ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2021, том 84, № 5, с. 447–457

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ В МЁЛЛЕРОВСКОМ РАССЕЯНИИ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТА PRad В JLab

© 2021 г. В. А. Зыкунов[1),2)*]

Поступила в редакцию 03.03.2021 г.; после доработки 29.03.2021 г.; принята к публикации 01.04.2021 г.

С применением нескольких методов устранения инфракрасной расходимости рассчитаны электромагнитные радиационные поправки к низкоэнергетическому мёллеровскому рассеянию в условиях эксперимента PRad в Лаборатории Джефферсона.

DOI: 10.31857/S0044002721050172

1. ВВЕДЕНИЕ

В своей работе [1] К. Мёллер (Chr. Møller) впервые рассчитал в рамках квантовой электродинамики (КЭД) сечение упругого электрон-электронного рассеяния (впоследствии в его честь оно получило название “мёллеровское рассеяние”, МР). С экспериментальной точки зрения МР является очень “чистым” процессом с хорошо выраженной возможностью формирования начальных частиц, детектирования конечных частиц, а также легко подавляемым фоном. По этим причинам МР представляет особый интерес в современной физике: в поляриметрии, прецизионном определении параметров Стандартной модели (СМ), в поисках Новой физики и т. д.

Под мёллеровской поляриметрией понимается экспериментальная реализация изучения процесса мёллеровского рассеяния для точного определения поляризации электронного пучка. Она осуществлялась, например, в экспериментах: SLC, E-143 и E-154 в SLAC, в нескольких экспериментах в JLab и MIT-Bates. При энергиях вышеупомянутых экспериментов для обеспечения требуемой точности достаточно было знать однопетлевые электромагнитные поправки (ЭМП), которые впервые оценены с помощью ковариантного метода [2] в работе [3]. Другой расчет был предпринят в [4, 5], где основное внимание уделено исследованию эффектов зависимости от экспериментальных ограничений на неупругость (или потерянную массу).

Эксперимент E-158 в SLAC [6], в котором изучалось МР поляризованных электронов с энергиями 45–48 ГэВ на неполяризованных электронах водородной мишени, позволил получить с беспрецедентной точностью значение одного из важнейших параметров СМ — синуса угла Вайнберга s_W [7]. Аналогичный эксперимент следующего поколения MOLLER [8] с пучком 11 ГэВ, который планируется осуществить в скором будущем в JLab, позволит измерить наблюдаемую асимметрию на еще более высоком уровне чувствительности 0.73×10^{-9}, что позволит существенно улучшить точность измерения и слабого заряда электрона (до 2.3%), и синуса угла Вайнберга. Обсуждаемые поляризационные явления, изучающиеся на экспериментах типа E-158 и MOLLER, имеют электрослабую природу, что приводит к необходимости изучения электрослабых поправок к МР [9–12].

Электрон-электронная (мёллеровская) мода может быть осуществлена и в работе будущего лептонного коллайдера ILC/CLIC/FCC/CEPC. Как и при более низких энергиях в экспериментах E-158/MOLLER, она может быть интересна как для прецизионных тестов и измерений СМ, так и для поисков Новой физики [13]. Как одна из естественных опций высокоэнергетичных линейных коллайдеров типа ILC в электрон-электронном режиме рассматривается проект фотонного коллайдера, на котором энергия и светимость имеют тот же масштаб, что и у исходных электронных пучков. При столкновении фотонов будут рождаться хиггсовские бозоны и любые новые заряженные частицы. Электрослабые радиационные поправки к МР при коллайдерных энергиях изучались в работах [14–16].

Зарядовый протонный радиус (ЗПР, proton charge radius, root-mean-square charge radius) является одним из фундаментальных структурных параметров протона. Его точное знание чрезвычайно важно для понимания как КХД — теории сильных взаимодействий, которая, по современным представлениям, претендует на корректное

[1)] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.
[2)] Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь.
[*] E-mail: zykunov@cern.ch

описание структуры нуклонов, так и важных тестов КЭД (например, лэмбовского сдвига в атоме водорода). ЗПР непосредственно зависит от электрического формфактора протона при малых передачах, поэтому традиционно ЗПР определяется в упругом e^-p-рассеянии. Как оказалось, экспериментальной точности такого рода экспериментов для прецизионных тестов КХД и КЭД не вполне достаточно.

Долгое время одним из актуальных вопросов современной физики было разрешение загадки протонного радиуса (proton radius puzzle) — значительное (более 4% на момент возникновения проблемы) несовпадение между измерениями радиуса протона в обычном (электронном) и мюонном (PSI [17, 18]) водородах. Независимое измерение электрического формфактора протона (а, следовательно, ЗПР) было предложено в JLab [19] (PRad experiment): начальные неполяризованные электроны рассеиваются на жидководородной мишени и детектируются калориметром PrimEx HYCAL. Сечение упругого e^-p-рассеяния нормализуется на сечении неполяризационного мёллеровского рассеяния. Процессы e^-p и e^-e^- в PRad измеряются одновременно и независимо, так как электроны, которые рассеются на протонном ядре, и мёллеровские электроны, которые рассеются на электронах водорода, попадают в непересекающиеся области детектора. Такая постановка (нормализация сечения e^-p к сечению e^-e^-) существенно улучшает учет интегральной светимости при сборе статистики и позволяет достичь очень высокой точности определения ЗПР в PRad. Проведенный эксперимент [19] (закончен в 2016 г.) показал совпадение с измерением в мюонном водороде, но все еще остается существенная разница (на 5.8% меньше) с другими электронными измерениями (и, соответственно, с рекомендациями CODATA), так что планируется новый, более точный эксперимент PRad-II [20].

Разногласие между экспериментальными данными привело к интенсивному изучению проблемы (см. ссылки в работе [21]). Предлагались новые подходы к точному учету двухбозонного обмена, варианты усложненной протонной структуры, поправки, обусловленные эффектами атомной физики (atomic physics corrections). Рассматривались и варианты Новой физики: новые векторые и скалярные частицы, которыми могут обмениваться мюон и протон, “темные” (массивные) фотоны (dark photons).

Наконец, последние два года принесли изменение ситуации: недавние наиболее точные и продвинутые эксперименты и по измерению спектра обычного атома водорода, и по электрон-протонному рассеянию [22], дают результаты близкие к тем, что были получены из анализа спектра мюонного водорода, см., например, [23]. Данные прецизионного эксперимента PRad-II [20], возможно, наконец поставят точку в проблеме размера протона.

Заявленная точность, однако, требует учета систематических неопределенностей, в первую очередь радиационных поправок. Впервые ЭМП к упругому e^-p-рассеянию (только к лептонному току) и МР были рассмотрены в работе [21] с применением ковариантной схемы устранения инфракрасной расходимости (ИКР) [2]. Требуемая высокая точность побудила авторов [21] удержать в расчете массу электрона. Был рассмотрен один тип экспериментальных ограничений — на неупругость (потерянную массу). Важность проблемы требует независимого расчета обсуждаемых радиационных эффектов. Точному учету этих эффектов для процесса МР в точном соответствии с условиями эксперимента PRad (в соответствии с ограничениями, накладываемыми возможностями детектора, fiducial cuts) посвящена настоящая работа.

План работы следующий: в разд. 2 дано общее описание процесса в борновском приближении, в разд. 3 приведены выражения виртуальных однопетлевых ЭМП, в разд. 4 подробно разобран вклад тормозного излучения. Численный анализ проведен в разд. 5. Технические детали расчета фазового объема тормозного излучения вынесены в Приложение.

2. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА В БОРНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Реакция поляризационного мёллеровского рассеяния

$$e^-(p_1) + e^-(p_2) \to e^-(p_3) + e^-(p_4) \qquad (1)$$

в борновском приближении описывается фейнмановскими диаграммами, изображенными на рис. 1. Приведем стандартный набор лоренц-инвариантных переменных Мандельштама:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t \equiv q_t^2 = (p_1 - p_3)^2, \qquad (2)$$
$$u \equiv q_u^2 = (p_3 - p_2)^2,$$

которые сформированы из 4-импульсов начальных (p_1 и p_2) и конечных (p_3 и p_4) частиц. В работе используется пропагаторная структура:

$$D^r = \frac{1}{q_r^2}. \qquad (3)$$

Индекс r перебирает каналы реакции: $r = t, u$.

Полная амплитуда борновского процесса представляет собой разность t-канальной и u-канальной частей:

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{0,t} - \mathcal{M}_{0,u} \qquad (4)$$

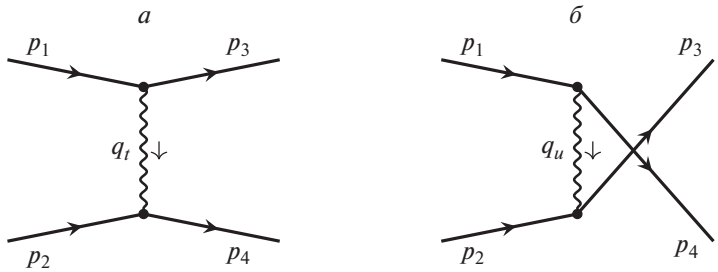

Рис. 1. Фейнмановские диаграммы мёллеровского процесса $e^-e^- \to e^-e^-$ с безрадиационной кинематикой: *а* — t-канальная, *б* — u-канальная.

(знак минус обусловлен тождественностью фермионов рассматриваемой реакции). Амплитуды t- и u-канала связаны простой заменой 4-импульсов (это имеет место как для борновских диаграмм, так и для диаграмм высших порядков, см. ниже)

$$\mathcal{M}_{0,u} = \mathcal{M}_{0,t}|_{p_3 \leftrightarrow p_4}, \tag{5}$$

которая проявляется в симметрии конечного выражения для сечения в виде кроссинговой замены $t \leftrightarrow u$. Фазовый объем реакции МР имеет вид

$$d\Phi_2 = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\frac{d^3\mathbf{p}_3}{2p_{3_0}}\frac{d^3\mathbf{p}_4}{2p_{4_0}}. \tag{6}$$

После преобразований и снятия интегралов получим в с.ц.м.

$$d\Phi_2 = \frac{\pi|\mathbf{p}_3|}{4p_{4_0}} d\cos\theta_3. \tag{7}$$

Квадрируем амплитуды, используя стандартную технику, домножаем получившееся выражение на фазовый объем и множитель $\frac{1}{8\pi^2 s}$ и получаем сечение неполяризационного МР в ультрарелятивистском приближении (УРП)

$$\sigma^0 = \frac{\pi\alpha^2}{s}\frac{u^3 - s^3}{t^2 u} + (t \leftrightarrow u) = \sigma_t^0 + \sigma_u^0. \tag{8}$$

Для записи сечения используется сокращенная запись:

$$\sigma^C \equiv \frac{d\sigma^C}{d\cos\theta_3} \equiv \frac{s}{2}\cdot\frac{d\sigma^C}{dt}, \tag{9}$$

где θ_3 — угол рассеяния детектируемого электрона с 4-импульсом p_3 в с.ц.м. начальных электронов, а индексом C обозначается тип вклада в сечение.

В упрощенном виде сечение выглядит так:

$$\sigma^0 = \frac{\pi\alpha^2}{s}\frac{s^4 + t^4 + u^4}{t^2 u^2}. \tag{10}$$

В с.ц.м. инварианты t и u имеют вид

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta_3), \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta_3), \tag{11}$$

тогда

$$\sigma^0 = \frac{2\pi\alpha^2}{s}\frac{\left(3 + \cos^2\theta_3\right)^2}{\sin^4\theta_3}. \tag{12}$$

3. ОДНОПЕТЛЕВОЙ ВИРТУАЛЬНЫЙ ВКЛАД

Вклад дополнительных виртуальных частиц представлен тремя классами диаграмм: собственными энергиями бозонов (boson self energies, BSE), вершинными функциями (vertices, Ver) и двухфотонным обменом или боксами (boxes, Box). Соответствующее сечение выглядит как сумма всех вкладов:

$$\sigma^V = \sigma^{\mathrm{BSE}} + \sigma^{\mathrm{Ver}} + \sigma^{\mathrm{Box}}. \tag{13}$$

Фейнмановские диаграммы, соответствующие виртуальным однопетлевым вкладам, изображены на рис. 2 (t-канальные диаграммы BSE, кружком на них обозначены все варианты, возможные в рамках КЭД, и t-канальные вершинные диаграммы) и рис. 3 (t-канальные боксовские диаграммы). Обозначения 4-импульсов те же, что на борновских диаграммах рис. 1.

Сечение, соответствующее BSE-вкладам, не содержит ИКР и имеет следующий вид (снова явно виден кроссинг):

$$\sigma^{\mathrm{BSE}} = 2\sigma_t^0 t \cdot \mathrm{Re} D_S^{\gamma\gamma t} + (t \leftrightarrow u). \tag{14}$$

Здесь комбинации

$$D_S^{ijr} = -D^{ir}\hat{\Sigma}_T^{ij}(r)D^{jr} \tag{15}$$

связаны с выражениями $\hat{\Sigma}_T^{ij}(r)$, которые представляют собой поперечные части перенормированных бозонных собственных энергий, в данном случае: $i = \gamma$, $j = \gamma$. Используется схема перенормировки на массовой поверхности [24].

Для того чтобы рассчитать вклад в сечение МР от электронных вершинных функций, используются формфакторные обозначения в духе работы [24]. Сечение, соответствующее вершинным вкладам, имеет следующий вид:

$$\sigma^{\mathrm{Ver}} = \frac{\alpha}{\pi}\sigma_t^0 \cdot \Lambda_1(t, m^2) + (t \leftrightarrow u). \tag{16}$$

Функция Λ_1 описывает вклад треугольной диаграммы с фотонным обменом. Действительная

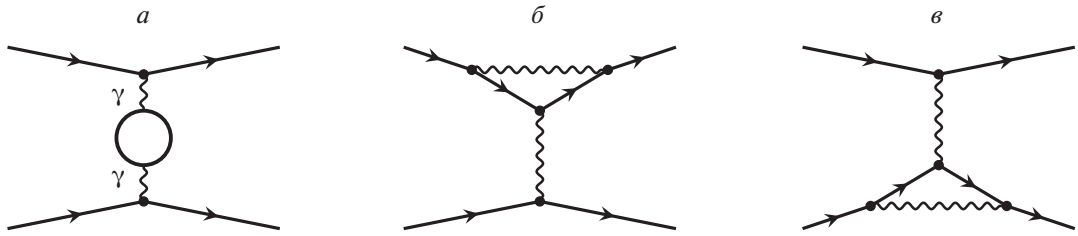

Рис. 2. Фейнмановские t-канальные диаграммы вкладов BSE (a) и вершинных вкладов ($б$, $в$) в процесс МР. Волнистой линией на этих и последующих диаграммах обозначены фотоны.

часть первой функции содержит коллинеарный логарифм, в УРП в t-канале она имеет вид

$$\mathrm{Re}\Lambda_1^\gamma = -2\ln\frac{-t}{\lambda^2}\left(\ln\frac{-t}{m^2}-1\right)+ \\ +\ln\frac{-t}{m^2}+\ln^2\frac{-t}{m^2}+\frac{1}{3}\pi^2-4. \tag{17}$$

Сечение, соответствующее вкладам двухфотонного обмена (см. рис. 3), имеет следующий вид:

$$\sigma^{\mathrm{Box}} = \frac{\alpha}{\pi}\sigma_t^0\cdot\left(2l_{su}\ln\frac{s}{\lambda^2}-l_{su}^2-\pi^2\right)- \\ -\frac{\alpha^3}{s}\left(\frac{1}{t}\delta_{\gamma\gamma}^T+\frac{1}{u}\delta_{\gamma\gamma}^U\right)+(t\leftrightarrow u), \tag{18}$$

где

$$\delta_{\gamma\gamma}^T = l_{st}^2\frac{3s^2+u^2}{2t}-l_{tu}s-l_{st}u- \\ -(l_{tu}^2+\pi^2)\frac{s^2+3u^2}{2t}, \tag{19}$$

$$\delta_{\gamma\gamma}^U = l_{st}^2\frac{s^2}{t}-l_{tu}s-(l_{tu}^2+\pi^2)\frac{s^2+u^2}{2t},$$

$$l_{xy}=\ln\left|\frac{x}{y}\right|.$$

4. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В МР

Чтобы устранить ИКР, требуется учет процесса тормозного излучения (ТИ):

$$e^-(p_1)+e^-(p_2)\to e^-(p_3)+e^-(p_4)+\gamma(p), \tag{20}$$

который “сопровождает” исследуемый процесс (1) и неотличим от него в постановке эксперимента, когда тормозной фотон не детектируется [25]. Фейнмановские t-канальные диаграммы радиационного процесса (20) приведены на рис. 4. Кроме того, даже без предположений о постановке эксперимента, неотличимость процессов совершенно очевидна при малых энергиях тормозного фотона; такой процесс будем называть мягким тормозным излучением. Кинематика мягкого ТИ, соответственно, неотличима от кинематики безрадиационного процесса (1).

Посредством разделения области интегрирования на две: $p_0<\omega$ и $p_0>\omega$, где p_0 — энергия тормозного фотона в с.ц.м. начальных электронов, а ω — параметр, разделяющий области, получаем два сечения — соответствующие “мягким” и “жестким” фотонам. В сумме сечение процесса (1) с дополнительным виртуальным фотоном и сечение мягкого ТИ представляют инфракрасно-конечную величину, однако эта сумма содержит дополнительный параметр — максимальную энергию (мягкого) тормозного фотона ω. Описанный метод носит название метода Мо–Тсаи [26].

Следуя расчетной технологии работы [27], получаем хорошо известный результат (см. [14]) для сечения процесса с мягкими фотонами

$$\sigma^{\mathrm{soft}} = \frac{\alpha}{\pi}\left(4\ln\frac{2\omega}{\lambda}\left[\ln\frac{tu}{m^2s}-1\right]- \\ -\left[\ln\frac{s}{m^2}-1\right]^2+1-\frac{\pi^2}{3}+l_{tu}^2\right)\sigma^0. \tag{21}$$

Суммируя члены V-вклада

$$\sigma_\lambda^V=\sigma^V-\sigma^V(\lambda\to\sqrt{s})$$

и сечение мягких фотонов, содержащие ИКР, получим результат, свободный от нее, но логарифмически зависящий от ω и содержащий двойные коллинеарные логарифмы:

$$\sigma_\lambda^V+\sigma^{\mathrm{soft}} = \frac{\alpha}{\pi}\left(4\ln\frac{2\omega}{\sqrt{s}}\left[\ln\frac{tu}{m^2s}-1\right]- \\ -\left[\ln\frac{s}{m^2}-1\right]^2+1-\frac{\pi^2}{3}+l_{tu}^2\right)\sigma^0.$$

В сумме с Λ_1-членами из вершинного вклада коллинеарные логарифмы сводятся до первой степени:

$$\frac{\alpha}{\pi}\left(\Lambda_1(\lambda^2\to s)-\ln^2\frac{s}{m^2}\right)= \\ =\frac{\alpha}{\pi}\left(\ln^2\frac{-t}{m^2}-\ln^2\frac{s}{m^2}\right)=\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{-t}{s}\ln\frac{-ts}{m^4}.$$

Вернемся к общему описанию процесса ТИ в МР. Введем лоренц-инварианты, описывающие радиационный процесс (радиационные инварианты):

$$z_1=2p_1p,\quad v_1=2p_2p, \tag{22}$$

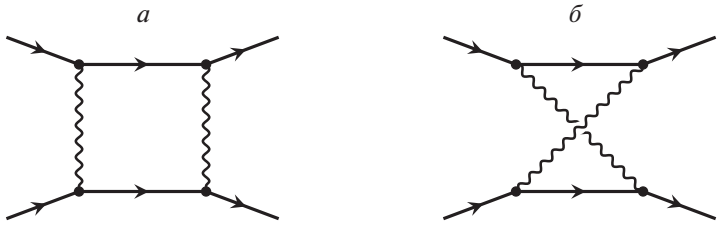

Рис. 3. Фейнмановские t-канальные диаграммы боксов в процессе МР: *а* — прямой бокс, *б* — перекрестный бокс.

$$z = 2p_3p, \quad v = 2p_4p,$$

которые обращаются в нуль при $p \to 0$ и не являются независимыми: так, благодаря законам сохранения они связаны с уже введенными инвариантами (s, t и u) следуюшими кинематическими соотношениями:

$$z_1 + v_1 = z + v, \quad s + t + u = v + 4m^2. \tag{23}$$

Вводятся также три вспомогательных инварианта:

$$s_1 = (p_3 + p_4)^2, \quad t_1 = (p_2 - p_4)^2, \tag{24}$$
$$u_1 = (p_1 - p_4)^2.$$

Следует сказать, что из шести инвариантных величин (s, t, u, s_1, t_1, u_1) все, кроме s, зависят от $\cos\theta_3$, причем по-разному в безрадиационном и радиационном случаях. Определение радиационных инвариантов и их связь с входными параметрами (E_{lab} и $\cos\theta_3$) в УРП приведены в табл. 1. Инвариант t в радиационном случае свяжем в с.ц.м. с углом рассеяния (см. рис. 5), приведем точный вид этой связи

$$t = \frac{1}{2}\Bigg(4m^2 - s + v + \tag{25}$$
$$+ \cos\theta_3\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}\sqrt{(s-v)^2 - 4m^2 s}\Bigg),$$

инвариант u определяется сходной формулой, но с противоположным знаком при $\cos\theta_3$.

Дифференциальное сечение процесса (20) выглядит так:

$$d\sigma_R = \frac{\alpha^3}{\pi^2 s}\sum |R|^2 d\Phi_3, \tag{26}$$

где $\sum |R|^2$ — квадрированные амплитуды, должным образом просуммированные и усредненные по поляризациям (точный вид в УРП можно найти в [28]), а фазовый объем реакции $2 \to 3$ имеет вид

$$d\Phi_3 = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p) \times \tag{27}$$
$$\times \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2p_{30}}\frac{d^3\mathbf{p}_4}{2p_{40}}\frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}.$$

Существует несколько возможностей преобразования фазового объема (27). Простой и математически ясный способ — это приведение его к форме с зависимостью от четырех (радиационных) инвариантов (см. [29]):

$$d\Phi_3 = \frac{\pi}{16s\sqrt{-\Delta_4}}dt\,dz_1\,dv_1\,dv, \tag{28}$$

где $\Delta_4 = \Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$ — определитель Грама. На рис. 6 изображены физические области изменения инвариантов, соответствующие фазовому объему (28): *а* — диаграмма Далица [30] и *б* — диаграмма Чу–Лоу [31]. Величина Q^2 определяется так:

$$Q^2 = \frac{s}{2}(1 - \cos\theta_3),$$

т. е. равна абсолютному значению борновского инварианта t. Точками на диаграммах обозначены события, разыгранные с помощью программы VEGAS [32].

Форма (28) была использована, например, в работе [28], где рассчитан вклад жесткого ТИ в условиях эксперимента MOLLER. Следует признать, что, несмотря на внешнюю простоту и легкость программирования, вид фазового объема (28) представляет значительную трудность при интегрировании. Чтобы добиться необходимой ско-

Таблица 1. Инварианты для безрадиационного и радиационного случаев в УРП

Инвариант	Безрадиационный случай	Радиационный случай
$s = (p_1 + p_2)^2$	$2mE_{\text{lab}}$	$2mE_{\text{lab}}$
$t = (p_1 - p_3)^2$	$-s(1 - \cos\theta_3)/2$	$(v - s)(1 - \cos\theta_3)/2$
$u = (p_2 - p_3)^2$	$-s(1 + \cos\theta_3)/2$	$(v - s)(1 + \cos\theta_3)/2$
$z_1 = 2pp_1$	0	z_1
$v_1 = 2pp_2$	0	v_1
$z = 2pp_3$	0	$z_1 + v_1 - v$
$v = 2pp_4$	0	v
$s_1 = (p_3 + p_4)^2$	s	$s - z_1 - v_1$
$t_1 = (p_2 - p_4)^2$	t	$t - v + v_1$
$u_1 = (p_1 - p_4)^2$	u	$u - v + z_1$

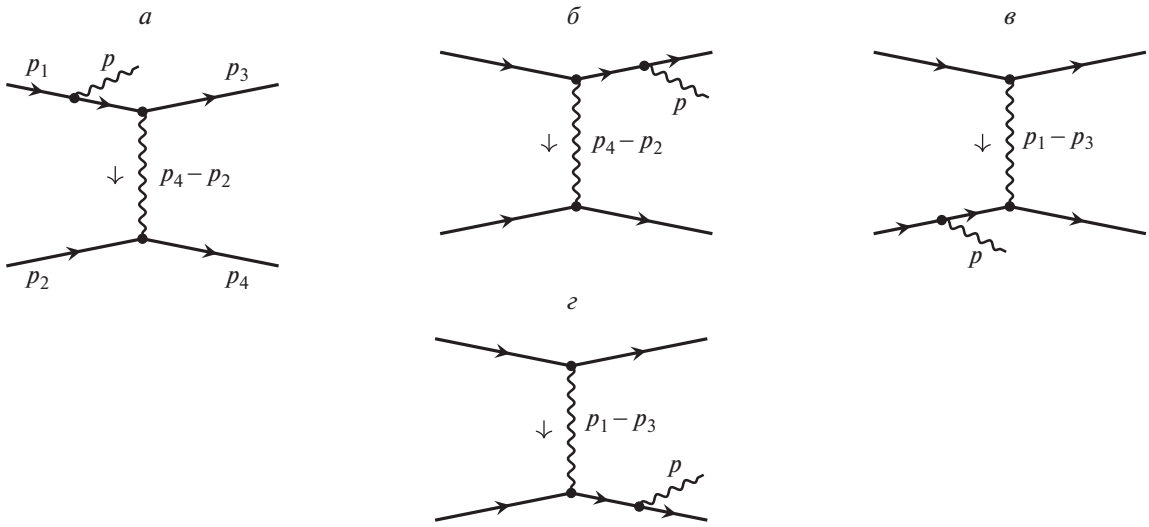

Рис. 4. Фейнмановские t-канальные диаграммы процесса MP с излучением тормозного фотона с 4-импульсом p.

рости сходимости интеграла в таком подходе, например, в работе [28] были предприняты значительные усилия в преобразовании (факторизации) подынтегрального выражения, комбинировании результата в виде относительных поправок $\delta_{\pm}$, предварительном разбиении результата по типам вкладов, удобных для программирования интегрирования, и пр.

Чтобы построить программу, позволяющую учесть ЭМП с произвольным набором ограничений на условия детектирования, удобно осуществить преобразование фазового объема (27) в с.ц.м. начальных частиц [33]. Не приводя детали расчета (см., например, [34]), дадим в Приложении конечный результат в обозначениях настоящей статьи. Используя полученные там выражения для фазового объема, снимем интеграл по азимутальному углу детектируемого электрона φ_3, тогда сечение

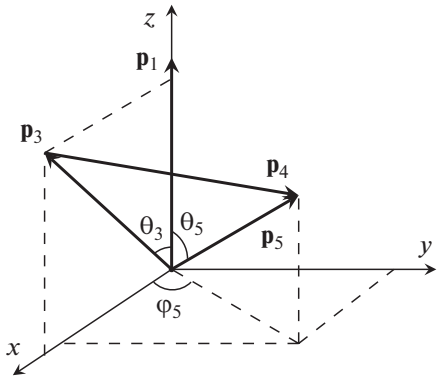

Рис. 5. Конфигурация 3-импульсов при интегрировании по фазовому пространству тормозного фотона в с.ц.м. начальных частиц.

R-вклада принимает вид

$$\sigma^R = -\frac{\alpha^3}{4\pi s}\int\limits_0^{|\mathbf{p}|_{\max}} \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0} d|\mathbf{p}| \times \tag{29}$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta_p \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi_p |\mathbf{p}_3|}{p_{40}\mathcal{F}} \sum |R|^2.$$

Уже в таком виде численное интегрирование (будем использовать Монте-Карло-интегратор VEGAS [32]) осуществляется без проблем, если позаботиться о сгущении точек в области малых $|\mathbf{p}|$. Однако имеется возможность представить результат в более изящном виде. Сначала перейдем к интегралу по фотонной энергии, используя равенство $|\mathbf{p}|d|\mathbf{p}| = p_0 dp_0$, тогда

$$\int\limits_0^{|\mathbf{p}|_{\max}} \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0} d|\mathbf{p}| ... = \int\limits_{\lambda}^{\Omega} |\mathbf{p}| dp_0 ..., \tag{30}$$

где Ω — максимальная энергия тормозного фотона. Заметим, что такое преобразование дает возможность представить сечение мягкого ТИ в виде (произведем также некоторые очевидные упрощения)

$$\sigma^{\text{soft}} = -\frac{\alpha^3}{4\pi s}\int\limits_{\lambda}^{\omega} |\mathbf{p}| dp_0 \times \tag{31}$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta_p \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_p \frac{1}{2} \sum |R|^2.$$

Наконец, применив замену переменной (похожая замена использовалась, например, в [35] для

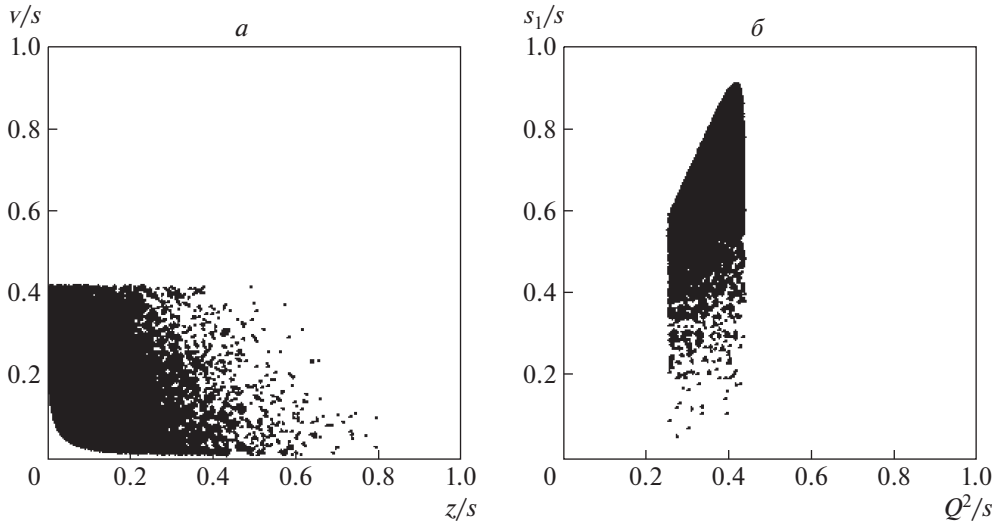

Рис. 6. Диаграммы Далица (*а*) и Чу–Лоу (*б*) при $E_{\rm lab} = 1.1$ ГэВ, $Q^2 = 5 \times 10^{-4}$ ГэВ^2, $\lambda = 0.05\sqrt{s}$ (значение массы фотона искусственно завышено в целях лучшей иллюстрации формы области).

выделения зависимости сечения от минимальной энергии фотона)

$$p_0 = \lambda^{1-x}\Omega^x, \tag{32}$$

что дает

$$\frac{dp_0}{p_0} = \ln\frac{\Omega}{\lambda}dx,$$

получим сечение в виде

$$\sigma^R = -\frac{\alpha^3}{4\pi s}\ln\frac{\Omega}{\lambda}\int\limits_0^1 dx|\mathbf{p}|p_0 \times \tag{33}$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta_p \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_p \frac{|\mathbf{p}_3|}{p_{4_0}\mathcal{F}}\sum|R|^2.$$

Видно, что использование преобразования (30) дает дополнительные степени свободы для расчета:

- мягкое ТИ теперь можно считать либо по предварительно упрощенной формуле (21), либо по формуле (31), используя технику Монте-Карло (а лучше и по той, и по другой, чтобы дополнительно свериться);
- имеется возможность вовсе не разделять ТИ на мягкое и жесткое, а пользоваться формулой (29) [или (33)], в которой содержится полностью все тормозное излучение; использование этого нового и, как показывает практический опыт, полезного свойства назовем W-методом (от “whole” — полный, цельный, без разделения).

W-метод весьма удобен для вычислений подобного рода, поскольку он не содержит нефизических параметров, кроме фиктивной массы фотона λ, которая естественным образом регуляризует ИКР. С методической точки зрения W-метод хорош тем, что вообще не оперирует такими терминами, как “мягкий фотон”, “жесткий фотон”, “параметр, разделяющий мягкую и жесткую области”, не требуется также отвлекающая в какой-то мере от сути дела проверка на независимость от этого параметра. Не стоит забывать также о том, что расчет по области мягких фотонов в традиционном подходе Мо–Тсаи — это приближенное вычисление, и оно *принципиально* содержит ошибку расчета, которую довольно сложно контролировать, расчет же в рамках W-метода такой ошибки не содержит.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ И ВЫВОДЫ

Основным объектом исследования будут относительные поправки к дифференциальному сечению, которые определяются выражением

$$\delta^C = \frac{\sigma^C}{\sigma^0}. \tag{34}$$

Если верхний индекс отсутствует, то имеется в виду полная ЭМП: $\delta \equiv \delta^{\rm NLO}$.

Установим независимость полученных результатов от нефизических параметров. Для этого в табл. 2 приведены относительные поправки к сечению, рассчитанные с помощью W-метода при различных λ и с помощью метода Мо–Тсаи при различных ω в кинематике эксперимента PRad

Таблица 2. Структура относительных поправок к сечению, рассчитанных разными методами (левая часть таблицы — W-метод, правая — метод Мо–Тсаи), в условиях PRad ($E_{\rm lab} = 1.1$ ГэВ, $\theta_3 = 90°$, $\Omega = 0.01\sqrt{s}$)

$\lambda/\sqrt{s}$	V	R	$V+R$	$\omega/\sqrt{s}$	$V+S$	H	$V+S+H$
10^{-9}	−0.9777	0.8010	−0.1767	10^{-9}	−1.0706	0.8936	−0.1770
10^{-8}	−0.8497	0.6732	−0.1765	10^{-8}	−0.9426	0.7658	−0.1768
10^{-7}	−0.7218	0.5455	−0.1763	10^{-7}	−0.8147	0.6381	−0.1766
10^{-6}	−0.5938	0.4177	−0.1761	10^{-6}	−0.6867	0.5103	−0.1764
10^{-5}	−0.4658	0.2900	−0.1759	10^{-5}	−0.5587	0.3826	−0.1761
10^{-4}	−0.3379	0.1623	−0.1756	10^{-4}	−0.4308	0.2549	−0.1759
10^{-3}	−0.2099	0.0440	−0.1659	10^{-3}	−0.3028	0.1272	−0.1756

JLab. Рассмотрена кинематическая точка $E_{\rm lab} = 1.1$ ГэВ, $\theta_3 = 90°$, $\Omega = 0.01\sqrt{s}$. Эта же относительная поправка, рассчитанная в мягкофотонном приближении, равна −0.1748 (хорошее согласие обусловлено выбранным небольшим значением максимальной энергии фотона). В табл. 2 также отражена структура относительных поправок, видны логарифмические зависимости V, R-вкладов от λ (W-метод) и $V+S$, H-вкладов от ω (метод Мо–Тсаи).

В табл. 3 и 4 показаны относительные поправки к сечению при различных энергиях, рассчитанные соответственно с помощью W-метода и метода Мо–Тсаи с $\Omega = 0.05\sqrt{s}$. Приведено также значение относительной поправки, рассчитанной в мягкофотонном приближении, при энергии $E_{\rm lab} = 11$ ГэВ, соответствующей эксперименту MOLLER, относительная поправка воспроизводит известное значение $\delta^{\rm NLO,\,soft} = -0.1144$ из табл. 3 работы [12].

Проведенный анализ позволил установить сокращение зависимости от λ (W-метод) и ω (метод Мо–Тсаи). Оставшаяся слабая зависимость имеет порядок $\mathcal{O}(\frac{m^2}{s})\ln\frac{\omega}{\lambda}$ (при $E_{\rm lab} = 1.1$ ГэВ это дает для относительной поправки ошибку $\Delta\delta \sim 10^{-4}$). Для достижения большей точности результата в условиях небольших энергий PRad требуется последовательно удержать в расчете массовые слагаемые, как это было сделано в [21].

На рис. 7 и 8 приведены относительные поправки к сечению в условиях PRad в зависимости от Q^2 при разных ограничениях на неупругость и на максимальное значение фотонной энергии.

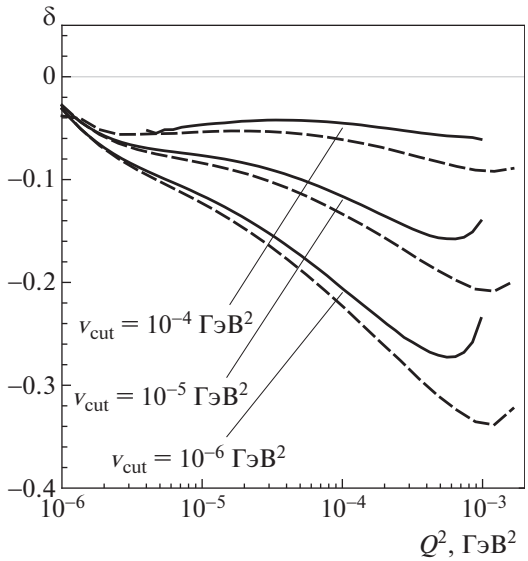

Рис. 7. Относительные поправки к сечению в условиях PRad в зависимости от Q^2 при разных ограничениях на неупругость.

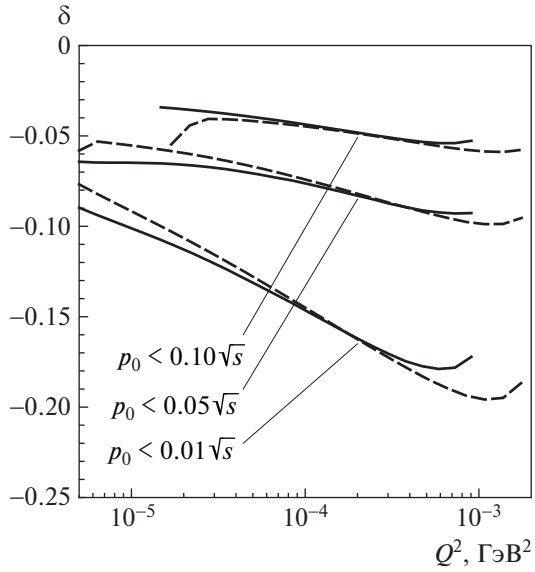

Рис. 8. Относительные поправки к сечению в условиях PRad в зависимости от Q^2 при разных ограничениях на максимальную энергию тормозного фотона.

Таблица 3. Относительные поправки к сечению при различных энергиях (W-метод, $\Omega = 0.05\sqrt{s}$)

$\lambda/\sqrt{s}$	E_{lab}, ГэВ			
	1.1	2.2	5	11
10^{-9}	−0.0898	−0.0983	−0.1086	−0.1186
10^{-8}	−0.0896	−0.0982	−0.1085	−0.1185
10^{-7}	−0.0894	−0.0980	−0.1085	−0.1185
10^{-6}	−0.0892	−0.0979	−0.1085	−0.1185
10^{-5}	−0.0890	−0.0978	−0.1084	−0.1184
10^{-4}	−0.0887	−0.0976	−0.1082	−0.1182
10^{-3}	−0.0876	−0.0961	−0.1054	−0.1129
δ^{soft}	−0.0854	−0.0942	−0.1046	−0.1144

Таблица 4. Относительные поправки к сечению при различных энергиях (метод Мо–Тсаи, $\Omega = 0.05\sqrt{s}$)

$\omega/\sqrt{s}$	E_{lab}, ГэВ			
	1.1	2.2	5	11
10^{-9}	−0.0899	−0.0983	−0.1086	−0.1185
10^{-8}	−0.0897	−0.0982	−0.1086	−0.1185
10^{-7}	−0.0894	−0.0981	−0.1085	−0.1185
10^{-6}	−0.0892	−0.0980	−0.1085	−0.1185
10^{-5}	−0.0890	−0.0979	−0.1084	−0.1185
10^{-4}	−0.0887	−0.0977	−0.1083	−0.1184
10^{-3}	−0.0879	−0.0969	−0.1076	−0.1176
δ^{soft}	−0.0854	−0.0942	−0.1046	−0.1144

Рассмотрены две опции энергии начальных электронов PRad (1.1 и 2.2 ГэВ). Рисунок 7 воспроизводит основные закономерности относительных поправок, установленные в работе [21]: падение с ростом Q^2, стремление к нулю при $Q^2 \to 0$, наличие минимума в области больших Q^2, качественно правильную зависимость от v_{cut} — значения v, которое ограничивает область интегрирования: см. горизонтальную верхнюю границу (было использовано $v_{\text{cut}} = 0.9v_{\max}$) на диаграмме Далица на рис. 6*a*. Схожее поведение демонстрируют и относительные поправки рис. 8. Для более детальной взаимной сверки в целях получения точного согласия требуется отдельное совместное с авторами [21] исследование (включающее выяснение необходимости удерживать массовые слагаемые в расчете, роль высших поправок и анализ в точном соответствии с возможностями детектора), которое будет осуществлено в ближайшем будущем.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция–2025” (подпрограмма “Микромир и Вселенная”). Автор признателен И.В. Акушевичу, Ю.М. Быстрицкому и А.Н. Ильичеву за обсуждение результатов работы.

Приложение

ФАЗОВЫЙ ОБЪЕМ ТИ

Изобразим в с.ц.м. векторы конечных частиц (см. рис. 5), используя вспомогательный вектор $\mathbf{p}_5 = -\mathbf{p}$. Для энергии конечного электрона с 4-импульсом p_3 получаем

$$p_{30} = \frac{\sqrt{s^3} + 2p_0^2\sqrt{s} - 3p_0 s + Ap_0 s_q}{2s - 4p_0\sqrt{s} + 2p_0^2(1 - A^2)}, \qquad (\text{П}.1)$$

где

$$s_q = \sqrt{s(\sqrt{s} - 2p_0)^2 + 4m^2\left[p_0^2(A^2 - 1) + 2p_0\sqrt{s} - s\right]},$$

а

$$\begin{aligned} A &= \cos(\widehat{\mathbf{p}_5, \mathbf{p}_3}) = \\ &= \sin\theta_3 \sin\theta_5 \cos\varphi_5 + \cos\theta_3 \cos\theta_5 = \\ &= -\sin\theta_3 \sin\theta_p \cos\varphi_p - \cos\theta_3 \cos\theta_p. \end{aligned} \qquad (\text{П}.2)$$

В УРП выражение для энергии приобретает компактный вид

$$p_{30} = \frac{\sqrt{s}}{2}\frac{\sqrt{s} - 2p_0}{\sqrt{s} - p_0(1 + A)}.$$

С учетом вышесказанного получим фазовый объем в виде

$$d\Phi_3 = \frac{|\mathbf{p}_3|}{4p_{40}\mathcal{F}} d\cos\theta_3 d\varphi_3 \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}. \qquad (\text{П}.3)$$

Интегрирование по азимутальному углу φ_3 дает 2π из-за симметрии относительно поворота системы вокруг оси пучка, а

$$\mathcal{F} = 1 + \frac{p_{30}(1 - A|\mathbf{p}|/|\mathbf{p}_3|)}{\sqrt{p_{30}^2 - 2A|\mathbf{p}||\mathbf{p}_3| + |\mathbf{p}|^2}}. \qquad (\text{П}.4)$$

Далее переходим к интегрированию по $\mathbf{p}$:

$$d^3\mathbf{p} = |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d\cos\theta_p d\varphi_p, \quad \theta_p = \pi - \theta_5,$$
$$\varphi_p = \pi + \varphi_5.$$

С использованием $\mathbf{p}_5$ векторы конечных частиц в с.ц.м. выглядят так:

$$\mathbf{p}_3 = (|\mathbf{p}_3|\sin\theta_3, 0, |\mathbf{p}_3|\cos\theta_3), \qquad (\text{П}.5)$$
$$\mathbf{p}_5 = (|\mathbf{p}|\sin\theta_5\cos\varphi_5, |\mathbf{p}|\sin\theta_5\sin\varphi_5, |\mathbf{p}|\cos\theta_5),$$
$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_5 - \mathbf{p}_3.$$

Ясно, что энергия $p_{40} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}_4|^2}$ может быть вычислена из системы (П.5).

Теперь выразим через энергию, азимутальный и полярный углы фотона все радиационные инварианты [28]:

$$z_1 = 2p_0p_{10} - 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_1|\cos\theta_p, \qquad (\text{П}.6)$$
$$v_1 = 2p_0p_{20} + 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_2|\cos\theta_p,$$
$$z = 2p_0p_{30} + 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_3|A,$$
$$v = 2p_0(\sqrt{s} - p_{30}) - 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_3|A.$$

Заметим, что во всех формулах различаются p_0 и $|\mathbf{p}|$: в них удерживается масса фотона λ (т. е. $p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 = \lambda^2 \to 0$), которая в дальнейшем будет использована как инфинитезимальный параметр для регуляризации инфракрасной расходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chr. Møller, Ann. Phys. **406**, 531 (1932).
2. D. Yu. Bardin and N. M. Shumeiko, Nucl. Phys. B **127**, 242 (1977).
3. N. M. Shumeiko and J. G. Suarez, J. Phys. G **26**, 113 (2000).
4. A. N. Ilyichev and V. A. Zykunov, Phys. Rev. D **72**, 033018 (2005); hep-ph/0504191.
5. A. Afanasiev, Eu. Chudakov, A. Ilyichev, and V. Zykunov, Comput. Phys. Commun. **176**, 218 (2007); JLAB-PHY-06-456, hep-ph/0603027.
6. P. L. Anthony *et al.* (SLAC E158 Collab.), Phys. Rev. Lett. **95**, 081601 (2005); hep-ex/0504049.
7. J. Erler and M. J. Ramsey-Musolf, Phys. Rev. D **72**, 073003 (2005); hep-ph/0409169.
8. MOLLER Collab. (J. Benesch *et al.*); arXiv: 1411.4088 [nucl-ex].
9. A. Czarnecki and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **53**, 1066 (1996).
10. Frank J. Petriello, Phys. Rev. D **67**, 033006 (2003); hep-ph/0210259.
11. В. А. Зыкунов, ЯФ **67**, 1366 (2004) [Phys. At. Nucl. **67**, 1342 (2004)].
12. A. Aleksejevs, S. Barkanova, A. Ilyichev, and V. Zykunov, Phys. Rev. D **82**, 093013 (2010); arXiv: 1008.3355 [hep-ph].
13. C. A. Heusch, Int. J. Mod. Phys. A **15**, 2347 (2000).
14. A. Denner and S. Pozzorini, Eur. Phys. J. C **7**, 185 (1999); hep-ph/9807446.
15. В. А. Зыкунов, ЯФ **72**, 1540 (2009) [Phys. At. Nucl. **72**, 1486 (2009)].
16. А. Г. Алексеев, С. Г. Барканова, В. А. Зыкунов, ЯФ **75**, 231 (2012) [Phys. At. Nucl. **75**, 209 (2012)].
17. R. Pohl *et al.*, Nature **466**, 213 (2010).
18. A. Antognini *et al.*, Science **339**, 417 (2013).
19. A. Gasparian, D. Dutta, H. Gao, and M. Khandaker, Jefferson Laboratory Experiment E12-11-106 (2011).
20. A. Gasparian, H. Gao, D. Dutta, N. Liyanage, E. Pasyuk, D. W. Higinbotham, C. Peng, K. Gnanvo, I. Akushevich, A. Ahmidouch, C. Ayerbe, X. Bai, H. Bhatt, D. Bhetuwal, J. Brock, V. Burkert, *et al.*, arXiv: 2009.10510v1 [nucl-ex].
21. I. Akushevich, H. Gao, A. Ilyichev, and M. Meziane, Eur. Phys. J. A **51**, 1 (2015).
22. W. Xiong, A. Gasparian, H. Gao, D. Dutta, M. Khandaker, N. Liyanage, E. Pasyuk, C. Peng, X. Bai, L. Ye, K. Gnanvo, C. Gu, M. Levillain, X. Yan, D. W. Higinbotham, M. Meziane, *et al.*, Nature **575**, 147 (2019).
23. S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, and S. I. Eidelman, Phys. Part. Nucl. Lett. **16**, 514 (2019).
24. M. Böhm, H. Spiesberger, and W. Hollik, Fortschr. Phys. **34**, 687 (1986).
25. F. Bloch and A. Nordsieck, Phys. Rev. **52**, 54 (1937).
26. L. W. Mo and Y. S. Tsai, Rev. Mod. Phys. **41**, 205 (1969).
27. G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979).
28. В. А. Зыкунов, ЯФ **78**, 489 (2015) [Phys. At. Nucl. **78**, 453 (2015)].
29. Е. Бюклинг, К. Каянти, *Кинематика элементарных частиц* (Мир, Москва, 1975).
30. R. H. Dalitz, Phil. Mag. **44**, 1068 (1953).
31. G. F. Chew and F. E. Low, Phys. Rev. **113**, 1640 (1959).
32. P. G. Lepage, J. Comput. Phys. **27**, 192 (1978).
33. В. А. Зыкунов, ЯФ **80**, 388 (2017) [Phys. At. Nucl. **80**, 699 (2017)].
34. В. А. Зыкунов, *Пертурбативные расчеты в физике высоких энергий* (ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, 2020).
35. MINAMI-TATEYA Group Collab. (T. Ishikawa *et al.*), KEK-92-19.

RADIATIVE CORRECTIONS IN MØLLER SCATTERING FOR EXPERIMENT PRad IN JLab

V. A. Zykunov[1),2)]

[1)] *JINR, Dubna, Moscow region, Russia*
[2)] *Francisk Skorina Gomel State University, Belarus*

Electromagnetic radiative corrections to low energy Møller scattering for the conditions of the PRad experiment in Jefferson Laboratory using several methods for infrared divergency extraction are calculated.