АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2019, том 65, № 3, с. 305–310

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.222

О НЕЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЯХ В УЗКИХ ТРУБКАХ

© 2019 г. О. В. Руденко[a, *], А. Б. Шварцбург[b]

[a]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Россия

[b]Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412 Москва, Ижорская ул. 13/19, Россия

*e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 11.01.2019 г.
После доработки 11.01.2019 г.
Принята к публикации 18.02.2019 г.

Рассмотрены явления, возникающие при распространении волн в узких трубках. Для нелинейных волн, описываемых обобщенным уравнением типа Вебстера, получено упрощенное нелинейное уравнение. Оно учитывает низкочастотную геометрическую дисперсию, которая приводит к несимметричному искажению профиля периодической волны, качественно похожему на искажение нелинейной волны в дифрагирующем пучке. Исследован режим туннелирования волны через сужение трубки специального вида. Обсуждены возможные приложения явления и его связь с задачами квантовой механики, обусловленная аналогией базовых уравнений типа Клейна–Гордона и Шредингера. Указано на важность изучения туннелирования нелинейных волн и широкополосных сигналов.

Ключевые слова: волновое туннелирование, нелинейность, уравнение Вебстера, сужение трубки, уравнение Клейна–Гордона

DOI: 10.1134/S0320791919030158

Уравнение Вебстера [1–3] описывает распространение звука в трубках, рупорах, концентраторах и других волноведущих системах переменного поперечного сечения $S(x)$. Здесь x – координата, отсчитываемая вдоль оси системы. Оно применимо для трубок, характерный радиус которых мал по сравнению с длиной волны: $r_0(x) \ll \lambda$. Кроме того, сечение должно изменяться достаточно медленно, $dr_0/dx \ll 1$. Это значит, что касательная к функции, описывающей профиль трубки $r_0(x)$, должна составлять с осью x малые углы [3].

Обобщенное уравнение типа Вебстера возникает в задачах распространения в трубках интенсивного звука [4–6]. Оно используется также при расчетах акустического поля в неоднородных средах в приближении геометрической акустики [4, 5], играя при этом роль уравнения переноса, записанного в лучевых координатах. Осью лучевой трубки является геометрический луч, рассчитанный из уравнения эйконала, а функция $S(x)$ является сечением лучевой трубки. Запишем это уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{c^2}{S(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\frac{\partial p}{\partial x}\right] = \frac{\varepsilon}{c^2\rho}\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь p – акустическое давление, c – скорость звука, ρ – плотность среды. Введем вместо давления новую функцию F:

$$p(x,t) = F(x,t)\big/\sqrt{S(x)}. \quad (2)$$

Для этой функции уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \\ = \frac{1}{\sqrt{S(x)}}\frac{d^2\sqrt{S(x)}}{dx^2}F - \frac{1}{\sqrt{S(x)}}\frac{\varepsilon}{c^4\rho}\frac{\partial^2 F^2}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Без учета акустической нелинейности уравнение (3) является уравнением Клейна–Гордона с зависящим от координаты x коэффициентом. Если $S^{-1/2}(x)$ дается одной из следующих функций:

$$C\sin\gamma(x+x_0),\ \ C\cos\gamma(x+x_0),\ \ C\,\mathrm{sh}\,\gamma(x+x_0), \\ C\,\mathrm{ch}\,\gamma(x+x_0),\ \ C\exp[\pm\gamma(x+x_0)] \quad (4)$$

(C, x_0, γ – константы), линеаризованное уравнение (3) превращается в обычное уравнение Клейна–Гордона:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \pm\gamma^2 F. \quad (5)$$

При этом волна приобретает низкочастотную дисперсию, закон которой $k^2 = \omega^2/c^2 \pm \gamma^2$. В случаях, когда

$$\sqrt{S(x)} = C, \quad \sqrt{S(x)} = C(x + x_0),$$

то есть для плоских и сферически симметричных волн, дисперсия исчезает и уравнение Клейна–Гордона превращается в обычное волновое уравнение.

Поскольку в модели (1), (3) сечение изменяется медленно на расстояниях порядка длины волны, а нелинейность мала, для бегущих волн уравнение может быть упрощено. Пользуясь методом медленно изменяющегося профиля (см., например, [7]), для волны, бегущей в сторону возрастающих значений координаты x, приведем уравнение (3) к виду

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3\rho\sqrt{S(x)}}F\frac{\partial F}{\partial\tau}\right] = -\frac{c}{2\sqrt{S(x)}}\frac{d^2\sqrt{S(x)}}{dx^2}F. \quad (6)$$

Здесь $\tau = t - x/c$ – время в системе координат, бегущей вместе с волной со скоростью звука. Заметим, что переход к приближению медленно изменяющегося профиля в исходной форме уравнения (1) приводит к менее точному уравнению для акустического давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{2S}\frac{dS}{dx} - \frac{\varepsilon}{c^3\rho}p\frac{\partial p}{\partial\tau} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) эквивалентно уравнению (6) с нулевой правой частью, то есть оно не учитывает дисперсию. Однако уравнение (7) имеет решение (см. [8], задача 7.11) для любой исходной (при $x = 0$) формы профиля волны $p(x = 0, t) = p_0\Phi(t)$:

$$p = p_0\sqrt{\frac{S(0)}{S(x)}}\Phi\left(\tau + \frac{\varepsilon}{c^3\rho}p\sqrt{\frac{S(x)}{S(0)}}\int_0^x\sqrt{\frac{S(0)}{S(x')}}dx'\right). \quad (8)$$

В то же время уравнение (6) решается только для некоторых форм поперечного сечения $S(x)$ трубки [9]. Решение (8) описывает волну, нелинейные искажения в которой происходят одинаково в областях положительного и отрицательного давления, поскольку $p(-\tau) = -p(\tau)$. При наличии дисперсии в уравнении (6) данная симметрия исчезает. Поэтому, если исходный сигнал был гармоническим, в среде формируется пилообразная волна, в которой полупериод отрицательного давления растянут по длительности и сглажен, а полупериод положительного давления имеет меньшую длительность и большую “амплитуду” [9]. Между гармониками появляются сдвиги фаз, чего не было в решении (8). Аналогичное поведение обнаруживает волна в дифрагирующем пучке; дифракция приводит к схожей низкочастотной дисперсии.

Таким образом, слабая дисперсия, связанная с изменением сечения трубки, ведет к появлению качественно новых особенностей в поведении нелинейной волны.

Интересные явления в трубках обнаруживаются уже в линейном приближении. Одно из принципиальных явлений – эффект туннелирования – изучен недостаточно [10]. Вместе с тем, он представляет большой интерес для акустических, электромагнитных волн и волн иной физической природы. В силу аналогии с уравнением Шредингера классические результаты важны также для понимания тонких эффектов прохождения частиц через потенциальный барьер в задачах квантовой механики.

Интересуемся волнами, гармоническими во времени. Для таких волн уравнение (3) без нелинейного члена примет вид

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \left(k_1^2 - \frac{1}{\sqrt{S(x)}}\frac{d^2\sqrt{S(x)}}{dx^2}\right)F = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим один из указанных ранее в (4) важный частный случай, когда уравнение (9) превращается в уравнение с постоянными коэффициентами и допускает простое общее решение. Полагая

$$S(x) = S_m\,\mathrm{ch}^2\left[\gamma\left(x - \frac{d}{2}\right)\right], \quad \gamma = \frac{2}{d}\mathrm{arch}\frac{1}{\sqrt{S_m}}, \quad (10)$$

приведем уравнение (9) к виду

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \left[k_1^2 - \gamma^2\right]F = 0. \quad (11)$$

Этот случай соответствует задаче о прохождении волны через перетяжку трубки $0 < x < d$, изображенную на рис. 1. Участок $0 < x < d$ заполнен средой с плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1. Вне этого участка трубка заполнена другой средой с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0.

В формулах (9)–(11) $k_1 = \omega/c_1$, константы S_m, d обозначают две геометрические характеристики участка переменной толщины: минимальную безразмерную площадь сужения, достигаемую при значении координаты $x = d/2$, и длину d этого участка.

Режим туннелирования волны отвечает значению $\gamma^2 > k_1^2$. Этот режим может быть реализован для низких частот $k_1 < \gamma$ или

$$\omega < \frac{2c_1}{d}\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{S_m}}, \quad k_1 d < 2\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{S_m}} \equiv 2\varphi. \tag{12}$$

При этом комплексные амплитуды давления и колебательной скорости в области II, $0 < x < d$, описываются выражениями

$$\begin{gathered} p_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\sqrt{S}}\left(P_+ e^{-\mu x} + P_- e^{\mu x}\right), \\ u_{\mathrm{II}} = \frac{i}{k_1\rho_1 c_1\sqrt{S}}\left[P_+ e^{-\mu x}\left(\mu + \frac{S'}{2S}\right) - P_- e^{\mu x}\left(\mu - \frac{S'}{2S}\right)\right]. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь использовано обозначение $\mu = \sqrt{\gamma^2 - k_1^2}$. В двух других областях: перед неоднородностью ($x < 0$) и после нее ($x > d$), поля даются формулами

$$\begin{gathered} p_{\mathrm{I}} = P_i e^{ik_0 x} + P_r e^{-ik_0 x}, \\ u_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\rho_0 c_0}\left(P_i e^{ik_0 x} - P_r e^{-ik_0 x}\right), \end{gathered} \tag{14}$$

$$p_{\mathrm{III}} = P_t e^{ik_0(x-d)}, \quad u_{\mathrm{III}} = \frac{1}{\rho_0 c_0} P_t e^{ik_0(x-d)}. \tag{15}$$

В формулах (14), (15) величины P_i, P_r, P_t – это амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн.

Будем считать $S(0) = S(d) = 1$. Пользуясь выражением (10) для площади сечения, найдем производные на границах неоднородности:

$$\begin{gathered} \left.\frac{dS}{dx}\right|_{x=0} = -2b, \quad \left.\frac{dS}{dx}\right|_{x=d} = +2b, \\ b \equiv \frac{2}{d}\sqrt{1 - S_m}\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{S_m}}. \end{gathered} \tag{16}$$

Для того чтобы рассчитать коэффициенты отражения и прохождения волны, нужно потребовать непрерывности полей давления p и скорости u

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad u = -\frac{i}{k\rho c}\frac{dp}{dx},$$

на границах области $0 < x < d$. При этом из формул (13)–(15) получаются следующие выражения для амплитуд:

$$P_i + P_r = P_+ + P_-, \tag{17}$$

$$P_i - P_r = i\frac{\alpha}{k_1}\left[P_+(\mu - b) - P_-(\mu + b)\right], \tag{18}$$

$$P_+ e^{-\mu d} + P_- e^{\mu d} = P_t, \tag{19}$$

$$i\frac{\alpha}{k_1}\left[P_+ e^{-\mu d}(\mu + b) - P_- e^{\mu d}(\mu - b)\right] = P_t. \tag{20}$$

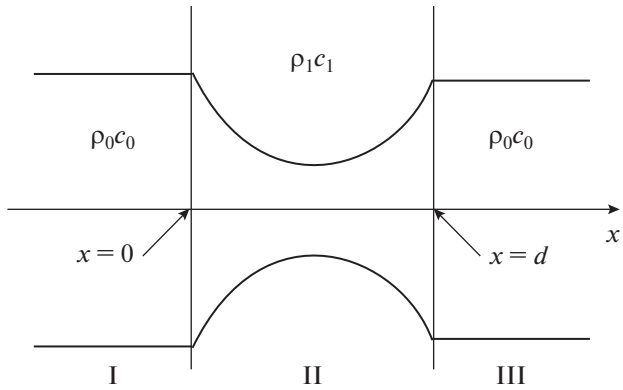

Рис. 1. Трубка, которая содержит область сужения II ($0 < x < d$), заполненную средой с плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1.

Отношение акустических импедансов двух сред мы обозначили как $\alpha = (\rho_0 c_0/\rho_1 c_1)$.

Удобно решать систему (17)–(20) так. Исключим вначале из уравнений (17), (18) амплитуду отраженной волны, а из уравнений (19), (20) – амплитуду прошедшей волны. Тогда получится система двух уравнений

$$P_+\left[1 + i\frac{\alpha}{k_1}(\mu - b)\right] + P_-\left[1 - i\frac{\alpha}{k_1}(\mu + b)\right] = 2P_i, \tag{21}$$

$$\begin{gathered} P_+ e^{-\mu d}\left[1 - i\frac{\alpha}{k_1}(\mu + b)\right] + \\ + P_- e^{\mu d}\left[1 + i\frac{\alpha}{k_1}(\mu - b)\right] = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Решение системы (21), (22) имеет вид:

$$\begin{gathered} P_+ = \frac{2P_i}{\Delta}e^{\bar\mu}\left[1 + i\frac{\alpha}{\bar k_1}(\bar\mu - \bar b)\right], \\ P_- = -\frac{2P_i}{\Delta}e^{-\bar\mu}\left[1 - i\frac{\alpha}{\bar k_1}(\bar\mu + \bar b)\right], \\ \Delta = e^{\bar\mu}\left[1 + i\frac{\alpha}{\bar k_1}(\bar\mu - \bar b)\right]^2 - e^{-\bar\mu}\left[1 - i\frac{\alpha}{\bar k_1}(\bar\mu + \bar b)\right]^2. \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь чертой сверху обозначены безразмерные величины:

$$\begin{gathered} \bar k_1 = k_1 d, \quad \bar\mu = \mu d = \sqrt{4\varphi^2 - \bar k_1^2}, \\ \bar b = bd = 2\varphi\operatorname{th}\varphi. \end{gathered} \tag{24}$$

Для краткости ниже в тексте статьи черту над безразмерными величинами (24) будем опускать. С помощью выражений (22) и (23) нетрудно рассчитать коэффициенты отражения R и прохождения T волны:

$$R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{e^{\mu}\left[1+\frac{\alpha^2}{k_1^2}(\mu-b)^2\right] - e^{-\mu}\left[1+\frac{\alpha^2}{k_1^2}(\mu+b)^2\right]}{e^{\mu}\left[1+i\frac{\alpha}{k_1}(\mu-b)\right]^2 - e^{-\mu}\left[1-i\frac{\alpha}{k_1}(\mu+b)\right]^2}, \quad (25)$$

$$T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{i\frac{4\alpha\mu}{k_1}}{e^{\mu}\left[1+i\frac{\alpha}{k_1}(\mu-b)\right]^2 - e^{-\mu}\left[1-i\frac{\alpha}{k_1}(\mu+b)\right]^2}. \quad (26)$$

Выражения (25) и (26) удовлетворяют закону сохранения энергии:

$$|R|^2 + |T|^2 = 1. \quad (27)$$

Кроме того, поскольку числитель у выражения (25) чисто действительный, а у (26) – чисто мнимый, между фазами отраженной и прошедшей волн существует связь:

$$\Phi_r - \Phi_t = -\frac{\pi}{2}. \quad (28)$$

Действительно, расчет приводит к следующим выражениям:

$$|R|^2|\Delta|^2 = \left\{e^{\mu}\left[1+\frac{\alpha^2}{k_1^2}(\mu-b)^2\right] - e^{-\mu}\left[1+\frac{\alpha^2}{k_1^2}(\mu+b)^2\right]\right\}^2,$$

$$|T|^2|\Delta|^2 = 16\frac{\alpha^2}{k_1^2}\mu^2, \quad (29)$$

$$|\Delta|^2 = 16\frac{\alpha^2}{k_1^2}\mu^2 + \left\{e^{\mu}\left[1+\frac{\alpha^2}{k_1^2}(\mu-b)^2\right] - e^{-\mu}\left[1+\frac{\alpha^2}{k_1^2}(\mu+b)^2\right]\right\}^2,$$

которые позволяют легко проверить выполнение закона сохранения (27). Фазы коэффициентов отражения и прохождения определяются формулами

$$\Delta = |\Delta|\exp(i\Phi),$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}\left[2\frac{\alpha}{k_1} \times \frac{e^{\mu}(\mu-b) + e^{-\mu}(\mu+b)}{e^{\mu}\left[1-\frac{\alpha^2}{k_1^2}(\mu-b)^2\right] - e^{-\mu}\left[1-\frac{\alpha^2}{k_1^2}(\mu+b)^2\right]}\right],$$

$$R = |R|\exp(-i\Phi), \quad T = |T|\exp(-i\Phi + \pi/2).$$

Интересен случай отсутствия отраженной волны (полное прохождение), который, как это следует из формулы (25), может быть реализован при условии

$$\exp(2\mu) = \frac{k_1^2 + \alpha^2(\mu+b)^2}{k_1^2 + \alpha^2(\mu-b)^2}. \quad (30)$$

Условие (30) с помощью формул (24) перепишем так:

$$\exp\left(2\sqrt{4\varphi^2 - k_1^2}\right) = \frac{k_1^2 + \alpha^2\left(\sqrt{4\varphi^2 - k_1^2} + 2\varphi\,\mathrm{th}\,\varphi\right)^2}{k_1^2 + \alpha^2\left(\sqrt{4\varphi^2 - k_1^2} - 2\varphi\,\mathrm{th}\,\varphi\right)^2}. \quad (31)$$

Для краткости здесь использовано обозначение $\varphi(S_m) = \mathrm{arch}\left(S_m^{-1/2}\right)$.

Интересно, что при значении $\alpha = 1$, то есть когда акустические импедансы обеих сред одинаковы, условие (31) принимает следующий вид:

$$\frac{\mathrm{th}\left(\sqrt{4\varphi^2 - k_1^2}\right)}{\sqrt{4\varphi^2 - k_1^2}} = \frac{\mathrm{th}(2\varphi)}{2\varphi}. \quad (32)$$

Уравнение (32) имеет единственное решение $k_1 = 0$, отвечающее суживающемуся участку трубки, волновая толщина которого (или частота волны) равна нулю. Нетривиальный по смыслу корень появляется лишь в том случае, когда импедансы сред различны ($\alpha \neq 1$) (см. уравнение (31)).

При фиксированных параметрах сред (число $\alpha > 1$ выбрано), выражение (31) задает неявную зависимость k_1^2 от φ. Корень этого уравнения определяет частоту, на которой возникает полное прохождение волны, как функцию от геометрических параметров неоднородного участка трубки S_m и d.

Результаты анализа уравнения (31) представлены на рис. 2. Верхняя кривая $S_m^{(1)}$ изображает зависимость минимального сечения в перетяжке от квадратов отношения импедансов α^2 двух сред. Эта зависимость монотонно убывает от единицы (при $\alpha^2 = 1$) до значения 0.305, определяемого условием

$$S_m^{(1)} = \mathrm{ch}^{-2}\varphi_*, \quad \varphi_* \approx 1.2, \quad \varphi_*\,\mathrm{th}\,\varphi_* = 1.$$

Выбрав некоторое значение α^2 и отвечающее ему минимальное сечение $S_m^{(1)}$, определяем с помощью кривой *1* безразмерную частоту $\bar{k}_1 = k_1 d$. Вторая кривая $S_m^{(2)}$ описывает монотонно убывающую (от единицы до нуля) функцию от α^2; этим

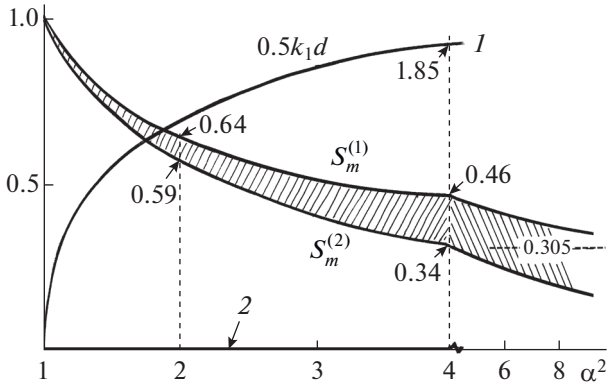

Рис. 2. Верхняя кривая $S_m^{(1)}$ дает зависимость минимального сечения в перетяжке неоднородности от квадратов отношения импедансов α^2 двух сред, которой соответствует кривая *1* для k_1d. Кривой $S_m^{(2)}$ отвечает значение $k_1d = 0$ – прямая *2*. Указан диапазон изменения минимальных сечений, в котором возможно полное прохождение для двух значений частоты и почти полное – в заштрихованной полосе частот между двумя максимумами коэффициента пропускания.

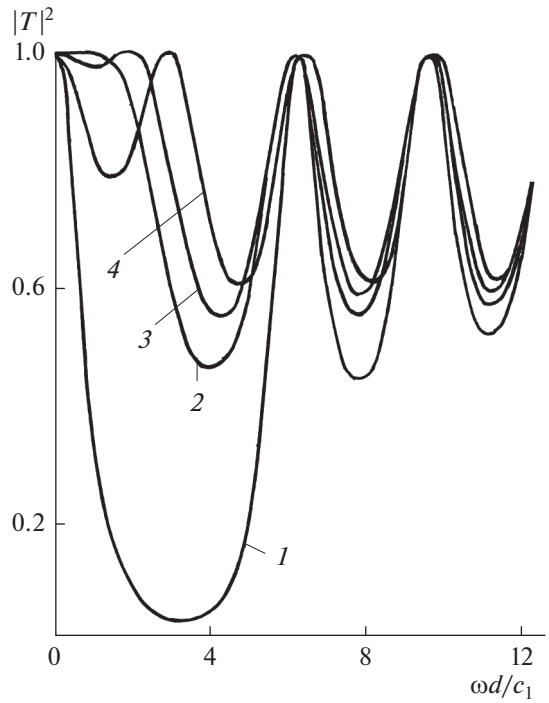

Рис. 3. Частотные зависимости квадрата коэффициента прохождения волны для отношения параметров $\alpha = 2$ и четырех значений минимального сечения трубки $S_m = 0.09, 0.34, 0.46, 0.6$ (кривые *1–4*, соответственно).

значениям минимального сечения отвечает значение нулевой частоты $\bar{k}_1 = k_1d = 0$ – прямая *2*.

Заштрихован диапазон изменения минимальных сечений, в котором возможно полное прохождение волны для двух значений частоты и почти полное – в полосе частот между двумя максимумами коэффициента пропускания.

Итак, для данного значения α^2 (параметры сред заданы) из рис. 2 определяется диапазон значений S_m. Затем выбирается конкретное значение S_m; при этом фиксируется геометрия неоднородности. Наконец, вычисляется значение $\bar{k}_1 = k_1d$ (однозначно определяющее частоту), которое лежит между кривой *1* и прямой *2*.

Чтобы конкретно пояснить, как можно использовать рис. 2, зафиксируем значение α^2, равное, например, $\alpha^2 = 4$. При движении вдоль вертикального штрихового отрезка от оси абсцисс до пересечения с кривой $S_m^{(2)}$ происходит рост минимального сечения S_m от нуля до 0.34. В этом диапазоне значений S_m коэффициент пропускания имеет только один максимум, равный единице, который достигается при значении безразмерной частоты $k_1d = 0$. Когда сечение становится равным $S_m = 0.34$, появляется второй максимум $|T| = 1$, лежащий при $k_1d > 0$. Между двумя максимумами формируется “площадка”, где $|T| \approx 1$ в конечной полосе частот. Так продолжается вплоть до пересечения с кривой $S_m^{(1)}$, когда площадь сечения $S_m = 0.46$. При этом второй максимум $|T| = 1$ попадает на границу области, в которой справедливо решение (29). Этот качественный анализ с использованием рис. 2 подтверждается результатами численного расчета коэффициента пропускания, изображенными на рис. 3.

Расчет проведен на основе общих выражений для коэффициента прохождения волны через изображенную на рис. 1 комбинированную неоднородность, которые удобно записать в виде

$$|T(k_1)|^{-2} = 1 + \frac{k_1^2}{16\alpha^2\mu^2}\left\{e^{\mu}\left[1 + \frac{\alpha^2}{k_1^2}(\mu - b)^2\right] - e^{-\mu}\left[1 + \frac{\alpha^2}{k_1^2}(\mu + b)^2\right]\right\}^2, \quad \mu = \sqrt{4\varphi^2 - k_1^2}, \quad 0 < k_1 < 2\varphi, \tag{33}$$

$$|T(k_1)|^{-2} = 1 + \frac{k_1^2}{4\alpha^2\nu^2}\left\{\left[1 + \frac{\alpha^2}{k_1^2}\left(b^2 - \nu^2\right)\right]\sin\nu - 2\frac{\alpha^2}{k_1^2}\nu b\cos\nu\right\}^2, \quad \nu = \sqrt{k_1^2 - 4\varphi^2}, \quad 2\varphi < k_1 < \infty. \tag{34}$$

Выражения (33) и (34) непрерывно сшиваются в точке $k_1 = 2\varphi$. При больших значениях безразмерной частоты $k_1 \gg 2\varphi$ формула (34) переходит в хорошо известное решение (см., например, [11]), описывающее осцилляции коэффициента пропускания $|T(k_1)|$. Зависимость коэффициента прохождения от частоты, определяемая формулами (33) и (34), изображена на рис. 3. Принято значение $\alpha = 2$ для отношения акустических импедансов, а минимальные сечения суженного участка трубки полагались равными $S_m = 0.09, 0.34, 0.46, 0.6$.

Интересно решить задачу о прохождении широкополосного импульса через неоднородность, имеющую область слабого изменения $|T(k_1)|$. Такая область может реализоваться, в частности, для параметров $S_m = 0.46$, $\alpha = 2$ (кривая *3* на рис. 3). Если спектр импульсного сигнала на входе ограничен и лежит в низкочастотной области, например, $0 < \omega < 2c_1/d$, где коэффициент пропускания примерно равен единице (для кривой *3* на рис. 3), импульс может туннелировать через неоднородность, испытывая лишь фазовые искажения.

При больших значениях $\alpha^2 \gg 1$ (это может быть слой газа, окруженный конденсированной средой) и малых сечениях S_m для частоты полного прохождения из выражения (31) получается простая приближенная формула

$$f = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{c_1}{d}\sqrt{S_m}\ln\frac{4}{S_m}. \qquad (35)$$

Например, при $d = 0.33$ см, $S_m = 0.1$ и для воздушного слоя, $c_1 = 330$ м/с, получаем из (30) оценку частоты $f = 26$ кГц.

Явление туннелирования, описанное выше, может, по-видимому, быть использовано при создании частотно-избирательных фильтров с управляемыми характеристиками. По аналогии с лазерной физикой можно подумать и о создании “вентиля”, или модулятора добротности акустического резонатора. Если в начальный момент времени сужение трубки полностью закрыто, $S_m = 0$, волна через неоднородность пройти не сможет и полностью отразится вовнутрь резонатора, где при высокой добротности может быть накоплена значительная энергия. Если затем достаточно быстро (например, с помощью пьезоэлектрического элемента) увеличить S_m до значения, обеспечивающего режим туннелирования, добротность резко упадет и акустическая энергия “высветится” наружу. Описанный процесс аналогичен действию керровского затвора в лазерах с модулированной добротностью.

В заключение укажем, что данная заметка имеет целью привлечь внимание к проблеме туннелирования волн через специальные профили суживающегося участка трубки. Здесь интересно исследовать прохождение широкополосных сигналов – импульсов и нелинейных волн. Эти явления, конечно, требуют самостоятельного изучения.

Укажем, что эффект туннелирования описан также в обзорных статьях [12, 13]. Нелинейные волны в трубах переменного сечения изучались в работах [14–17].

Работа поддержана грантом РФФИ 18-02-00736.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Webster A.G.* Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph // Proc. Nat. Acad. Sci. 1919. V. 5. P. 275–282. Reprinted in: J. Audio Eng. Society. 1977. V. 25. № 1–2. P. 24–28.
2. *Eisner E.* Resonant oscillation system design. Physical Acoustics (Ed. Mason W.P.). V. 1. Pt. B. Ch. 6. New York: Academic Press, 1964.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
4. *Руденко О.В.* Нелинейные пилообразные волны // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
5. *Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П.* Уравнения высокочастотной нелинейной акустики неоднородных сред // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 290–294.
6. *Enflo B.O., Rudenko O.V.* To the theory of generalized Burgers’ equation // Acta Acustica. 2002. V. 88. P. 155–162.
7. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
8. *Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М.* Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2007.
9. *Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В.* Принцип априорного использования симметрии в теории нелинейных волн // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 4. С. 481–495.
10. *Шварцбург А.Б.* Туннелирование электромагнитных волн – парадоксы и перспективы // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177. № 1. С. 43–58.
11. Акустика в задачах / Под ред. Гурбатова С.Н. и Руденко О.В. М.: Физматлит, 2009.
12. *Шварцбург А.Б., Ерохин Н.С.* Резонансное туннелирование сверхкоротких электромагнитных импульсов в градиентных метаматериалах: парадоксы и перспективы // Успехи физ. наук. 2011. Т. 181. № 11. С. 1212–1217.
13. *Шварцбург А.Б., Ерохин Н.С.* Градиентные акустические барьеры (точно решаемые модели) // Успехи физ. наук. 2011. Т. 181. № 6. С. 627–646.
14. *Ковалев В.Ф., Руденко О.В.* Нелинейные акустические волны в каналах переменного сечения // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 296–303.
15. *Лапидус Ю.Р., Руденко О.В.* Нелинейная генерация высших гармоник как способ профилирования каналов // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 6. С. 1055–1058.
16. *Руденко О.В., Гурбатов С.Н.* Статистические задачи для обобщённого уравнения Бюргерса: интенсивный шум в волноведущих системах // Докл. Акад. наук. 2017. Т. 478. № 1. С. 25–28.
17. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Самоотражение волны на разрывах как способ нелинейной диагностики сред // Докл. Акад. наук. 1988. Т. 298. № 2. С. 361–362.