$C_9 \sum_{m,n=1}^{\infty} N^{8+2\varepsilon} \left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2} |\psi_{mn}| \right) = \sum_{N=1}^{\infty} N^{8+2\varepsilon} \left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2} |\psi_{mn}| \right). \quad (82)$$

Для сходимости ряда (82) достаточно потребовать выполнение следующих условий (A): $\varphi(x, y), \varphi_0(x, y) \in C^{10+\delta}(\bar{D})$, $2\varepsilon < \delta < 1$, $\varphi_x^{(i)}(0, y) = \varphi_x^{(i)}(p, y) = \varphi_{0x}^{(i)}(0, y) = \varphi_{0x}^{(i)}(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $\varphi_y^{(i)}(x, 0) = \varphi_y^{(i)}(x, q) = \varphi_{0y}^{(i)}(x, 0) = \varphi_{0y}^{(i)}(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $i = 0, 2, 4, 6, 8$; $\psi(x, y) \in C^{8+\delta}(\bar{D})$, $\psi_x^{(j)}(0, y) = \psi_x^{(j)}(p, y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $\psi_y^{(j)}(x, 0) = \psi_y^{(j)}(x, q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $j = 0, 2, 4, 6$.

При выполнении этих условий на основании работы [19, с. 335] нетрудно показать справедливость следующих оценок:

$$|\varphi_{mn}| \leq \frac{C_{10}}{N^{10+\delta}}, \quad |\varphi_{0mn}| \leq \frac{C_{10}}{N^{10+\delta}}, \quad |\psi_{mn}| \leq \frac{C_{11}}{N^{8+\delta}}. \quad (83)$$

В ряде (82) число членов с заданным N имеет порядок N . Тогда на основании оценок (83) ряд (82) мажорируется сходящимся рядом

$$C_{12} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1+\delta-2\epsilon}}.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 6. Пусть функции $\varphi(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$, $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям (А) и непрерывная функция $g(t)$ и числа ν_{mn} удовлетворяют условиям леммы 2. Тогда существует единственное решение задачи 3 и оно определяется рядами (64) и (65).

Отметим, что с решением задачи 3 можно было поступить иначе. Уравнение (59) равносильно интегральному уравнению Фредгольма I рода

$$\iint_D f(\xi, \eta) K(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta = H(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (84)$$

где

$$K(\xi, \eta; x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} g_{mn}(t_0) v_{mn}(x, y) v_{mn}(\xi, \eta), \quad (85)$$

$$H(x, y) = \varphi_0(x, y) - \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t_0 + \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t_0 \right) v_{mn}(x, y). \quad (86)$$

Ядро $K(\xi, \eta; x, y)$, определяемое рядом (85), по крайней мере, непрерывно дифференцируемо на замкнутом множестве $\bar{D} \times \bar{D}$, правая часть уравнения (84), т.е. функция $H(x, y)$, определяемая рядом (86), принадлежит классу $C^9(\bar{D})$.

Как известно, интегральные уравнения Фредгольма I рода трудно разрешимы и они относятся к классу некорректных задач. В данном случае при выполнении условий теоремы 3 интегральное уравнение (84) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (65) и (61).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с. (изд. 3).
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1967. 444 с.
3. Гуд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: Мир, 1970. 328 с.
4. Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. 216 с.
5. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2015. Т. 19. № 2. С. 311–324.
6. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.
7. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок // Дифференц. ур-ния, 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.
8. Сабитов К.Б., Акимов А.А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 5. С. 632–645.
9. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 6. С. 773–785.
10. Орловский Д.Г. Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 6. С. 1000–1009.
11. Орловский Д.Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. ур-ния. 1990. Т. 26. № 9. С. 1614–1621.
12. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 208 с.
13. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. 709 p.

14. *Соловьев В.В.* Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47. № 8. С. 1365–1377.
15. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с. (изд. 2).
16. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *Успехи матем. наук.* 1963. Т. XVIII. Вып. 6 (114). С. 91–192.
17. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // *Матем. заметки.* 2015. Т. 97. Вып. 2. С. 262–276.
18. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. 352 с. (изд. 2).
19. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Т. 2. М.: Изд. МГУ, 1987. 358 с.
20. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. СПб.: Лань, 2008. 384 с.
21. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // *Матем. заметки.* 2010. Т. 87. № 6. С. 907–918.