

**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ
АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВА ПУЧКА НА СИЛЬНО ВЫТЯНУТОМ СФЕРОИДЕ

© 2019 г. И. В. Андронов*

*Санкт-Петербургский государственный университет, НИИФ
ул. Ульяновская, дом 1/1, Петродворец,
198504 Россия*

*e-mail: iva---@list.ru

Поступила в редакцию 09.01.2019 г.

После доработки 13.02.2019 г.

Принята к публикации 20.03.2019 г.

Рассмотрена задача высокочастотной дифракции гауссова пучка, падающего параллельно оси сильно вытянутого сфероида. Методом параболического уравнения в сфероидальных координатах построен старший член асимптотики поля в пограничном слое у поверхности в виде интеграла, содержащего функции Уиттекера. Рассчитаны значения поля на поверхности идеально жесткого сфероида. Проведено обсуждение эффектов высокочастотной дифракции.

Ключевые слова: дифракция, сильно вытянутый сфероид, высокочастотная асимптотика, метод параболического уравнения

DOI: 10.1134/S0320791919040014

ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что сильно вытянутым телом в задачах высокочастотной дифракции [1] мы называем такое выпуклое тело, радиусы кривизны поверхности которого удовлетворяют соотношению

$$kr \sim (kr_t)^3 \quad (1)$$

или эквивалентно

$$kr \sim \left(\frac{\rho}{\rho_t} \right)^{3/2}. \quad (2)$$

Здесь k – волновое число, ρ – радиус кривизны поверхности в плоскости падения, ρ_t – радиус кривизны поверхности в поперечной плоскости.

Отметим, что в соотношения (1), (2) входит частота. Таким образом, при достаточном увеличении частоты тело, характеризуемое любым сколь угодно большим отношением ρ/ρ_t , перестает быть сильно вытянутым в указанном выше смысле, и для описания процессов дифракции на нем могут быть применены классические высокочастотные асимптотики.

Обычно, в задачах дифракции выделяются две частотные области. На низких и умеренных частотах возможен прямой численный счет методом конечных или граничных элементов, на высоких частотах хорошо работают асимптотические приближения. Однако, в задачах дифракции на вытянутых телах на шкале частот может наблюдаться область, в которой прямой численный счет уже невозможен, а асимптотические подходы еще недостаточно точны. Для того чтобы по-

высить диапазон частот, доступных для численного счета, и сделать счет устойчивым к степени вытянутости тела, плодотворными являются подходы, связанные с диаграммными уравнениями [2] и методом дискретных источников [3]. В случае же умеренно высоких частот, для которых величины kr и kr_t асимптотически велики, но связаны соотношением (1), необходимы специальные асимптотические подходы, разработанные в [1, 2, 6] и др. работах.

Процессы высокочастотной дифракции на сильно вытянутых телах имеют определенную специфику. Трактовать эти явления с точки зрения классической теории высокочастотной дифракции не всегда возможно, поскольку принцип локальности, установленный Фоком [7] и лежащий в основе классического асимптотического подхода, в случае сильно вытянутых тел оказывается недостаточно локальным. Другими словами, дифракционное поле на сильно вытянутом теле зависит от геометрии поверхности и поля лучей не только в малой окрестности рассматриваемой точки, но определяется геометрией всей задачи. Происходит это от того, что масштабы пограничного слоя, определяемого как и в классическом случае радиусом кривизны геодезической на поверхности тела, оказываются сравнимыми с размером всего тела. В связи с этим привычная логика анализа и интерпретации процессов дифракции в случае сильно вытянутых тел не работает. Так, на сильно вытянутом теле нет области глубокой тени, все тело располагается в полутени. Соответственно, говорить о волнах соскальзывания

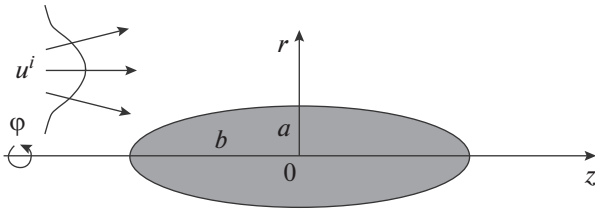


Рис. 1. Геометрия задачи.

можно лишь с определенными оговорками, поскольку отделить их одну от другой по разности фаз не удастся. Нет также и некоторых других объектов, привычных для высокочастотной дифракции.

Для того чтобы хоть в какой-то мере воспользоваться идеей локальности, необходимо произвести локализацию дифракционного процесса некоторым дополнительным способом. В этой статье мы рассматриваем дифракцию гауссовых пучков на сильно вытянутом сфероиде.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Рассматривается стационарная задача дифракции на сильно вытянутом сфероиде. Множитель, выражающий зависимость от времени, принят в виде $e^{-i\omega t}$ и всюду опущен. Будем пользоваться цилиндрической системой координат (r, φ, z) , ось которой совпадает с осью вращения сфероида, а начало координат находится в его центре (см. рис. 1). Поверхность сфероида зададим уравнением

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Во внешности сфероида поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{4}$$

где $k = \omega/c$ – волновое число. На поверхности будем рассматривать два варианта краевых условий. Либо поверхность идеально жесткая

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \tag{5}$$

где n – нормаль к поверхности, либо идеально мягкая

$$u = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим дифракцию гауссова пучка u^i , который в локальной системе координат описывается формулой

$$u^i = \frac{C}{s - s^* - id} \times \exp \left\{ iks + i \frac{k(\Delta r)^2 (s - s^*)}{2(s - s^*)^2 + d^2} - \frac{kd}{2} \frac{(\Delta r)^2}{(s - s^*)^2 + d^2} \right\}. \tag{7}$$

Здесь C – амплитуда, s – координата, измеряемая вдоль оси пучка, Δr – поперечная координата, расстояние от точки наблюдения до оси пучка, s^* и d – параметры, характеризующие положение плоскости перетяжки пучка и степень его фокусировки.

Будем рассматривать гауссовы пучки, распространяющиеся параллельно оси z . Тогда $s = z$ и, если ось пучка имеет координаты $r = r_0, \varphi = 0$, то

$$\Delta r = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi)}.$$

Будем считать частоту достаточно высокой, так что $kb \gg 1$. При этом сфероид настолько вытянут, что выполнены соотношения (1), (2). Степень вытянутости будем характеризовать параметром

$$\chi = \frac{ka^2}{b}, \tag{8}$$

который является величиной порядка единицы, т.е.

$$\chi = O(1). \tag{9}$$

ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Процедура построения старшего члена асимптотики поля повторяет приведенную в [5, 6]. Кратко напомним основные моменты. Во-первых, воспользовавшись симметрией вращения поверхности, представим поле в виде ряда Фурье по угловой переменной φ :

$$u = u_0(r, z) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(r, z) \cos(m\varphi). \tag{10}$$

Каждая гармоника u_m удовлетворяет соответствующему уравнению

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} u_m + k^2 u_m = 0 \tag{11}$$

и краевым условиям (5) или (6).

Во-вторых, перейдем к эллиптическим координатам (η, ξ) , которые связаны с цилиндрическими формулами [8]

$$r = p\sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad z = p\eta\xi. \tag{12}$$

Здесь введена величина

$$p = \sqrt{b^2 - a^2}, \tag{13}$$

имеющая смысл половины расстояния между фокусами сфероида. В координатах (η, ξ) поверхность сфероида является координатной и задается уравнением

$$\xi = b/p. \tag{14}$$

В-третьих, заметив, что, ввиду принятого предположения (9), величина b/p асимптотически близка к единице, произведем растяжение радиальной координаты ξ , путем перехода к координате τ , которую введем формулой

$$\tau = \frac{2kb}{\chi}(\xi - 1). \quad (15)$$

Наконец, используя η и τ как координаты пограничного слоя, выделим быстро осциллирующий множитель

$$u_m = e^{ikp\eta} U_m(\eta, \tau), \quad (16)$$

а функции ослабления U_m будем искать в виде асимптотического ряда по обратным степеням большого параметра kp . В старшем порядке, для которого сохраним обозначение U_m , получим параболическое уравнение

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 U_m}{\partial \tau^2} + \frac{\partial U_m}{\partial \tau} + \frac{i\chi}{2}(1 - \eta^2) \frac{\partial U_m}{\partial \eta} + \\ + \left(\frac{\chi^2}{4} \tau - \frac{m^2}{4\tau} - \frac{i\chi}{2} \eta \right) U_m = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В уравнении (17) переменные делятся, что позволяет получить представление

$$\begin{aligned} U_m = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} \int \left(\frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right)^{it} \times \\ \times \left\{ A_m(t) \frac{M_{it, m/2}(-i\chi\tau)}{\sqrt{\chi\tau}} + B_m(t) \frac{W_{it, m/2}(-i\chi\tau)}{\sqrt{\chi\tau}} \right\} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь M и W – функции Уиттекера [9]. В фигурных скобках записано общее решение дифференциального уравнения по переменной τ , которое возникает при разделении переменных в (17) и содержит две произвольные на данном этапе построения решения функции A_m и B_m , зависящие от параметра разделения переменных. Так же как и в случае падения плоской волны, рассмотренного в [4–6], интегрирование в (18) будем проводить по вещественной оси (здесь и ниже пределы $\pm\infty$ опущены).

Как показано в цитируемых выше работах, слагаемое с функцией Уиттекера M отвечает падающей волне, а слагаемое с функцией Уиттекера W удовлетворяет условию излучения. Тогда, требуя выполнения краевого условия при каждом t , получим

$$B_m(t) = A_m(t)R_m(t), \quad (19)$$

где

$$R_m = - \frac{2i\chi \dot{M}_{it, m/2}(-i\chi) + M_{it, m/2}(-i\chi)}{2i\chi \dot{W}_{it, m/2}(-i\chi) + W_{it, m/2}(-i\chi)}$$

в случае идеально жесткой поверхности, описываемой условием (5), и

$$R_m = - \frac{M_{it, m/2}(-i\chi)}{W_{it, m/2}(-i\chi)}$$

в случае идеально мягкой поверхности, описываемой условием (6). Точка над функцией означает ее производную по аргументу.

Амплитуда A_m определена в следующем параграфе при помощи сшивания с падающим гауссовым пучком (7).

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ГАУССОВА ПУЧКА

Выражение (7) можно интерпретировать как поле точечного источника, смещенного в комплексном направлении, т.е. имеющего координаты

$$z = z_0 \equiv s^* + id, \quad r = r_0, \quad \varphi = 0.$$

Дифракция поля точечного источника на сильно вытянутом сфероиде рассмотрена в [10]. Для амплитуды A_m в представлении (18) там получена формула

$$\begin{aligned} A_m = \frac{2Ci^m}{\pi(m!)^2} \frac{\exp\left(-ikz_0 - \frac{iz_0}{2b}\delta\right)}{\sqrt{kpr_0}} \left(\frac{z_0 + b}{z_0 - b}\right)^{it} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{m+1}{2} + it\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2} - it\right) M_{it, m/2}(i\delta). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь введено обозначение

$$\delta = \frac{kbr_0^2}{z_0^2 - b^2}.$$

Эта формула получена в предположении, что источник находится в узком конусе на достаточно большом расстоянии левее сфероида, поскольку только в этом случае падающее поле отвечает лучам, бегущим под малыми углами к оси сфероида, и имеет зависимость от z , близкую к выделенной в (16).

В случае комплексных координат источника условия применимости формулы (20) необходимо исследовать дополнительно. Очевидно, что множитель e^{ikz} присутствует в (7) и, следовательно, для возможности использования приближения параболического уравнения необходимо лишь, чтобы оставшиеся два слагаемых в показателе экспоненты в (7), будучи записанными в координатах (η, τ) , выражали бы медленно меняющуюся функцию. Иными словами, для применимости формулы (20) необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения

$$\frac{k(\Delta r)^2(z - s^*)}{(z - s^*)^2 + d^2} < \text{const}, \quad (21)$$

$$\frac{k(\Delta r)^2 d}{(z - s^*)^2 + d^2} < \text{const}. \quad (22)$$

Будем рассматривать только такие r_0 , которые не превосходят нескольких a . Тогда в условиях (21), (22) можно заменить Δr на a . В результате для применимости формулы (20) достаточно, чтобы было выполнено

$$d > b. \quad (23)$$

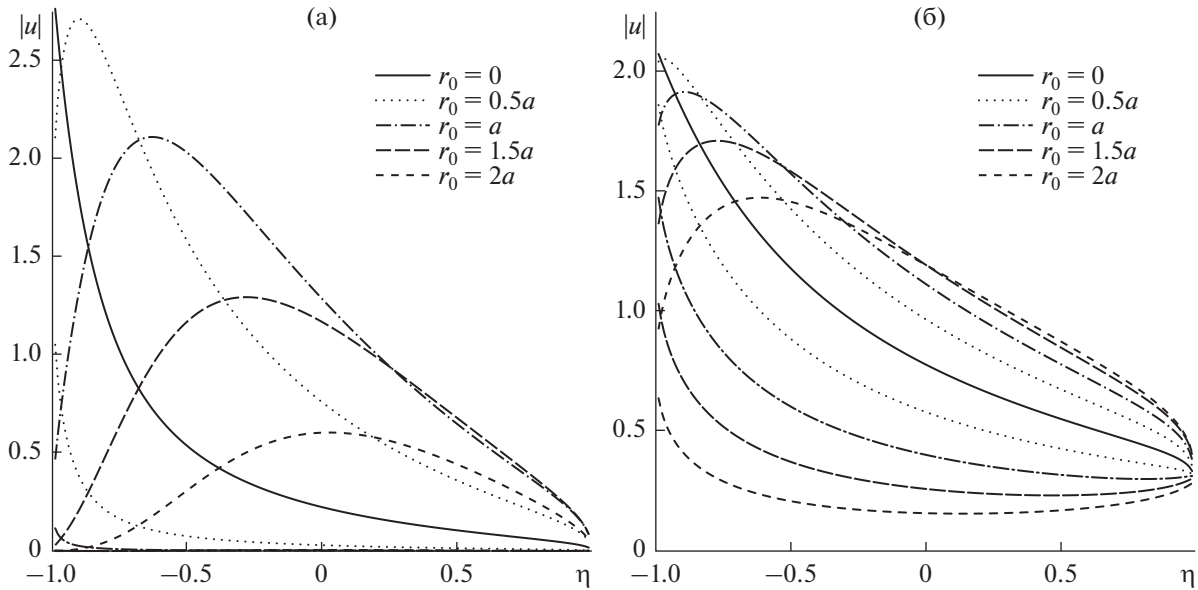


Рис. 2. Распределения поля в сечениях $\varphi = 0^\circ$ (верхние кривые) и $\varphi = 180^\circ$ (нижние кривые) (а) на поверхности сфероида № 1 и (б) на поверхности сфероида № 2 при возбуждении пучками с параметрами $s^* = -2b$, $d = b$ и разными значениями r_0 .

Таким образом, допустимы большие значения d , то есть сколь угодно узкие пучки. Величина s^* , определяющая положение плоскости перетяжки, при этом может быть любой, как меньше $-b$, что требовалось в случае дифракции поля точечного источника, так и больше $-b$, и даже больше b . Таким образом, можно рассматривать дифракцию как расходящихся, так и сходящихся гауссовых пучков.

АСИМПТОТИКА ПОЛЯ

Подставим выражения (20) и (19) в (18). В случае абсолютно жесткого сфероида получим

$$U_m = -\frac{C i^m \exp\left(-ikz_0 - \frac{iz_0}{2b} \delta\right)}{\pi m! \, k a r_0 \sqrt{1 - \eta^2}} \int \left(\frac{1 - \eta z_0 + b}{1 + \eta z_0 - b}\right)^{it} \times \Gamma\left(\frac{m+1}{2} + it\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2} - it\right) \times \frac{M_{it, m/2}(i\delta)}{W_{it, m/2}(-i\chi) - \frac{i}{2\chi} W_{it, m/2}(-i\chi)} dt. \tag{24}$$

В задаче дифракции на абсолютно мягком сфероиде получим

$$\frac{\partial U_m}{\partial \tau} = \frac{C i^m \exp\left(-ikz_0 - \frac{iz_0}{2b} \delta\right)}{\pi m! \, k a r_0 \sqrt{1 - \eta^2}} \int \left(\frac{1 - \eta z_0 + b}{1 + \eta z_0 - b}\right)^{it} \times \Gamma\left(\frac{m+1}{2} + it\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2} - it\right) \frac{M_{it, m/2}(i\delta)}{W_{it, m/2}(-i\chi)} dt. \tag{25}$$

При вещественных z_0 множитель $((z_0 + b)/(z_0 - b))^{it}$ является осциллирующим, при

комплексных z_0 он дает экспоненциальный рост на плюс или минус бесконечности. Однако, можно проверить, что интегралы в (24) и (25) сходятся за счет убывания, обеспечиваемого гамма-функциями.

Для того чтобы получить представление об особенностях дифракции гауссовых пучков на сильно вытянутом сфероиде, проведем расчеты по формуле (24) для двух идеально жестких сфероидов. Пусть первый сфероид (сфероид № 1) не очень сильно вытянут и характеризуется параметром $\chi = 10$. У более сильно вытянутого сфероида № 2 примем $\chi = 1$. Для придания более универсального характера результатам расчета введем безразмерные параметры пучка s^*/b , d/b и r_0/a .

На рис. 2 представлены результаты расчетов для пучков, характеризуемых параметрами $s^*/b = -2$, $d/b = 1$, но распространяющихся по разным лучам, определяемым параметром r_0 . На рис. 3 рассматриваются пучки с разными положениями сечения перетяжки. На обоих рисунках представлены значения поля в двух сечениях при $\varphi = 0^\circ$ и при $\varphi = 180^\circ$. Первое из этих сечений, за исключением случая $r_0 = 0$, является более освещенным, чем второе. Таким образом, из двух линий одного стиля, та, что проходит выше, отвечает сечению $\varphi = 0^\circ$, а та, что проходит ниже, сечению $\varphi = 180^\circ$. На основании проведенных расчетов можно указать на следующие закономерности:

1. Так же как и в случае падения плоской волны, поле имеет большую амплитуду на менее вытянутом сфероиде, однако убывает оно по координате η быстрее.

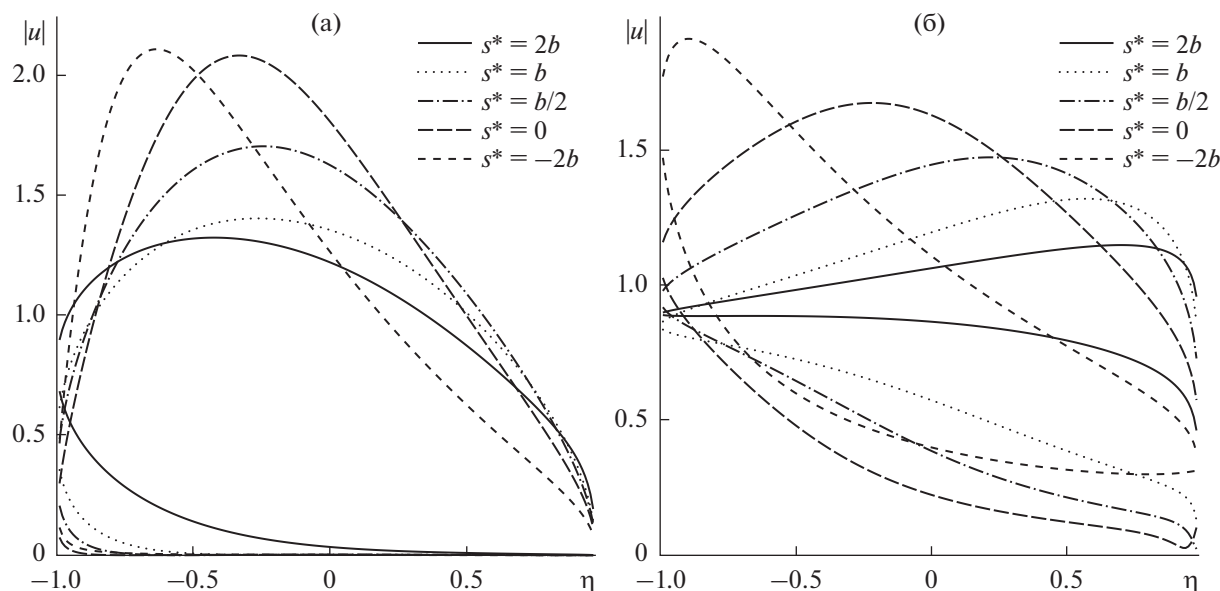


Рис. 3. Распределения поля в сечениях $\varphi = 0^\circ$ (верхние кривые) и $\varphi = 180^\circ$ (нижние кривые) (а) на поверхности сфероида № 1 и (б) на поверхности сфероида № 2 при возбуждении пучками с параметрами $r_0 = a$, $d = b$ и разными значениями s^* .

2. Пучок, ось которого совпадает с осью сфероида, засвечивает преимущественно лишь небольшую область вблизи переднего конца сфероида (при $\eta \approx -1$), а при увеличении η амплитуда поля монотонно уменьшается, и уменьшается быстрее, чем в случае падения плоской волны.

3. При увеличении r_0 ось пучка сдвигается от оси сфероида, в результате максимум амплитуды смещается в сторону больших значений координаты η . При этом скорость убывания поля вдоль поверхности уменьшается.

4. В отличие от случая дифракции плоской волны тень, образуемая с противоположной стороны сфероида по отношению к оси пучка, оказывается более глубокой.

5. При дифракции сходящегося пучка на достаточно сильно вытянутом сфероиде увеличение амплитуды поля в пучке конкурирует с убыванием поля вследствие дифракции, в результате амплитуда поля увеличивается вдоль поверхности и максимум поля наблюдается в области геометрической тени.

В заключение отметим, что в этой статье мы проводили расчеты лишь для пучков, распространяющихся параллельно оси сфероида. Однако, формулы (24) и (25) позволяют также рассчитывать дифракцию пучков, падающих под углом. Для этого надо лишь соответствующим образом задать мнимые части координат z_0 и r_0 . При этом для справедливости параболического приближения угол θ должен быть мал настолько, чтобы $\sqrt{kb}\theta = O(1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andronov I.V., Bouche D.* Asymptotic of creeping waves on a strongly prolate body // *Ann. Télécommun.* 1994. V. 49. № 3–4. P. 205–210.
2. *Клеев А.И., Кюркчан А.Г.* Использование метода диаграммных уравнений в сфероидальных координатах для решения задач дифракции на сильно вытянутых рассеивателях // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 1. С. 21–29.
3. *Маненков С.А.* Новая версия модифицированного метода дискретных источников применительно к задаче дифракции на теле вращения // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 2. С. 129–136.
4. *Андронов И.В.* Дифракция на сильно вытянутом теле вращения // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 2. С. 147–152.
5. *Андронов И.В.* Дифракция плоской волны, падающей под малым углом к оси вращения сильно вытянутого сфероида // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 5. С. 571–579.
6. *Andronov I.V.* High-frequency acoustic scattering from prolate spheroids with high aspect ratio // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 134. № 6. P. 4307–4316.
7. *Фок В.А.* Новые методы в теории дифракции // *Вестник Ленинградского университета.* 1947. № 4. С. 5–11.
8. *Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976. 320 с.
9. *Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.*
10. *Andronov I.V.* Point source diffraction by a strongly elongated spheroid // *J. Sound and Vibration.* 2015. V. 355. P. 360–368.