

ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН
В КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С СЕЛЕКТИВНЫМ
ПОДАВЛЕНИЕМ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ© 2019 г. О. В. Руденко^{a, b, c, *}^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Россия^bИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, ул. Вавилова 38, Россия^cИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, 123242 Москва, Б. Грузинская ул. 10, стр. 1, Россия

*e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 15.02.2019 г.

После доработки 15.02.2019 г.

Принята к публикации 20.02.2019 г.

Изучены процессы возбуждения колебаний и волн в системах с квадратичной нелинейностью при наличии селективного поглощения на частоте второй гармоники. Рассмотрен ряд примеров: возбуждение волн источниками, движущимися со скоростью, близкой к скорости собственных возмущений в среде; возбуждение волн в плоском слое (одномерном резонаторе) за счет колебаний одной из стенок; вынужденные колебания двух связанных осцилляторов. Показано, что с увеличением коэффициента поглощения второй гармоники амплитуда колебаний на основной частоте возрастает. Такая же закономерность проявляется для недиспергирующих нелинейных волн, в которых происходит формирование ударных фронтов и “растекание” энергии по высшим гармоникам. Подавление второй гармоники “запирает” каскадный процесс передачи энергии вверх по спектру и “выключает” нелинейное поглощение. Ряд описанных систем уже создан и изучен в экспериментах. Селективно поглощающие среды для высокочастотных волн можно рассматривать как метаматериалы и синтезировать их на основе соответствующих технологий.

Ключевые слова: селективное поглощение, ударные фронты, возбуждение колебаний, подавление нелинейности

DOI: 10.1134/S0320791919030183

ПРИМЕРЫ СИСТЕМ И УПРОЩЕННЫЕ
УРАВНЕНИЯ

Исследуемые здесь нелинейные процессы и описывающие их уравнения имеют довольно общий характер. Поэтому желательно привести примеры реальных задач, которые соответствуют принятой математической модели. В этом разделе показано, что существует множество как сосредоточенных, так и распределенных систем, адекватно описываемых парой связанных нелинейных уравнений, являющихся основой последующего анализа.

Рассмотрим вначале процесс возбуждения волн распределенными источниками, движущимися со скоростью, близкой к скорости распространения собственных возмущений в среде. Для определенности остановимся на задаче о термооптической генерации звука с учетом квадратичной нелинейности, которая описывается неоднородным волновым уравнением [1]:

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon}{c_0^4 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} = \frac{\beta}{c_p} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \langle \mathbf{S} \rangle. \quad (1)$$

Здесь p — акустическое давление; c_0 , ρ_0 и ε — равновесные значения скорости звука, плотности и нелинейности среды, β — коэффициент теплового расширения, c_p — удельная теплоемкость, $\langle \mathbf{S} \rangle$ — вектор Умова–Пойнтинга модулированной электромагнитной волны, усредненный по быстрым осцилляциям несущей частоты.

Пусть след светового пучка движется вдоль оси x , лежащей в плоскости границы раздела двух сред (например, вдоль поверхности воздух–вода), падая по нормали z из прозрачной среды (воздух) на слабо поглощающую среду (вода). При этом

$$\langle \mathbf{S} \rangle_z = I_0 \exp\left(-\frac{z}{l}\right) \Phi(kx - ckt). \quad (2)$$

Для простоты рассматривается двумерная геометрия задачи; зависимостью всех величин от третьей координаты y мы пренебрегаем. В фор-

муле (2) I_0 — это характерное значение интенсивности на границе $z = 0$, l — глубина проникновения света в слабо поглощающую среду, Φ — функция, описывающая распределение интенсивности света на поверхности, c — скорость сканирования пучка. Для принятой формы (2) правая часть уравнения (1) запишется так:

$$\frac{ck\beta}{c_p l} I_0 \exp\left(-\frac{z}{l}\right) \Phi(kx - ckt). \quad (3)$$

Движущиеся со скоростью $c \approx c_0$ источники (3) находятся “в резонансе” с волной, бегущей в положительном направлении оси x . Поэтому “правая” волна будет возбуждаться гораздо эффективнее “левой” [2–4]. Это позволяет искать решение уравнения (1) в следующем виде [1]:

$$p = p(\zeta = x - c_0 t, \sqrt{\mu} z, \mu t), \quad (4)$$

где $\mu \ll 1$ — малый параметр. Переходя в уравнении (1), (3) к переменным (4) и пренебрегая малыми членами порядка второго (μ^2) и выше, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \zeta} - \frac{\beta c^2 I_0}{2 c_p l} \exp\left(-\frac{z}{l}\right) \Phi(k\zeta - t\Delta) \right] = \\ = -\frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Delta = k(c - c_0)$ — расстройка. При точном резонансе, когда собственная и вынужденная волны бегут с одинаковыми скоростями, расстройка обращается в ноль.

В частном случае периодического распределения движущихся источников вдоль поверхности:

$$\frac{\beta c^2 I_0}{2 c_p l} \Phi(k\zeta - t\Delta) = \frac{1}{2} F_0 \exp(ik\zeta - it\Delta) + c.c. \quad (6)$$

(посредством “с.с.” обозначен комплексно сопряженный член, i — мнимая единица) и в пренебрежении зависимостью от z решение (5) будем искать в виде двух связанных пространственных гармоник

$$p(t, \zeta) = \frac{1}{2} A_1(t) \exp(ik\zeta) + \frac{1}{2} A_2(t) \exp(i \times 2k\zeta) + c.c. \quad (7)$$

Для комплексных амплитуд этих гармоник получается следующая система:

$$\frac{dA_1}{dt} + i\gamma A_1^* A_2 = F_0 \exp(-it\Delta), \quad \frac{dA_2}{dt} + i\gamma A_1^2 = 0, \quad (8)$$

где $\gamma = \varepsilon k / (2c_0 \rho_0)$. Модель (8) является довольно универсальной; ею может быть описан ряд других задач теории нелинейных колебаний и волн.

Во втором рассматриваемом здесь примере распределенных источников нет, а возбуждение волн происходит в плоском слое (одномерном резонаторе) за счет колебаний одной из стенок.

Скорость ее колебаний изменяется во времени по некоторому периодическому закону

$$u(x = 0, t) = \Phi(\omega t), \quad (9)$$

в то время как вторая граница ($x = L$) неподвижна. Движение среды в резонаторе описывается однородным волновым уравнением (1). В работах [2–4] показано, что для данных граничных условий задача сводится к решению функционального уравнения

$$\begin{aligned} Q\left(\omega t + kL - \frac{\varepsilon}{c_0} kLQ\right) - \\ - Q\left(\omega t - kL + \frac{\varepsilon}{c_0} kLQ\right) = \Phi(\omega t). \end{aligned} \quad (10)$$

В этом уравнении неизвестная функция $Q(\omega t)$ описывает форму любой из двух нелинейных волн, бегущих навстречу друг другу. Вблизи основного резонанса ($kL = \pi + \delta, \delta \ll 1$) при гармоническом законе движения стенки (9) форма волнового профиля может быть вычислена с помощью эволюционного уравнения

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\delta}{\pi} \frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{c_0} Q \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\Phi_0 \omega}{2\pi} \cos(\omega \tau). \quad (11)$$

Здесь t — “медленное” время, описывающее процесс установления колебаний, τ — “быстрое” время, описывающее высокочастотные осцилляции [2–4]. Отыскивая, как и ранее, решение в виде суммы двух связанных гармоник

$$\begin{aligned} Q(t, \tau) = \frac{1}{2} A_1(t) \exp\left(-i\omega\tau + i\omega\frac{\delta}{\pi}t\right) + \\ + \frac{1}{2} A_2(t) \exp\left(-i2\omega\tau + i2\omega\frac{\delta}{\pi}t\right) + c.c., \end{aligned} \quad (12)$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} + i\frac{\varepsilon\omega}{2c_0} A_1^* A_2 = \frac{\omega\Phi_0}{2\pi} \exp\left(-i\omega\frac{\delta}{\pi}t\right), \\ \frac{dA_2}{dt} + i\frac{\varepsilon\omega}{2c_0} A_1^2 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

которая отличается от уравнений (8) лишь обозначениями.

Третий пример связан с сосредоточенной (колебательной) системой. Рассмотрим два связанных гармонических осциллятора. Каждый в отдельности представляется точечной массой m_j , совершающей колебания вдоль оси x благодаря пружинке с жесткостью k_j ($j = 1, 2$). Массы соединены между собой третьей (нелинейной) пружинкой, упругая возвращающая сила которой зависит от разности смещений масс $\zeta = x_2 - x_1$ как $k\zeta + \beta\zeta^2$. На первую массу действует периодическая внешняя сила $f(t)$.

Функция Лагранжа описанной системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left[m_1 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + m_2 \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k(x_2 - x_1)^2 \right] - \frac{\beta}{3} (x_2 - x_1)^3 + f(t)x_1. \quad (14)$$

Ограничимся случаем слабой связи, когда собственные частоты системы $\omega_{1,2}$ мало отличаются от парциальных частот $n_{1,2}$:

$$\omega_1^2 = n_1^2 - \frac{s_1^2 s_2^2}{n_2^2 - n_1^2}, \quad \omega_2^2 = n_2^2 + \frac{s_1^2 s_2^2}{n_2^2 - n_1^2}. \quad (15)$$

Здесь использованы обозначения:

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k}{m_1}, \quad n_2^2 = \frac{k_2 + k}{m_2}, \quad s_1^2 = \frac{k}{m_1}, \quad s_2^2 = \frac{k}{m_2}. \quad (16)$$

Считая связанность малым параметром,

$$v = \frac{s_1 s_2}{|n_2^2 - n_1^2|} \ll 1, \quad (17)$$

перейдем в выражении (14) для функции Лагранжа к нормальным переменным

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1}} (z_1 - v z_2), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{m_2}} (v z_1 + z_2), \quad (18)$$

приводящим (с точностью до v^2) обе квадратичные формы в выражении (14) к диагональному виду:

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} (n_1 z_1^2 + n_2 z_2^2) - \frac{\beta}{3} \left(\frac{z_2}{\sqrt{m_2}} - \frac{z_1}{\sqrt{m_1}} \right)^3 + \frac{f(t)}{\sqrt{m_1}} z_1. \quad (19)$$

Естественно, при выводе формулы (19) нелинейный член и вынуждающую силу также следует считать малыми порядка v (17). Уравнения движения, соответствующие функции Лагранжа (19), таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_1}{dt^2} + n_1^2 z_1 &= \frac{\beta}{\sqrt{m_1}} \left(\frac{z_2}{\sqrt{m_2}} - \frac{z_1}{\sqrt{m_1}} \right)^2 + \frac{f(t)}{\sqrt{m_1}}, \\ \frac{d^2 z_2}{dt^2} + n_2^2 z_2 &= -\frac{\beta}{\sqrt{m_2}} \left(\frac{z_2}{\sqrt{m_2}} - \frac{z_1}{\sqrt{m_1}} \right)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Левые части уравнений (20) независимы; благодаря переходу к нормальным координатам подсистемы взаимодействуют друг с другом формально только из-за нелинейной связи.

Будем считать, что первая подсистема настроена на частоту ω_0 , примерно равную частоте колебаний ω внешней силы, а вторая подсистема — на частоту $2\omega_0$. Иными словами, парциальные ча-

стоты в уравнениях (20) равны ω_0 и $2\omega_0$ соответственно. Отыскивая решение (20) в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} \frac{A_1(t)}{\omega_0} \exp(-i\omega_0 t) + c.c., \\ z_2 &= \frac{1}{2} \frac{A_2(t)}{2\omega_0} \exp(-i2\omega_0 t) + c.c., \\ f &= f_0 \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (21)$$

где $A_{1,2}$ — медленно изменяющиеся амплитуды, приходим к паре укороченных уравнений, по форме совпадающих с уравнениями (8). Значения коэффициентов в системе (8) теперь таковы:

$$\gamma = \frac{\beta}{4m_1 \sqrt{m_2} \omega_0^2}, \quad F_0 = i \frac{f_0}{2\sqrt{m_1}}, \quad \Delta = \omega - \omega_0. \quad (22)$$

Заметим, что функции $A_{1,2}$ описывают колебания скорости, а не смещения. Благодаря делению этих функций в формулах (21) на соответствующие значения частот достигается равенство нелинейных коэффициентов, обозначенных как γ в системе (8), которое приводит к очевидному энергетическому соотношению

$$\frac{d}{dt} [|A_1|^2 + |A_2|^2] = 2 \operatorname{Re} [A_1^* F_0 \exp(-it\Delta)]. \quad (23)$$

Когда внешнего воздействия нет, из (23) следует, что суммарная энергия колебаний на частотах первой и второй гармоник сохраняется. Для амплитуд колебаний смещения такое соотношение не выполняется.

Следует добавить, что обсуждавшиеся выше задачи есть лишь некоторая иллюстрация возможностей использования модельных уравнений (8) в акустике. Разумеется, существует немало число колебательных и волновых процессов иной физической природы (в нелинейной оптике, в электродинамике источников мощного коротковолнового излучения и во многих других разделах физики), которые также могут быть описаны парой “укороченных” уравнений для амплитуд первой и второй гармоник [5] в присутствии внешнего источника “накачки”.

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ СЕЛЕКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

Рассмотрим модель (8), добавив во второе уравнение член αA_2 , ответственный за поглощение второй гармоники:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} + i\gamma A_1^* A_2 &= F_0 \exp(-it\Delta), \\ \frac{dA_2}{dt} + \alpha A_2 + i\gamma A_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Способы технической реализации такого поглощения зависят от устройства конкретной систе-

мы, поэтому обсуждать здесь этот вопрос в общем виде не имеет смысла. Некоторые примеры, относящиеся к акустике, можно найти в работах [6–8].

Математическую модель (24) удобно анализировать, записав ее для безразмерных переменных

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{\alpha F_0}{\gamma^2} \right)^{1/3} \exp(-it\Delta) B_1, \\ A_2 &= \left(\frac{F_0^2}{\alpha\gamma} \right)^{1/3} \exp(-it2\Delta) B_2. \end{aligned} \quad (25)$$

С помощью (25) приведем (24) к виду

$$\begin{aligned} t_1 \left(\frac{dB_1}{dt} - i\Delta B_1 \right) + iB_1^* B_2 &= 1, \\ t_2 \left(\frac{dB_2}{dt} - i2\Delta B_2 \right) + B_2 + iB_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

В системе уравнений (26) выделены три константы, имеющие размерность времени:

$$t_1 = \left(\frac{\alpha}{\gamma^2 F_0^2} \right)^{1/3}, \quad t_2 = \alpha^{-1}, \quad t_3 = \Delta^{-1}. \quad (27)$$

Поскольку в общем виде уравнения (26) не решаются, их анализ удобно проводить для разных предельных случаев, отличающихся соотношением характерных времен (27).

Задача будет поставлена так: решить уравнения (26) с нулевыми начальными условиями:

$$B_1(t=0) = 0, \quad B_2(t=0) = 0. \quad (28)$$

Это означает, что в начальный момент времени включается внешний источник, который накачивает энергию в первую гармонику. Нелинейность приводит к частичной перекачке энергии в колебание удвоенной частоты. Процесс нарастания амплитуд обеих гармоник определяется не только их взаимодействием, но и селективными потерями. Основной вопрос, который здесь возникает, связан именно с влиянием потерь на динамический баланс колебательной энергии.

Уравнения (26) записаны для комплексных амплитуд. В дальнейшем понадобятся также уравнения, записанные для действительных амплитуд b_1 , b_2 и фаз s_1 , s_2 взаимодействующих гармоник. Совершая в (26) замену

$$B_1 = b_1 \exp(is_1), \quad B_2 = b_2 \exp(is_2), \quad (29)$$

получим

$$t_1 \frac{db_1}{dt} - b_1 b_2 \sin(s_2 - 2s_1) = \cos(s_1), \quad (30)$$

$$t_1 b_1 \left(\frac{ds_1}{dt} - \Delta \right) + b_1 b_2 \cos(s_2 - 2s_1) = -\sin(s_1), \quad (31)$$

$$t_2 \frac{db_2}{dt} + b_2 + b_1^2 \sin(s_2 - 2s_1) = 0, \quad (32)$$

$$t_2 b_2 \left(\frac{ds_2}{dt} - 2\Delta \right) + b_1^2 \cos(s_2 - 2s_1) = 0. \quad (33)$$

Рассмотрим вначале установившиеся колебания, полагая производные по времени от амплитуд и фаз в уравнениях (29)–(33) равными нулю. При этом получаемая система из четырех алгебраических уравнений сводится к кубическому уравнению относительно квадрата амплитуды первой гармоники:

$$\begin{aligned} b_1^6 - 4\Delta^2 t_1 t_2 b_1^4 + (\Delta t_1)^2 [1 + (2\Delta t_2)^2] b_1^2 - \\ - [1 + (2\Delta t_2)^2] = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Решив (34), можно затем рассчитать амплитуду и второй гармоники по формуле

$$b_2^2 = b_1^4 [1 + (2\Delta t_2)^2]^{-1}. \quad (35)$$

В простейшем случае, когда расстройки нет, из уравнений (34), (35) следует $b_1^2 = b_2^2 = 1$. Возвращаясь к размерным переменным с помощью формул (25), для стационарных значений амплитуд получим

$$|A_1| = \left(\frac{\alpha F_0}{\gamma^2} \right)^{1/3}, \quad |A_2| = \left(\frac{F_0^2}{\alpha\gamma} \right)^{1/3}. \quad (36)$$

Нетрудно показать, что решение (36) является устойчивым.

Результат (36) демонстрирует неожиданную, на первый взгляд, тенденцию: с увеличением коэффициента поглощения α второй гармоники амплитуда колебания на основной частоте возрастает. На такую закономерность указано, например, в работах [9, 10], однако там речь шла о недиспергирующих нелинейных волнах, в которых происходит формирование ударных фронтов и “растекание” энергии по многим высшим гармоникам. Подавление второй гармоники для таких волн “запирает” каскадный процесс передачи энергии вверх по спектру и как бы “выключает” нелинейное поглощение. Дискуссия по этой проблеме отражена в ранних работах [11, 12]. Теперь оказывается, что рост энергии, сохраняемой на основной частоте при усилении нелинейных потерь, происходит даже в таких простых нелинейных системах (24), где взаимодействуют только две гармоники [13, 14].

ПОДАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ И УВЕЛИЧЕНИЕ ДОБРОТНОСТИ РЕЗОНАТОРА С СЕЛЕКТИВНЫМИ ПОТЕРЯМИ

Как показано выше, влияние селективного поглощения на протекание нелинейных взаимодействий имеет общее значение с точки зрения теории колебаний и волн. Вводя селективно погло-

шающие элементы в систему (среду), можно управлять потоками энергии. Одно из явлений, представляющих интерес, состоит в следующем. Организуя отток энергии из полости акустического резонатора путем введения селективной диссипации на частоте второй гармоники, можно заметно усилить нелинейные колебания, повысить запасенную энергию и добротность. Парадоксальный эффект повышения добротности хорошо выражен в тех случаях, когда частоты высших гармоник, генерируемых в нелинейной среде, близки к собственным частотам резонатора. Важным примером системы, обладающей нужными свойствами, является акустический резонатор с селективными потерями.

Спектр собственных частот резонатора с жесткими стенками эквидистантен, то есть $\omega_n = n\omega_0 = n\pi c/L$. Поэтому генерируемая гармоника с номером n является n -й модой. Из-за этого в резонаторе реализуется каскад нелинейных процессов, приводящих к эффективной перекачке энергии вверх по спектру. В высокочастотной области энергия колебаний интенсивно поглощается вследствие диссипативных процессов, обычно связанных с вязкостью и теплопроводностью среды.

Общие идеи управления волновыми взаимодействиями за счет внесения селективных потерь изложены в работах [9, 14–16]. В данном случае необходимо внести поглотитель на частоте $2\omega_0$; подавление второй гармоники прервет каскадный процесс передачи энергии вверх по спектру или, иными словами, “подавит” образование ударных фронтов. Технически потери на частоте $2\omega_0$ можно реализовать либо введением в объем среды резонансных рассеивающих элементов (например, пузырьков газа в жидкость), либо использовать селективные границы (например, прозрачные для волны $2\omega_0$ и отражающие вовнутрь все иные частоты [6–8, 16]).

Представим поле, осциллирующее между стенками резонатора $x = 0$ и $x = L$, как суперпозицию двух встречных нелинейных волн [2, 4]. Функция u , описывающая “правую” волну колебательной скорости, подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \\ = \frac{A}{2L} \sin \omega t - \frac{\alpha}{c} b_2(t) \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь t – “медленное” время, описывающее процессы установления в резонаторе, τ – “быстрое” время, описывающее осцилляции, α – коэффи-

циент селективного поглощения, $b_2(t)$ – амплитуда второй гармоники:

$$b_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(t, \tau) \sin 2\omega \tau d(\omega \tau), \quad (38)$$

которая заранее не известна. Таким образом, модель (37), (38) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение. В тех случаях, когда правая часть уравнения (37) известна, эта модель переходит в неоднородное уравнение типа Бюргерса.

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} V = \frac{u}{u_0}, \quad \theta = \omega t, \quad T = \frac{t}{t_{SH}}; \\ t_{SH} = \frac{c}{\varepsilon \omega u_0}, \quad u_0 = \sqrt{\frac{Ac}{2\rho\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь t_{SH} – характерное “нелинейное” время, за которое в волне может сформироваться разрыв, u_0 – характерная амплитуда. В обозначениях (39) наша модель примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial T} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \\ = \sin \theta - D \sin 2\theta \int_0^\pi V(T, \theta') \sin 2\theta' d\theta'. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь присутствуют безразмерные числа:

$$\Gamma = \frac{b\omega}{2\varepsilon \rho c u_0} = \frac{t_{SH}}{t_{DIS}}, \quad D = \frac{\alpha c}{\varepsilon \omega u_0} = \alpha t_{SH}. \quad (41)$$

Они определяются отношением нелинейного времени t_{SH} ко времени обычного диссипативного (вязкостного) поглощения (это число Γ) либо к характерному времени α^{-1} селективного поглощения (число D).

Для расчета процесса возбуждения вынужденных колебаний в резонаторе нужно решить уравнение (40) с нулевым начальным условием $V(T=0, \theta) = 0$. При больших значениях “медленного” времени, при $T \rightarrow \infty$, достигается баланс между поступлением энергии от источника (колеблющейся стенки) и потерями трех типов: вязкостными, нелинейными и селективными. Анализ удастся провести только для установившихся колебаний. В стационарном режиме нелинейность выражена сильнее всего, поэтому этот режим наиболее интересен.

Интегрируем, положив для простоты вязкость равной нулю:

$$V^2 - \overline{V^2} = 2 \cos \theta - DB_2 \cos 2\theta. \quad (42)$$

Здесь черта сверху означает усреднение по периоду колебаний. Константа $\overline{V^2}$ пропорциональна средней интенсивности волны. Определим ее как

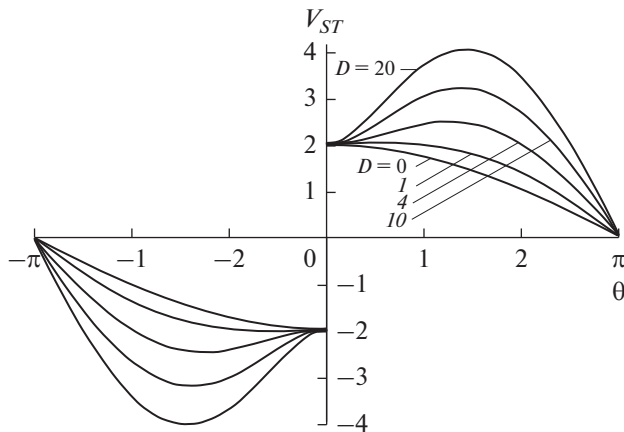


Рис. 1. Профили одного периода одной из двух бегущих волн, формирующих нелинейное поле в резонаторе с селективными потерями $D = 0, 1, 4, 10, 20$ на частоте второй гармоники.

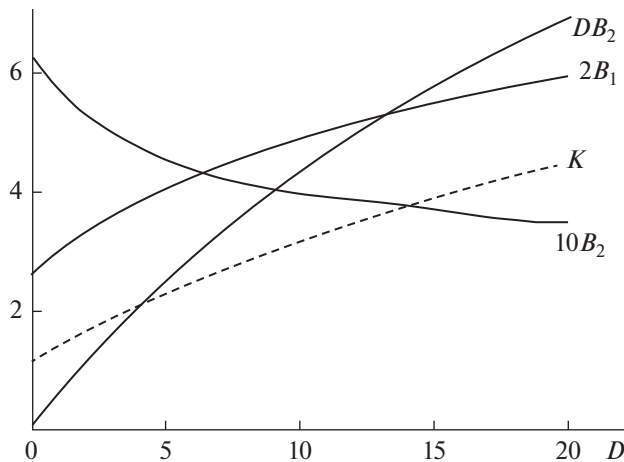


Рис. 2. Зависимости амплитуд первой и второй гармоник, а также произведения DB_2 для различных значений селективного поглощения D (сплошные линии) и “коэффициента усиления” энергии колебаний K , накопленной в полости резонатора (штриховая кривая).

$\overline{V^2} = 2 + DB_2$ из условия $V(\theta = \pi) = 0$. Решение при этом имеет вид

$$\frac{V_{ST}(\theta)}{\sqrt{2}} = \pm \left[(1 + \cos \theta) + D(1 - \cos^2 \theta) \times \right. \\ \left. \times \frac{2}{\pi} \int_0^\pi V_{ST}(\theta') \sin 2\theta' d\theta' \right]^{1/2}. \quad (43)$$

Знак “плюс” берется в (43) для полупериода $0 < \theta \leq \pi$, знак “минус” — для $-\pi \leq \theta < 0$. В окрестности точки $\theta = 0$ формируется ударный фронт. Не интересуясь его структурой, мы поло-

жили параметр $\Gamma = 0$. Учет конечности Γ может быть произведен методом сращиваемых асимптотических разложений и даст малые поправки (в режиме сильно выраженной нелинейности) к энергетическим характеристикам поля.

Профили одного периода колебаний (43) изображены на рис. 1 для различных значений коэффициента селективного поглощения $D = 0, 1, 4, 10, 20$. Профиль при наличии лишь нелинейного поглощения ($D = 0$) отвечает известному решению неоднородного уравнения Бюргерса [14, 15]

$$V_{ST}(\theta) = 2 \cos(\theta/2) \operatorname{sign} \theta. \quad (44)$$

С увеличением селективного поглощения D безразмерная амплитуда разрыва на рис. 1 не растет, зато наблюдается рост возмущения V_{ST} на гладких участках профиля. При $D \gg 1$ колебание описывается выражением $V_{ST} \approx V_0 \sin \theta$. Оно происходит почти по гармоническому закону, но в точке $\theta = 0$ сохраняется разрыв. Однако при больших числах D безразмерная величина скачка ($= 2$) становится малой по сравнению с амплитудой волны V_0 , т.е. $2 \ll V_0$.

Таким образом, с увеличением числа D наблюдается заметное падение амплитуды B_2 второй гармоники 2ω . Начало этого процесса показано на рис. 2. Подавление волны 2ω тормозит переброс энергии в высшие гармоники $3\omega, 4\omega, \dots$, поэтому энергия накапливается в волне основной частоты ω , которая практически не затухает. Рост амплитуды первой гармоники $B_1(D)$ также показан на рис. 2. Здесь же дана зависимость $DB_2(D)$. Максимальное значение возмущения (43) $V_{ST} = 2$ достигается при $\theta = 0$ для $DB_2 \leq 0.5$, а для $DB_2 > 0.5$ максимум (см. рис. 1) сдвигается в точку $\theta_{\max}$, где

$$V_{\max}(\theta_{\max}) = \frac{1 + 2DB_2}{\sqrt{2DB_2}}, \quad (45) \\ \theta_{\max} = \arccos \frac{1}{2DB_2}.$$

Средняя интенсивность волны также растет с усилением селективного поглощения:

$$I = \overline{V_{ST}^2} = 2 + DB_2(D). \quad (46)$$

Добротность резонатора в режиме нелинейных колебаний, имеющих сложный спектральный состав, может быть определена как отношение максимального возмущения скорости в стоячей

волне $2u_{\max}$ к амплитуде скорости A колебаний границы:

$$Q = \frac{2u_{\max}}{A} = \sqrt{\frac{2c}{\pi \epsilon A}} \Phi(2DB_2);$$

$$\Phi(x \equiv 2DB_2) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}, \quad x > 1; \quad (47)$$

$$\Phi = 2, \quad x \leq 1.$$

Можно также определить квадрат добротности через отношение средних интенсивностей этих колебаний:

$$Q^2 = \frac{\overline{2u^2}}{A^2/2} = \frac{2c}{\pi \epsilon A} (2 + DB_2). \quad (48)$$

Обе формулы (47), (48) описывают возрастание добротности с ростом селективного поглощения D .

Оценки по этим формулам показывают, что если правая стенка $x = L$ резонатора селективно пропускает наружу 98% мощности падающего излучения на частоте второй гармоники, то добротность резонатора увеличивается примерно в 3.5 раза, а энергия колебаний — на порядок.

Работа поддержана грантом РФФИ 19-02-00937.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. Ленинград: Судостроение, 1981.
2. Руденко О.В., Хедберг К.М., Энфло Б.О. Нелинейные стоячие волны в слое, возбуждаемые периодическим движением его границы // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 4. С. 525–533.
3. Руденко О.В., Шанин А.В. Нелинейные явления при установлении колебаний слоя линейной диссипативной среды, возбуждаемых конечными смещениями его границы // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 392–400.
4. Rudenko O.V. Nonlinear standing waves, resonant phenomena and frequency characteristics of distributed systems (Review) // Acoust. Phys. 2009. V. 55. № 1. P. 27–54.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн (3-е изд.). М.: Ленанд, 2015. 432 с.
6. Андреев В.Г., Гусев В.Э., Карабутов А.А., Руденко О.В., Сапожников О.А. Повышение добротности нелинейного акустического резонатора с помощью селективно поглощающего зеркала // Акуст. журн. 2000. Т. 31. № 2. С. 275–276.
7. Красильников М.В., Руденко О.В. Генерация второй гармоники в резонаторе типа многослойного интерференционного фильтра // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 5. С. 744–748.
8. Руденко О.В., Хирных К.Л. Модель резонатора Гельмгольца для поглощения интенсивного звука // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 527–534.
9. Руденко О.В. К проблеме искусственных нелинейных сред с резонансным поглотителем // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 3. С. 398–402.
10. Андреев В.Г., Васильева О.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В. Процессы генерации второй гармоники и вырожденного параметрического усиления в среде с селективным поглощением // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 1. С. 12–16.
11. Moffett M.B., Mellen R.H. On absorption as a means of saturation suppression // J. Sound Vibr. 1981. V. 76. № 2. P. 295–297. Woodsum H.C. Author's reply // J. Sound Vibr. 1981. V. 76. № 2. P. 297–298.
12. Woodsum H.C. Enhancement of parametric efficiency by saturation suppression // J. Sound and Vibration. 1980. V. 69. № 1. P. 27–33.
13. Андреев В.Г., Руденко О.В., Сапожников О.А., Хохлова В.А. Подавление нелинейного затухания звуковой волны в среде, содержащей резонансный поглотитель с конечной шириной линии // Вест. Моск. Ун-та. Сер. 3: Физ., астроном. 1985. Т. 26. № 3. С. 58–62.
14. Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
15. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: Физматлит, 2008. 296 с.
16. Руденко О.В., Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л., Хедберг К.М. Рост энергии и добротности нелинейного резонатора с усилением его потерь // Докл. Акад. наук. 2002. Т. 383. № 3. С. 330–333.