АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2019, том 65, № 1, с. 3–9

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.222

# ИНТЕНСИВНЫЕ ИМПУЛЬСЫ В РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕДАХ С ОГРАНИЧЕННЫМ "ВРЕМЕНЕМ ПАМЯТИ", СТЕПЕННЫМИ И НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© 2019 г. О. А. Васильева[a], *, Е. А. Лапшин[b], О. В. Руденко[c, d, e, f], **

[a]Московский государственный строительный университет
Россия, 129337 Москва, Ярославское ш. 26

[b]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет
Россия, 119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы

[c]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы

[d]Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН
Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова 38

[e]Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН
Россия, 123242 Москва, ул. Б. Грузинская 10

[f]Blekinge Institute of Technology Karlskrona, Sweden

*e-mail: vasiljeva.ovas@yandex.ru

**e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 06.08.2018 г.
После доработки 06.08.2018 г.
Принята к публикации 28.08.2018 г.

Изучены процессы, сопровождающие распространение ограниченных во времени импульсных сигналов в релаксирующей среде, которая обладает нелинейностью одного из следующих типов: степенной (квадратичной, кубичной) или неаналитической (модульной, квадратично–кубичной). Вместо обычных интегро-дифференциальных уравнений с экспоненциальными или дробно-степенными ядрами использована упрощенная модель среды с конечным "временем памяти". Такая среда "помнит" свою предысторию в течение ограниченного промежутка времени, а соответствующее ядро интегрального члена отлично от нуля лишь на конечном интервале. Для этой модели удается свести задачу к решению дифференциально-разностного уравнения и существенно сократить объем вычислений по сравнению с исходным интегральным уравнением. Описаны процессы, сопровождающие эволюцию импульсов – формирование ударных фронтов сжатия и разрежения, нелинейных структур треугольной и трапециевидной формы. Выяснено влияние времени релаксации на протекание указанных процессов.

*Ключевые слова:* фронт сжатия и разрежения, нелинейность, время релаксации, метаматериал, интегро-дифференциальное уравнение, дифференциально-разностное уравнение

**DOI:** 10.1134/S0320791919010131

## ВВЕДЕНИЕ

Интегро-дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\theta}f(V)-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int\limits_0^\infty K(s)V(\theta-s)\,ds\right]=\Delta_\perp V \quad (1)$$

имеют весьма общий смысл и широкую область применимости [1]. Здесь $K(s)$ – ядро интегрального члена уравнения (1), а $f(V)$ – нелинейный член, который может соответствовать степенной (квадратичной $Q$, кубичной $C$) или неаналитической (модульной $M$, квадратично-кубичной $QC$) нелинейности. Член $f(V)$ может представлять также любую линейную комбинацию перечисленных выше нелинейностей. Обозначения $Q$, $C$, $M$, $QC$ для краткости будут использованы в дальнейшем изложении. Смысл остальных обозначений таков: $V$ – акустическое давление, нормированное на характерную величину (исходную амплитуду волны); $\theta$ – время в сопровождающей системе координат, нормированное на исходную частоту; $z$ – пройденное волной расстояние, отнесенное к характерной нелинейной длине.

Для вырожденных ядер $K(s)$, представляющих собой комбинацию дельта-функции и ее производных, из (1) получаются уравнения типа Хохлова–Заболотской, Кадомцева–Петвиашвили, Хохлова–Заболотской–Кузнецова и другие подобные уравнения для пучков, а в случае одномерных волн – уравнения типа Хопфа, Бюргерса и аналогичные эволюционные уравнения с высшими производными. Дифференциальные уравнения следуют из (1) и для некоторых других ядер [2]. Наиболее известны уравнения с экспоненциальным ядром:

$$K(s) = D\exp\left(-\frac{s}{\theta_{\text{rel}}}\right), \tag{2}$$

которое следует из релаксационной модели Мандельштама–Леонтовича [3]. В этом случае для плоских волн из (1) получается

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\theta_{\text{rel}}}\right)\left[\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial\theta} f(V)\right] = D\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}. \tag{3}$$

Это уравнение в форме (3) выведено в работе [4], а в интегральной форме – в работе [5].

Разнообразные формы ядер, полезные для приложений, обсуждаются в статье [6]. В частности, степенные зависимости коэффициента затухания волны от частоты с дробными показателями степени, типичные для биологических тканей и геофизических структур, принципиально требуют интегро-дифференциального описания. То же относится к средам со сложной внутренней динамикой релаксационного типа.

Как находится ядро $K(s)$ в каждом конкретном случае? Частотные зависимости дисперсии и поглощения (действительной и мнимой части волнового числа $k'(\omega)$, $k''(\omega)$) измеряются или определяются из физической модели типа Мандельштама–Леонтовича. Затем решается обратная задача, и ядро реконструируется стандартными методами, использующими принцип причинности и соотношения типа Крамерса–Кронига [7].

Например, показатель степени в частотной зависимости затухания в биотканях изменяется от 2.1 (кости черепа) до 1.1 (скелет) и 0.6 (кожа) [8]. Чаще всего в диапазоне единиц мегагерц (медицинский ультразвук) $k'' \sim \omega^{2-\nu}$, $0 < \nu < 1$. Для такой зависимости нетрудно показать, что $K(s) \sim s^{\nu-1}$. Особенность при $s = 0$ часто оказывается несущественной, поскольку уравнение содержит “свертку” сингулярного ядра с осциллирующей функцией, описывающей поле волны.

Точных решений для уравнений (1) известно немного. Найдены, например, стационарные решения для сред с $Q$- и $QC$-нелинейностями (в работах [3] и [9] соответственно) и экспоненциальной релаксацией.

Если интересоваться не конкретной средой, а общими свойствами нелинейных волн, удобен прием, сводящий интегро-дифференциальное уравнение к дифференциально-разностной модели или даже к простому отображению. Этот переход [6, 9] эффективен для ядер, отличных от нуля на конечном интервале. Простейший случай соответствует среде с постоянной “памятью”, для которой

$$K(s) = D\begin{cases}1, & 0 < s < \theta_{\text{rel}}\\ 0, & s > \theta_{\text{rel}}\end{cases}. \tag{4}$$

Иными словами, до момента $s = \theta_{\text{rel}}$ среда “все помнит”, а в этот момент “все забывает”. При наличии такого ядра уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial\theta} f(V) = D\frac{\partial}{\partial\theta}\left[V(z,\theta) - V(z,\theta-\theta_{\text{rel}})\right]. \tag{5}$$

Для стационарной волны (5) превращается в разностное соотношение:

$$V(\theta-\theta_{\text{rel}}) = V(\theta) - \frac{1}{D}\left[C - f(V(\theta))\right]. \tag{6}$$

Отображение (6) $V(\theta) \to V(\theta-\theta_{\text{rel}})$ описывает фронт ударной волны с шириной, растущей с увеличением числа $D$. Константа $C$ определяется из условия на бесконечности. Например, если $V(\theta\to\infty) \to V_0$, то $C = f(V_0)$.

## ИМПУЛЬСЫ В СРЕДАХ С ЧЕТНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассмотрим процессы эволюции импульсных сигналов в релаксирующих средах с конечным временем памяти, обладающих нелинейностями четного типа – квадратичной $Q$ или модульной $M$. Положим в уравнении (5) соответственно

$$f(V) = f_Q(V) = \frac{1}{2}V^2,\quad f(V) = f_M(V) = |V|. \tag{7}$$

Для обеих нелинейностей $f_Q, f_M$ имеем $f(-V) = f(V)$. Однако решение уравнения (5) этой симметрией обладать не будет.

В первом случае для степенной $Q$-нелинейности уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}V^2 = D\frac{\partial}{\partial\theta}\left[V(z,\theta) - V(z,\theta-\theta_{\text{rel}})\right]. \tag{8}$$

Пусть на границе $z = 0$ исходная форма сигнала дается функцией $V(z=0,\theta) = \sin\theta$, отличной от нуля в области $-2\pi < \theta < 2\pi$. Иными словами, импульс представляет собой отрезок синусоиды, содержащий два ее периода. С точки зрения авторов, выбранная форма позволяет наглядно продемонстрировать основные проявления нелинейных и релаксационных эффектов.

Процесс эволюции такого импульса показан на рис. 1 для значений параметров $D = 0.1, \theta_{\text{rel}} = 1$.

Наблюдается формирование ударных фронтов сжатия. Положительные и отрицательные области профиля искажаются неодинаково, как и должно быть в среде с релаксацией (см. [10–12]). В целом импульс уширяется из-за "разбегания" ударных фронтов, занимавших исходное положение в точках $\theta = \pm 2\pi$. Этот процесс приводит на больших расстояниях к превращению исходного сигнала в двуполярный импульс типа $N$-волны.

Напротив, другие точки $\theta = \pm\pi$ остаются "закрепленными" и не меняют своего положения в процессе распространения волны. Между ними при $\theta = 0$ образуется ударный фронт сжатия, после чего область $-\pi < \theta < \pi$ начинает интенсивно затухать. Профиль в этой области ведет себя подобно волне $S$-типа.

Напомним, что $Q$-нелинейность является основной в нелинейной акустике жидких и газообразных сред [10]. Она возникает в силу двух обстоятельств. Во-первых, в уравнениях механики сплошных сред присутствуют нелинейные члены (пример – конвективный член $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$ в уравнении движения Эйлера или Навье–Стокса). Эту нелинейность обычно называют "геометрической". Во-вторых, имеется "физическая" нелинейность, связанная с нелинейным характером процесса деформирования среды и в конечном итоге – с нелинейностью сил межмолекулярного взаимодействия. Математически она дается квадратичным членом разложения в степенной ряд возмущения плотности среды по малым возмущениям акустического давления.

Рассмотрим теперь неаналитическую четную нелинейность $M$-типа, для которой уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta}|V| = D\frac{\partial}{\partial \theta}\left[V(z,\theta) - V(z,\theta-\theta_{\text{rel}})\right]. \quad (9)$$

Как и в предыдущем случае, считаем, что на границе $z = 0$ исходная форма сигнала дается функцией $V(z = 0,\theta) = \sin\theta$, отличной от нуля в области $-2\pi < \theta < 2\pi$. Процесс эволюции сигнала при его распространении в среде иллюстрирован на рис. 2. Значения параметров $D = 0.2, \theta_{\text{rel}} = 1$.

Аналогично случаю, показанному на рис. 1, здесь область $-\pi < \theta < \pi$ также вырождается в результате нелинейного затухания, причем еще быстрее, чем для $Q$-нелинейной среды. Для кривых *5* и *6* на рис. 2 ($z = 5, 10$) волновое возмущение в пределах $-\pi < \theta < \pi$ практически неотличимо от нуля. В этой области профиль волны описывается асимптотическими формулами, полученными в работе [13]. На расстояниях $z = 5, 10$ полный профиль волны представляет собой два удаляющихся друг от друга импульса разной полярности.

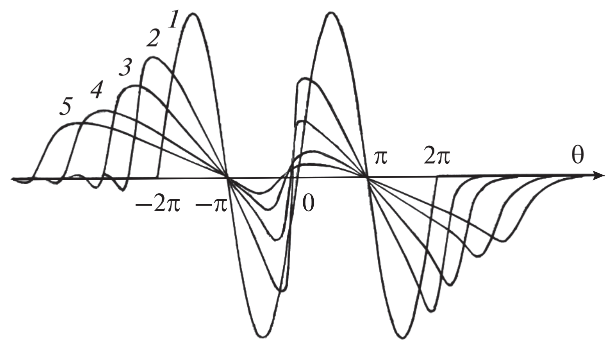


**Рис. 1.** Трансформация импульса, описываемая квадратично нелинейным уравнением (8). Исходная форма импульса дается функцией $V(z = 0,\theta) = \sin\theta$ (кривая *1*), она отлична от нуля в области $-2\pi < \theta < 2\pi$. Параметры $D = 0.1$, $\theta_{\text{rel}} = 1$. Кривые *1–5* построены для расстояний $z = 0$, 2.5, 5, 10, 15.

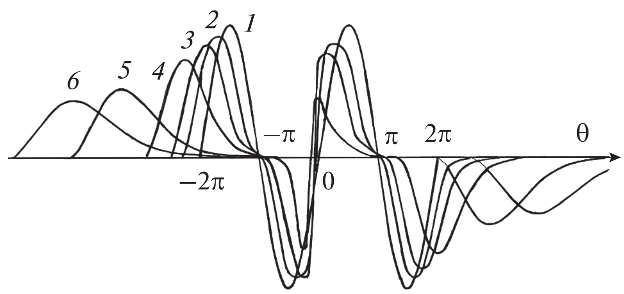


**Рис. 2.** Трансформация импульса, описываемая уравнением (9) с модульной нелинейностью. Исходная форма импульса дается функцией $V(z = 0,\theta) = \sin\theta$ (кривая *1*), она отлична от нуля в области $-2\pi < \theta < 2\pi$. Параметры $D = 0.2$, $\theta_{\text{rel}} = 1$. Кривые *1–6* построены для расстояний $z = 0$, 0.5, 1, 2, 5, 10.

Напомним, что $M$-нелинейность встречается в твердых телах, имеющих различные модули упругости по отношению к деформациям сжатия и растяжения. Обычно она встречается в средах с дефектами их надмолекулярной структуры и связана с так называемой "структурной" нелинейностью. Модульная $M$-нелинейность дает линейную зависимость амплитуды второй гармоники от амплитуды первой $(A_2 \sim A_1)$, в то время как квадратичная или $Q$-нелинейность дает иную зависимость $\left(A_2 \sim A_1^2\right)$. В общем случае, когда существенны обе нелинейности, показатель степени в зависимости $A_2 = KA_1^m$ лежит в области от 1 до 2 [14]. Это явление наблюдалось в эксперименте [15]. Предприняты попытки создания элементов с $M$-нелинейностью [16, 17] для включения их в матрицу метаматериала.

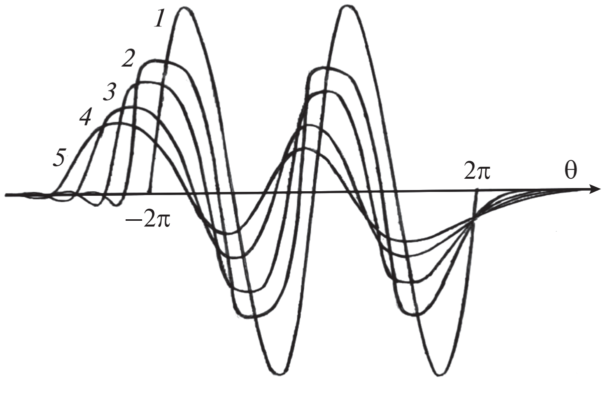


**Рис. 3.** Трансформация импульса, описываемая кубично нелинейным уравнением (11). Исходная форма импульса дается функцией $V(z=0,\theta)=\sin\theta$ (кривая *1*), она отлична от нуля в области $-2\pi<\theta<2\pi$. Параметры $D=0.1$, $\theta_{\mathrm{rel}}=1$. Кривые *1–5* построены для расстояний $z=0$, 2.5, 5, 10, 15.

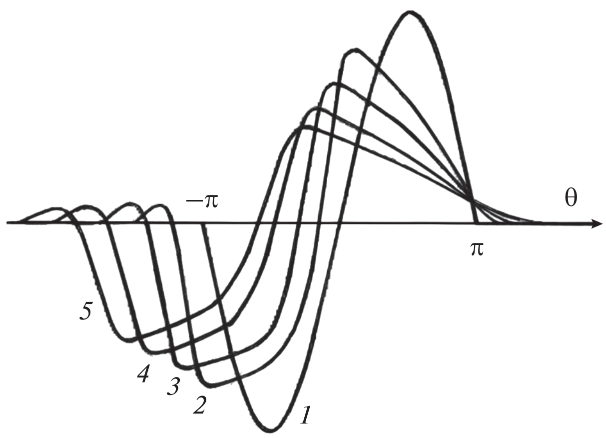


**Рис. 4.** Трансформация импульса, описываемая кубично нелинейным уравнением (11). Исходная форма импульса дается функцией $V(z=0,\theta)=\sin\theta$ (кривая *1*), она отлична от нуля в области $-\pi<\theta<\pi$. Параметры $D=0.02$, $\theta_{\mathrm{rel}}=1$. Кривые *1–5* построены для расстояний $z=0$, 2.5, 5, 10, 15.

## ИМПУЛЬСЫ В СРЕДАХ С НЕЧЕТНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Перейдем теперь к изучению импульсных сигналов в релаксирующих средах с конечным временем памяти, обладающих нелинейностями нечетного типа — кубичной *C* или квадратично-кубичной *QC*. Положим в уравнении (5) соответственно

$$f(V)=f_C(V)=\frac{1}{3}V^3,\quad f(V)=f_{QC}(V)=\frac{1}{2}V|V|.\qquad(10)$$

Для степенной нелинейности *C*-типа уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\theta}V^3=D\frac{\partial}{\partial\theta}\left[V(z,\theta)-V(z,\theta-\theta_{\mathrm{rel}})\right].\qquad(11)$$

Поведение решения уравнения (11) изображено на рис. 3 для тех же значений параметров и той же исходной формы импульса, что и на рис. 1.

Основное различие в поведении волн в средах с *Q*- и *C*-нелинейностями, как видно из сравнения рисунков, состоит в следующем. В *Q*-среде с положительным знаком нелинейности, в которой локальная скорость распространения увеличивается с ростом возмущения, могут образовываться только ударные фронты сжатия. Поэтому при достаточно слабой диссипации и дисперсии (малые числа *D*) волна превращается в последовательность импульсов треугольной формы с ударными передними фронтами. В средах же с нечетными нелинейностями форма импульсов в последовательности иная — она близка к трапециевидной (кривые *2* и *3* на рис. 3).

Трапециевидные структуры в профиле волны более четко выражены на рис. 4, кривые *3–5*. Эти профили построены для значения параметра $D=0.02$, меньшего, чем для кривых на рис. 2, где $D=0.2$. Поэтому здесь диссипативное сглаживание ударных фронтов выражено слабее.

Формирование нелинейных структур трапециевидной формы происходит потому, что в *C*-среде могут существовать как ударные волны сжатия, так и ударные волны разрежения [11].

Напомним, что *C*-нелинейность является основным видом нелинейности для поперечных упругих волн в бездефектных изотропных твердых телах. Большой интерес к *C*-нелинейным волнам возник в связи с использованием интенсивного ультразвука для возбуждения сдвиговых волн в мягких биологических тканях.

Обсудим теперь поведение волны в квадратично-кубичной *QC*-среде с релаксацией. Эволюцию профиля волны будем описывать уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}V|V|=D\frac{\partial}{\partial\theta}\left[V(z,\theta)-V(z,\theta-\theta_{\mathrm{rel}})\right].\qquad(12)$$

Поскольку, как уже было указано (10), неаналитическая *QC*-нелинейность является нечетной, поведение импульса на рис. 5 качественно похоже на поведение такого же импульса в *C*-нелинейной среде (рис. 3). Здесь тоже образуются ударные волны как сжатия, так и разрежения, а также трапециевидные нелинейные структуры.

Заметим, что нечетные нелинейности (10) изменяют скорость распространения сигнала. Этот “эффект самовоздействия” приводит к сдвигу профиля волны вперед (см. рис. 3–5), а в случае пучков, ограниченных в поперечном сечении — к их самофокусировке или, напротив, к саморефракции.

Следует указать, что $QC$-модели применимы к описанию нескольких физических объектов. Экспериментально показано [19], что при больших интенсивностях звука отверстие в пластинке обнаруживает нелинейный отклик. При этом связь акустического давления с колебательной скоростью дается приближенно формулой $p' = \varsigma u|u|$. Аналогичный член появляется в интеграле Коши—Лагранжа при осциллирующем движении среды. Таблицы коэффициентов $\varsigma$ для различных форм обтекаемых препятствий даны в справочнике [20]. Добавляя нелинейный член такого вида в уравнения гидродинамики, нетрудно с помощью стандартных упрощений вывести эволюционное $QC$-уравнение. Метаматериал с $QC$-нелинейностью можно изготовить, размещая обтекаемые элементы в объеме жидкости. Эффект $QC$-нелинейности проявляется, в частности, в горле резонаторов Гельмгольца с волокнистым наполнителем, которые используются для поглощения интенсивного звука [21].

Еще один пример связан со спектральными измерениями. Если на входе $QC$-среды задан монохроматический сигнал, то в среде рождаются гармоники, низшая из которых — третья. На малых расстояниях она пропорциональна квадрату амплитуды волны основной частоты ($\sim p_0'^2$) и растет с расстоянием как $z^1$. Однако в обычной $Q$-среде эти зависимости имеют другой вид: $\sim p_0'^3$ и $\sim z^2$. Часто наблюдают отклонения от них. Например, в поликристаллах сплава алюминия отклонения от законов $\sim p_0'^3$ и $\sim z^2$ объяснялись нелинейным трением на межзеренных границах [22]. Поведение $QC$-типа описано также для сдвиговых волн (например, в мягких биотканях), симметрия которых не допускает $Q$-эффектов. В любом случае зависимости третьей гармоники от расстояния $\sim z^m, (1 < m < 2)$ и от амплитуды $\sim p_0'^k$ $(2 < k < 3)$ свидетельствуют о наличии $QC$-элементов в объеме среды. Другие приложения и эксперимент описаны в обзоре [23].

## ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ

В предыдущих расчетах всюду полагалось $\theta_{\rm rel} = 1$. Таким образом, безразмерные параметры — характерная частота исходного сигнала и время релаксации — оказались связанными. Теперь для лучшего понимания влияния релаксационных процессов на трансформацию профиля волны нужно варьировать параметр $\theta_{\rm rel}$.

Эффекты релаксации хорошо проявляются при рассмотрении однополярных импульсов. На рис. 6 изображен процесс эволюции положительного импульса, исходная форма которого дается

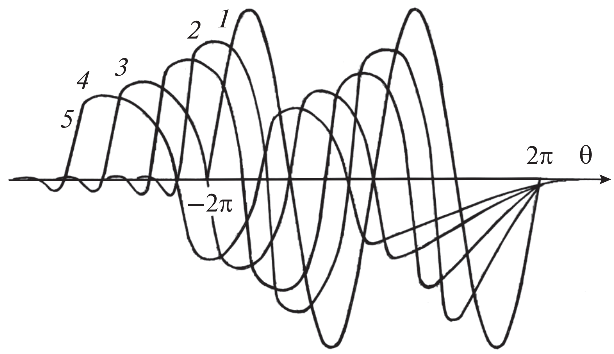


**Рис. 5.** Трансформация импульса, описываемая квадратично-кубичным нелинейным уравнением (12). Исходная форма импульса дается функцией $V(z = 0, \theta) = \sin\theta$ (кривая *1*), она отлична от нуля в области $-2\pi < \theta < 2\pi$. Параметры $D = 0.02$, $\theta_{\rm rel} = 1$. Кривые *1*–*5* построены для расстояний $z = 0,\ 2.5,\ 5,\ 10,\ 15$.

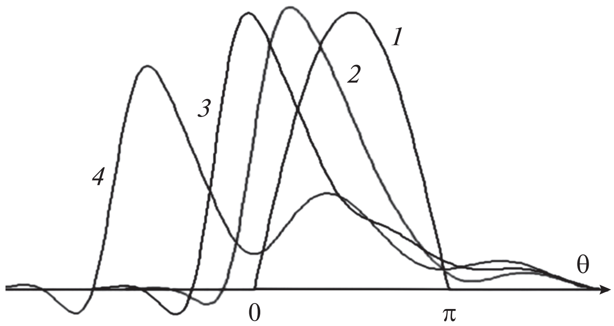


**Рис. 6.** Трансформация импульса, описываемая квадратично нелинейным уравнением (8). Исходная форма импульса дается функцией $V(z = 0, \theta) = \sin\theta$ (кривая *1*), она отлична от нуля в области $0 < \theta < \pi$. Параметры $D = 0.1$, $\theta_{\rm rel} = 1$. Кривые *1*–*4* построены для расстояний $z = 0,\ 1,\ 2,\ 5$.

половиной периода синусоиды. Наряду с нелинейным увеличением крутизны переднего фронта волны здесь отчетливо выражены эффекты, связанные с релаксацией. Во-первых, это затухание, уменьшающее максимальное пиковое значение возмущения с ростом пройденного волной расстояния. Во-вторых, это дисперсионное увеличение скорости движения переднего фронта. Наконец, это "затягивание" заднего фронта волны, также связанное с дисперсией.

Перейдем теперь к сравнению профилей положительного однополярного импульса (рис. 6), прошедшего одинаковое расстояние, но в средах с разным временем релаксации. Такие профили представлены на рис. 7 для расстояния $z = 5$. Кривые *1*–*3* построены для разных времен релак-

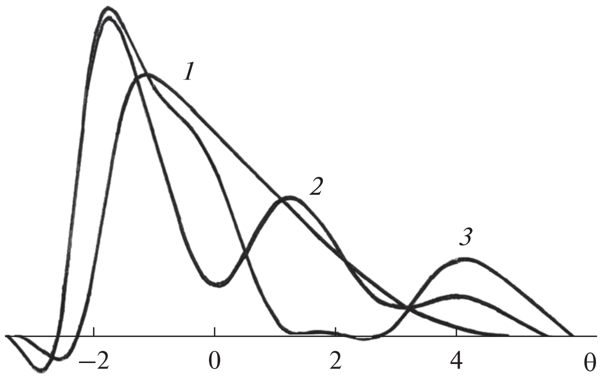


**Рис. 7.** Форма "положительного" импульса, построенная согласно решению квадратично нелинейного уравнения (8). Исходная форма дается функцией $V(z=0,\theta)=\sin\theta$, которая отлична от нуля в области $0<\theta<\pi$. Параметр $D=0.1$, расстояние $z=5$. Кривые *1–3* построены для разных времен релаксации $\theta_{\rm rel}=0.5$, 2, 3.

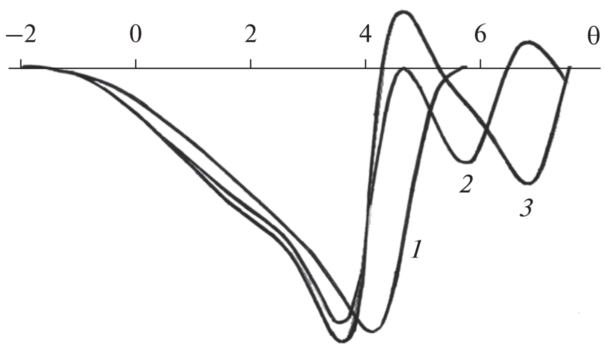


**Рис. 8.** Форма "отрицательного" импульса, построенная согласно решению квадратично нелинейного уравнения (8). Исходная форма дается функцией $V(z=0,\theta)=-\sin\theta$, которая отлична от нуля в области $0<\theta<\pi$. Параметр $D=0.1$, расстояние $z=5$. Кривые *1–3* построены для разных времен релаксации $\theta_{\rm rel}=0.5$, 2, 3.

сации $\theta_{\rm rel}=0.5$, 2, 3. Видно, что дисперсионные эффекты, о которых говорилось при обсуждении рис. 6, с ростом $\theta_{\rm rel}$ заметно усиливаются.

Сравним теперь профили отрицательного однополярного импульса (рис. 8), прошедшего одинаковое расстояние в средах с разным временем релаксации. Кривые на рис. 8 построены для тех же значений параметров, что и на рис. 7 для положительного импульса. Кривые *1*, *2* и *3* отвечают последовательно увеличивающимся значениям $\theta_{\rm rel}$. Видно, что с усилением релаксации затягивание заднего фронта усиливается, в то время как передний фронт искажается заметно слабее, вне зависимости от $\theta_{\rm rel}$.

## ДРУГИЕ УПРОЩЕННЫЕ МОДЕЛИ И ЗАКОНЫ ДИСПЕРСИИ

Найдем закон дисперсии для модели (5). Запишем это уравнение в линеаризованной форме, положив $f(V)\equiv 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial z}=D\frac{\partial}{\partial\theta}\left[V(z,\theta)-V(z,\theta-\theta_{\rm rel})\right]. \tag{13}$$

Ищем решение в виде

$$V=A(z)\exp(-i\omega\theta). \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$V=A_0\exp\left\{-i\omega\left[\theta+2D\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\theta_{\rm rel}\right)z\right]-\right.$$
$$\left.-\,D\omega\sin(\omega\theta_{\rm rel})z\right\}. \tag{15}$$

Дополнительный член к мнимой части в показателе экспоненты (пропорциональный $D$) описывает добавку к скорости распространения волны, зависящую от частоты. Действительная часть показателя описывает затухание (при $\omega\theta_{\rm rel}<\pi$).

Очевидно, модель (5), (13) допускает обобщение. Реальное ядро $K(s)$ можно кусочно аппроксимировать не двумя константами, как в формуле (4), а несколькими постоянными (в пределах нескольких ограниченных интервалов) значениями. При этом в правой части уравнений (5), (13) появится сумма членов со "сдвинутыми" аргументами.

Еще одна упрощенная модель получается с использованием ядра со следующей линейно убывающей "памятью":

$$K(s)=D\begin{cases}\left(1-\dfrac{s}{\theta_{\rm rel}}\right), & 0<s<\theta_{\rm rel},\\ 0, & s>\theta_{\rm rel}.\end{cases} \tag{16}$$

При этом вместо (5) получается такое дифференциально-разностное уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\theta}f(V)-D\frac{\partial V}{\partial\theta}=$$
$$=-\frac{D}{\theta_{\rm rel}}\left[V(z,\theta)-V(z,\theta-\theta_{\rm rel})\right]. \tag{17}$$

К удобным для численного анализа уравнениям приводит комбинация представлений (4) и (16), то есть произвольная кусочно-линейная аппроксимация, приближающая ядро $K(s)$ с нужной нам точностью.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При численном исследовании сформулированных в этой работе задач использовались разностные схемы третьего порядка точности сквозного расчета разрывов, описанные в работах [12, 24].

На наш взгляд, исследования нелинейных процессов в нелинейных средах с модельными типами ядер следует продолжить, поскольку прямое интегрирование интегро-дифференциальных уравнений (1) представляет собой гораздо более сложную проблему. При этом целесообразно начать с модели (17) и других аналогичных упрощенных дифференциально-разностных уравнений.

Работа поддержана грантом РНФ № 14-22-00042.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Rudenko O.V., Soluyan S.I., Khokhlov R.V.* Problems of the theory of nonlinear acoustics // Sov. Phys. Acoustics. V. 20. № 4. P. 356–359.
2. *Ibragimov N.H., Meleshko S.V., Rudenko O.V.* Group analysis of evolutionary integrodifferential equations describing nonlinear waves: the general model // J. Physics A. 2011. V. 44. № 315201.
3. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. New York: Elsevier, 2018.
4. *Polyakova A.L., Soluyan S.I., Khokhlov R.V.* Propagation of finite disturbances in a relaxing medium // Sov. Phys. Acoustics. 1962. V. 8. № 1. P. 78–82.
5. *Rudenko O.V., Soluyan S.I.* The scattering of sound by sound // Sov. Phys. Acoustics. 1973. V. 18. № 3. P. 352–355.
6. *Rudenko O.V.* Nonlinear Integro-Differential Models for Intense Waves in Media Like Biological Tissues and Geostructures with Complex Internal Relaxation-Type Dynamics // Acoust. Phys. 2014. V. 60. № 4. P. 398–404.
7. *Vinogradova M.B., Rudenko O.V., Sukhorukov A.P.* Theory of Waves (3rd Edition). Moscow: Lenand, 2015.
8. Physical Principles of Medical Ultrasound. 2nd edition / Eds Hill C.R., Bamber J.C., ter Haar G.R. New York: JohnWiley & Sons, 2004. 528 p.
9. *Rudenko O.V.* Exact solutions of an integro-differential equation with quadratically cubic nonlinearity // Doklady Mathematics. 2016. V. 94. № 1. P. 468–471.
10. *Rudenko O.V., Soluyan S.I.* Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. New York: Plenum, Concultants Bureau, 1977. 274 p.
11. *Rudenko O.V., Gurbatov S.N., Hedberg C.M.* Nonlinear Acoustics through Problems and Examples. Victoria, Canada: Trafford, 2011.
12. *Vasilyeva O.A., Karabutov A.A., Lapshin E.A., Rudenko O.V.* Interactions of One-Dimensional Waves in Nonlinear Non-Dispersive Media. Moscow: Mosc. Univ. Press, 1983.
13. *Rudenko O.V.* Equation admitting linearization and describing waves in dissipative media with modular, quadratic, and quadratically cubic nonlinearities // Doklady Mathematics. 2016. V. 94. № 3. P. 703–707.
14. *Gray A.L., Rudenko O.V.* An intense wave in defective media containing both quadratic and modular nonlinearities: shock waves, harmonics and nondestructive testing // Acoust. Phys. 2018. V. 64. № 4. P. 402–407.
15. *Korobov A.I., Kokshaiskii A.I., Prokhorov V.M., Evdokimov I.A., Perfilov S.A., Volkov A.D.* Mechanical and nonlinear elastic characteristics of polycrystalline aluminum alloy and nanocomposite // Phys. Solid State. 2016. V. 58. № 12. P. 2472–2480.
16. *Mikhailov S.G., Rudenko O.V.* A simple bimodular nonlinear element // Acoust. Phys. 2018. V. 64. № 3. P. 293–298.
17. *Mikhailov S.G., Rudenko O.V.* A simple nonlinear element model // Acoust. Phys. 2017. V. 63. № 3. P. 270–274.
18. *Rudenko O.V., Sapozhnikov O.A.* Self-action effects for wave beams containing shock fronts // Physics Uspekhi. 2004. V. 47. № 9. P. 907–922.
19. *Ingard U.* Nonlinear distorsion of sound transmitted through an orifice // J. Acoust. Soc. Am. 1970. V. 48. № 1. P. 32–33.
20. *Idelchik I.E.* Flow Resistance: A Design Guide for Engineers. NY: Hemisphere, 1989.
21. *Rudenko O.V., Khirnykh K.L.* Model of Helmholtz resonator for absorption of high-intensity sound // Sov. Phys. Acoustics. 1990. V. 36. № 3. P. 527–534.
22. *Korobov A.I., Izosimova M.Yu.* Nonlinear Lamb waves in a metal plate with defects // Acoust. Phys. 2006. V. 52. № 5. P. 683–692.
23. *Rudenko O.V.* Nonlinear dynamics of quadratically-cubic systems // Physics-Uspekhi. 2013. V. 56. № 7. P. 683–690.
24. *Vasilyeva O.A., Lapshin E.A., Rudenko O.V.* Projection of the Khokhlov–Zabolotskaya equation on the axis of wave beam as a model of nonlinear diffraction. // Doklady Mathematics. 2017. V. 96. № 3. P. 646–649.