
**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

УДК 534.21:534.26

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ
МЕЖДУ БЕГУЩИМИ ВОЛНАМИ, ВОЗБУЖДАЕМЫМИ
В ПОГРУЖЕННОМ УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ**

© 2019 г. Е. В. Глушков^а, *, Н. В. Глушкова^а, О. А. Мякишева^а, **

^аИнститут математики, механики и информатики, Кубанский государственный университет,
ул. Ставропольская 149, Краснодар, 350040 Россия

*e-mail: evg@math.kubsu.ru

**e-mail: miakisheva.olga@gmail.com

Поступила в редакцию 13.08.2018 г.

После доработки 10.06.2019 г.

Принята к публикации 09.07.2019 г.

Изучается распределение волновой энергии бесконтактного ультразвукового пьезопреобразователя между отраженными, прошедшими и бегущими волнами, возбуждаемыми при зондировании упругой пластины, погруженной в акустическую жидкость. Анализируется зависимость осредненного за период колебаний количества энергии, переносимой каждой из возбуждаемых волн различного типа (акустические объемные волны, вытекающие волны Лэмба и волны Шолте-Стоунли), от относительных размеров источника, расстояния до пластины и частоты, а также структура энергетических потоков и пространственное распределение волновой энергии. Численное исследование проводится в рамках полуаналитической модели, базирующейся на интегральных и асимптотических представлениях для функции Грина рассматриваемой задачи. Графики зависимости волновой энергии от параметров задачи указывают на существование локальных максимумов (лучших частот) возбуждения бегущих волн, которые не совпадают с частотами локальных максимумов мощности источника.

Ключевые слова: бесконтактный пьезопреобразователь, погруженный упругий волновод, интегральные и асимптотические представления, волновая энергия, вытекающие волны, волны Шолте-Стоунли

DOI: 10.1134/S0320791919060042

ВВЕДЕНИЕ

В акустоэлектронике и мехатронике используются ультразвуковые поверхностные акустические волны (ПАВ). Они распространяются вдоль границ упругого тела на сравнительно большие расстояния от источника и взаимодействуют с неоднородностями (дефектами) любой природы, выявляя тем самым их местоположение. Рассеянные дефектом ПАВ несут информацию о его виде, размере, форме и ориентации, позволяя создавать на этой основе системы обнаружения и оценки потенциальной опасности дефектов, зарождающихся в элементах тонкостенных конструкций (судостроение, аэрокосмические изделия, емкости для химреактивов и радиоактивных отходов и т.п.). К настоящему времени разработка таких систем постоянного волнового контроля состояния элементов конструкций с помощью сети активных пьезодатчиков, возбуждающих и регистрирующих ультразвуковые ПАВ, сформировалась в самостоятельное направление научно-

технического развития – Structural Health Monitoring (SHM) [1, 2].

Разработка SHM систем существенным образом базируется на решении задач возбуждения, распространения и дифракции бегущих упругих волн в рассматриваемых образцах, в том числе и в волноводных структурах достаточно сложного строения, например, в слоистых волоконно-армированных композитах [3]. Среди указанных проблем важную роль играют задачи моделирования взаимодействия активных пьезоэлементов (пьезоактуаторов) с упругой подложкой. Их решение позволяет определять параметры работы пьезоактуатора, обеспечивающие максимальный отток волновой энергии возбуждаемыми ПАВ, повышая тем самым разрешающую способность SHM системы.

Для пленочных пьезоактуаторов, приклеенных к поверхности упругой пластины, хорошо известен эффект чередования частот максимально-го и минимального излучения энергии, уносимой бегущими волнами определенного типа [4–6]. В

первую очередь интерес здесь представляют амплитудно-частотные характеристики возбуждаемых фундаментальных антисимметричной и симметричной волн Лэмба — A_0 и S_0 . Для частот, на которых энергия A_0 и S_0 мод достигает локальных максимумов, в SHM используется специальный термин “sweet spots” (“лучшие частоты”) [4]. Их конкретные значения зависят от соотношения радиуса актуатора, толщины пластины и сочетания упругих свойств пьезонакладки и волновода. На плоскости частота-радиус (ω, a) графики зависимости общего количества энергии пьезоактуатора $E_0(\omega, a)$ и энергии, уносимой модами A_0 и S_0 , выглядят как чередующиеся светлые и темные полосы минимальных и максимальных значений, структура которых резко меняется на частотах отсечки, т.е. при появлении каждой следующей высшей моды (см., например, рис. 4–5 работы [7]).

Наряду со встроенными пьезоисточниками в последние годы в SHM все шире применяются бесконтактные преобразователи (air-coupled transducers — АСТ [3, 8–10]) в сочетании с сетью пассивных пьезосенсоров. Взаимодействие акустического пучка, генерируемого АСТ, с упругой структурой также приводит к появлению бегущих волн, распространяющихся вдоль волновода, погруженного в акустическую среду (газ или жидкость), поэтому такие источники, перемещаемые вдоль поверхности специальными манипуляторами, также используются для инспекции больших площадей, например, подводной части корпуса судна или обшивки авиалайнера [11, 12].

Здесь возникает такая же задача определения лучших частот возбуждения бегущих волн, в которой появляются дополнительные параметры: расстояние от источника до поверхности инспектируемой структуры и соотношение ее упругих свойств и свойств окружающей среды. Взаимодействие акустических волн с упругими телами является классической задачей структурной акустики, возникающей в таких практических приложениях, как виброизоляция и акустическая скрытность, бесконтактное определение свойств материалов, неразрушающий контроль, акустоэлектроника, акустическая микроскопия и многих других. Различные здесь методы и подходы [13–20] позволяют исследовать закономерности прохождения и отражения акустических сигналов через твердую преграду и характеристики возбуждаемых в ней бегущих упругих волн. Для определения оптимальных параметров бесконтактного преобразователя большое значение имеют также результаты по моделированию работы источника вблизи упругого препятствия и оценке количества отдаваемой им энергии в зависимости от расстояния до твердой поверхности и частоты [13, 16]. Тем не

менее, определение доли излучаемой энергии, идущей на возбуждение бегущих волн, и изучение ее распределения между нормальными модами, все еще требует более детального исследования.

В настоящей работе формулы, выведенные для анализа распределения энергии контактного источника между объемными и поверхностными волнами многослойного упругого полупространства [21, 22], модифицируются на случай бесконтактного АСТ-излучателя, работающего вблизи погруженного упругого волновода. Как и ранее, явные выражения для потока энергии, переносимой волнами различных типов, получены через элементы матрицы Грина рассматриваемой слоистой среды и характеристики источника. Возможность практического использования этих выражений определяется наличием эффективных алгоритмов построения Фурье-символа матрицы Грина рассматриваемой волноводной структуры, поиска их вещественных и комплексных полюсов, вычисления контурных интегралов и вычетов в этих полюсах. Для структур с плоскопараллельными границами, к которым относится рассматриваемая погруженная пластина, применение преобразования Фурье по горизонтальным координатам позволяет получить явное интегральное представление функции Грина в виде контурных интегралов обратного преобразования Фурье [23, 24].

Основываясь на опыте разработки методов построения матрицы Грина для многослойных упругих сред, в том числе и с такими усложненными свойствами как произвольная анизотропия, пористость и градиентность (см., например, обзор в работе [25]), создан набор математических и компьютерных моделей для иерархии погруженных упругих волноводов различной сложности, начиная от пластин Кирхгофа-Лява до многослойных композитов с произвольной анизотропией слоев. В их рамках рассматривались такие вопросы, как трансформация классических волн Лэмба в вытекающие бегущие волны и особенности проявления феномена обратных волн, зависимость коэффициентов прохождения и отражения от строения (многослойности) пластины и частоты, эффект резонансного прохождения сигнала через пластину, энергетический баланс и структура энергетических потоков, уходящих от источника на бесконечность (см. [26] и цитируемые в ней статьи). Настоящая работа посвящена исследованию зависимости количества волновой энергии, поступающей от плоского кругового источника, моделирующего работу бесконтактного преобразователя, от его размера, расстояния до пластины и частоты, а также анализу ее распределения между отраженными, прошедшими и возбуждаемыми в пластине бегущими волнами.

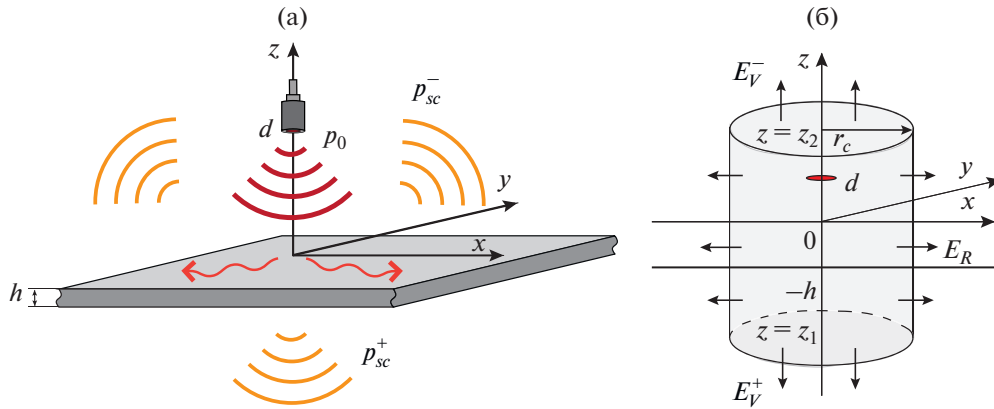


Рис. 1. (а) Геометрия задачи; (б) боковая и горизонтальные поверхности цилиндра, через которые проходит энергия E_R и E_V^\pm .

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ упругого слоя толщины h , погруженного в акустическую среду (рис. 1а); гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ далее опущен. Акустическое давление $p(\mathbf{x})$ в верхнем и нижнем полупространствах $z \geq 0$ и $z \leq -h$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + \kappa_0^2 p = q_0(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\kappa_0 = \omega/c_0$ – волновое число, c_0 – скорость звука в акустической среде, а функция q_0 описывает распределение некоторой силы \mathbf{F} на ограниченной поверхности D_0 излучающего элемента источника, моделируя его действие.

Предполагается, что источник расположен в верхнем полупространстве, поэтому поле давлений может быть представлено в следующем виде:

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_0(\mathbf{x}) + p_{sc}^-(\mathbf{x}), & z \geq 0, \\ p_{sc}^+(\mathbf{x}), & z \leq -h, \end{cases} \tag{2}$$

где p_0 – поле источника в безграничной среде (частное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям излучения на бесконечности), а p_{sc}^- и p_{sc}^+ – поле отраженных от пластины и прошедших сквозь нее объемных волн; индексы минус и плюс используются для функций, определенных в верхнем и нижнем акустических полупространствах $z \geq 0$ и $z \leq -h$ соответственно. Волновые поля в пластине и жидкости связаны условиями непрерывности нормальных смещений $u_z(\mathbf{x})$ и напряжений на границах пластины:

$$u_z = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \sigma_z = -p \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = -h. \tag{3}$$

Здесь учтена связь между комплексными амплитудами вектора смещений и поля давлений в акустической жидкости [27]: $\mathbf{u} = \nabla p / (\rho_0 \omega^2)$; компоненты вектора напряжений $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z)$ выражаются через компоненты перемещений \mathbf{u} в соответствии с линейными соотношениями закона Гука для рассматриваемого образца. Кроме того, на границах пластины выполняются условия отсутствия касательных напряжений:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = -h. \tag{4}$$

В случае контакта пластины с акустической жидкостью только с одной стороны $z = 0$ ее нижняя поверхность считается свободной от напряжений, т.е. $p_{sc}^+ = 0$. Замыкают постановку условия излучения на бесконечности, вытекающие из принципа предельного поглощения [23, 28].

При наличии функции Грина для поля давлений $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ и вектор-функции Грина для поля смещений $\mathbf{g}_u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ решение рассматриваемой краевой задачи представимо в виде поверхностных интегралов [29]:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \int_{D_0} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \int_{D_0} \mathbf{g}_u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned} \tag{5}$$

в которых занимаемая источником область D_0 может быть не только плоской, как в рассматриваемом случае круговой излучающей пластины АСТ, но, например, и вогнутой поверхностью излучающего элемента акустического микроскопа [30].

ФУНКЦИЯ ГРИНА

Функции $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ и $\mathbf{g}_u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ определяются как решение связной краевой задачи с дельта-функцией в правой части уравнения Гельмгольца вместо q_0 :

$$\Delta g + \kappa_0^2 g = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}). \quad (6)$$

Функции g и \mathbf{g}_u стоят в уравнениях и граничных условиях на месте p и \mathbf{u} соответственно. Вектор-функция \mathbf{g}_u , определенная как решение в слое $-h \leq z \leq 0$, доопределяется во внешней акустической среде соотношением

$$\mathbf{g}_u = \nabla g / (\rho_0 \omega^2) \text{ при } z \geq 0 \text{ и } z \leq -h. \quad (7)$$

Аналогично представлению (3), функция Грина давления g для источника, расположенного в точке $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ верхнего полупространства ($\zeta = d > 0$, d – расстояние от источника до пластины), также может быть представлена как сумма падающего поля $g_0(\mathbf{x})$ и отраженного $g_{sc}^-(\mathbf{x})$: $g = g_0 + g_{sc}^-$. Сферические объемные волны, излучаемые точечным источником, описываются классическим частным решением уравнения Гельмгольца

$$g_0 = -\frac{1}{4\pi R} e^{i\kappa_0 R}, \quad R = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|. \quad (8)$$

Применение преобразования Фурье \mathcal{F}_{xy} по горизонтальным координатам x и y к уравнениям и граничным условиям позволяет получить явные интегральные представления функций Грина через их Фурье-символы $G = \mathcal{F}_{xy}[g]$ и $\mathbf{G}_u = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{g}_u]$:

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}_{xy}^{-1}[G] = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{\Gamma_1 \Gamma_2} G(\alpha_1, \alpha_2, z; \boldsymbol{\xi}) e^{-i(\alpha_2 x + \alpha_1 y)} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (9)$$

и аналогично для \mathbf{g}_u . Контуры интегрирования Γ_1 и Γ_2 идут вдоль вещественных осей комплексных плоскостей α_1 и α_2 , обходя вещественные полюса ζ_n подынтегральной функции в соответствии с принципом предельного поглощения. Здесь и далее используются обозначения работ [22, 25, 26].

Для получения Фурье-символов G и \mathbf{G}_u используются разработанные ранее алгоритмы построения символа матрицы Грина \mathbf{K} упругого стратифицированного полупространства $z \leq 0$, к поверхности которого приложена нагрузка \mathbf{q} : $\tau|_{z=0} = \mathbf{q}$. Матрица \mathbf{K} определяет связь между Фурье-символами поверхностных напряжений $\mathbf{Q} = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{q}]$ и смещений $\mathbf{U} = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{u}]$:

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}, z) = \mathbf{K}(\mathbf{a}, z)\mathbf{Q}(\mathbf{a}), \quad z \leq 0, \quad (10)$$

где $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ – вектор параметров обратного преобразования Фурье. В соответствии с условиями (5) $\mathbf{q} = (0, 0, q)^T$, т.е. в соотношении (10) работает только третий столбец \mathbf{K}_3 матрицы \mathbf{K} . Учитывая условия непрерывности (4), Фурье-символ $Q = \mathcal{F}_{xy}[q]$ несложно выразить через Фурье-символ $\mathcal{F}_{xy}[g_0]|_{z=0} = (-e^{-\sigma_0 \zeta} / 2\sigma_0) e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta)}$ поля источника (8) при $z = 0$:

$$Q(\mathbf{a}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{Q} e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta)}, \quad \tilde{Q}(\mathbf{a}, \zeta) = -\Delta e^{-\sigma_0 \zeta} / \Delta_0, \quad (11)$$

$$\Delta_0 = \sigma_0 \Delta - \rho_0 \omega^2 \hat{K}_{33}(\mathbf{a}, 0), \quad \sigma_0 = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_0^2},$$

$$\text{Re } \sigma_0 \geq 0, \quad \text{Im } \sigma_0 \leq 0, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2,$$

где $\hat{K}_{33}(\mathbf{a}, z)$ и $\Delta(\mathbf{a})$ – числитель и знаменатель элемента K_{33} матрицы \mathbf{K} : $K_{33} = \hat{K}_{33} / \Delta$.

Таким образом, приходим к следующему представлению Фурье-символов функций Грина:

$$G(\mathbf{a}, z; \boldsymbol{\xi}) = [\tilde{G}_0 + \tilde{G}_{sc}^-] e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta)}, \quad z \geq 0, \quad (12)$$

$$\tilde{G}_0(\mathbf{a}, z; \zeta) = -\frac{e^{-\sigma_0 |z - \zeta|}}{2\sigma_0}, \quad \tilde{G}_{sc}^-(\mathbf{a}, z; \zeta) =$$

$$= -\frac{\rho \omega^2 \hat{K}_{33} + \sigma_0 \Delta}{2\sigma_0 \Delta_0} e^{-\sigma_0(z + \zeta)}, \quad (13)$$

$$\mathbf{G}_u(\mathbf{a}, z; \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{K}_3 Q, \quad z \leq 0.$$

Эти представления справедливы для произвольного вертикально-неоднородного упруго-акустического полупространства $z \leq 0$, контактирующего с акустическим полупространством $z \geq 0$. В случае контакта нижней поверхности слоя с вакуумом, \mathbf{K} – матрица Грина упругого слоя конечной толщины h , а в случае полностью погруженного волновода – матрица Грина многослойного полупространства $z \leq 0$, в котором нижнее полупространство $z \leq -h$ – акустическая среда. Используя разработанные алгоритмы построения матрицы \mathbf{K} , функции Грина вида (12)–(13) можно использовать для анализа волновых процессов в погруженных волноводах с усложненными свойствами, например, в случае волоконно-армированных углепластиков [31].

В изотропном случае компоненты вектора столбца $\mathbf{K}_3 = (-i\alpha_1 S(\alpha, z), -i\alpha_2 S(\alpha, z), R(\alpha, z))^T$ выражаются через две функции $S(\alpha, z)$ и $R(\alpha, z)$, зависящие в плоскости \mathbf{a} только от радиальной координаты $\alpha = |\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ [23], что позволяет свести двукратные контурные интегралы вида (10) к однократным интегралам по α . Конкретный вид функций $S(\alpha, z)$ и $R(\alpha, z)$ зависит от строения пластины (однородная, многослойная, градиентная и т.п.). В случае однородного изотропного слоя,

лежащего на акустическом полупространстве, они выписываются в явном виде [26].

ПОЛЕ БЕСКОНТАКТНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

В приведенных ниже численных примерах предполагается, что круговая излучающая пластина преобразователя радиуса a расположена параллельно погруженному слою на расстоянии d от него (рис. 1а), а моделирующая ее действие нагрузка F – равномерно распределена в области D_0 : $0 \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$. В этом случае подстановка функций Грина (10), (13)–(14) в выражения для генерируемых волновых полей (6) и замена порядка интегрирования приводит к представлениям в виде двукратных контурных интегралов обратного преобразования Фурье (как (10)) от произведений Фурье-символов GQ_0 и G_uQ_0 для p и u соответственно; здесь $Q_0 = \mathcal{F}_{xy}[q_0]$. Для равномерно-распределенной нагрузки ($q_0 = F/\pi a^2$ при $r \leq a$) $Q_0(\alpha) = 2FJ_1(\alpha a)/(a\alpha)$. В силу осевой симметрии эти интегралы сводятся к однократным интегралам по контуру Γ , идущему вдоль положительной полуоси комплексной плоскости α , отклоняясь от нее при обходе вещественных полюсов ζ_n в соответствии с принципом предельного поглощения:

$$\begin{aligned} p_{sc}^-(r, z) &= \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{G}_{sc}^-(\alpha, z; d) Q_0(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad z \geq 0, \\ u_r(r, z) &= \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int S(\alpha, z) \tilde{Q}(\alpha, d) Q_0(\alpha) J_1(\alpha r) \alpha^2 d\alpha, \\ &\quad -h \leq z \leq 0, \\ u_z(r, z) &= \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int R(\alpha, z) \tilde{Q}(\alpha, d) Q_0(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \\ &\quad -h \leq z \leq 0, \\ p_{sc}^+(r, z) &= \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{G}_{sc}^+(\alpha, z; d) Q_0(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad z \leq -h, \end{aligned} \tag{14}$$

где J_0 и J_1 – функции Бесселя нулевого и первого порядка.

Представления (14) дают решение рассматриваемой задачи, являясь основой для численного анализа. В ближней зоне он может проводиться с помощью прямого численного интегрирования, а в дальней зоне используются асимптотические представления, которые обычно применимы, начиная от расстояния 3–5 длин волн. Для отраженных и прошедших объемных волн p_{sc}^\pm асимптотики получены методом стационарной фазы, а для цилиндрических бегущих и вытекающих волн, распространяющихся вдоль пластины в радиальном направлении, – как вклад вычетов в первых N

вещественных и близких к вещественным полюсах подынтегральных функций ζ_n :

$$\begin{aligned} u(r, z) &\approx \sum_{i=1}^N a_n(z) H_0^{(1)}(\zeta_n r) \zeta_n \\ \text{и } p_{sc}^\pm(r, z) &\approx \sum_{i=1}^N b_n^\pm(z) H_0^{(1)}(\zeta_n r) \zeta_n, \\ a_n &= \frac{i}{2} \operatorname{res} K_3(\partial/\partial x, \partial/\partial y, z) \Big|_{\alpha=\zeta_n} Q(\zeta_n) Q_0(\zeta_n), \\ b_{sc}^\pm &= \frac{i}{2} \operatorname{res} P_{sc}^\pm(\alpha, z) \Big|_{\alpha=\zeta_n}, \end{aligned} \tag{15}$$

$H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля. Полюса ζ_n играют роль волновых чисел, определяя дисперсионные свойства возбуждаемых бегущих волн (фазовые скорости $c_n = \omega/\operatorname{Re}\zeta_n$).

Следует отметить, что в интегралах (14) общий знаменатель элементов матрицы K сокращается с Δ , входящей в числитель Q вида (11), и общим знаменателем всех подынтегральных функций становится Δ_0 . Поэтому волновые числа ζ_n определяются из характеристического уравнения

$$\Delta_0 = \sigma_0 \Delta - \rho_0 \omega^2 \hat{K}_{33}(\alpha, 0) = 0, \tag{16}$$

которое в случае однородного изотропного волновода совпадает с классическим характеристическим уравнением для погруженной пластины [32, 33]. При $\rho_0 \omega^2 \rightarrow 0$ оно вырождается в дисперсионное уравнение $\Delta_L = 0$ для не нагруженного жидкостью упругого слоя.

ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ

Для проверки полученных представлений численно контролировалось выполнение энергетического баланса и проводилось сопоставление с результатами других авторов. В качестве примера таких тестовых сопоставлений на рис. 2 приводятся нормированные к значениям в начале координат частотные зависимости давления в дальнем поле, полученные в работе [34] для пластины Кирхгофа (пунктир) и упругого слоя (сплошные линии), контактирующих с акустическим полупространством только с одной стороны. Источник – точечная вертикальная нагрузка F_0 , приложенная к поверхности пластины со стороны жидкости (рис. 2а) и вакуума (рис. 2б); частота f отнесена к частоте f_c , на которой длина изгибной волны в пластине совпадает с длиной звуковой волны в акустической среде. Круговыми маркерами нанесены результаты, полученные с помощью асимптотик, выведенных из интегральных представлений (14).

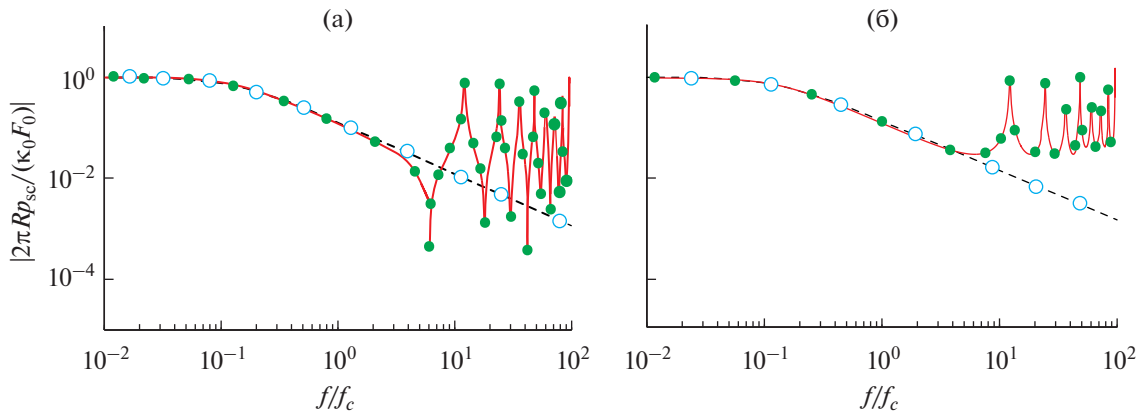


Рис. 2. Относительное давление в дальнем поле на расстоянии R от поверхности $z = 0$: тестовые сопоставления с результатами работы [34] для пластины Кирхгофа (пунктир) и упругого слоя (сплошные линии) при одностороннем нагружении жидкостью; результаты, полученные на основе представлений (14), нанесены круговыми маркерами; источник — точечная нагрузка амплитуды F_0 , приложенная со стороны (а) жидкости и (б) вакуума.

Для верификации разрабатываемой модели особенно полезными оказались результаты работы [35], в которой численно и экспериментально исследуется взаимодействие волнового поля, излучаемого АСТ преобразователем, с погруженной в воду стальной пластиной. В этой работе численное моделирование проводится с помощью метода конечных элементов (МКЭ), учитывая реальное строение источника (корпус, излучающая пластина и другие элементы конструкции). Результаты, полученные на основе представлений (14), в которых источник моделируется распределенной нагрузкой q_0 , показали такое же хорошее совпадение с экспериментальными данными, как и МКЭ моделирование, что подтверждает их практическую применимость. Сопоставления проводились как для волновых полей, так и для коэффициента прохождения $\kappa_T = 20 \lg |H_{pp}(0, 0, z_2, f)|$, где

$H_{pp} = p(x_2)/p(x_1)$ для точек x_1 и x_2 , взятых на верхней границе пластины ($z_1 = 0$) и в воде на глубине 100 мм от ее нижней границы; бесконтактный преобразователь радиуса $a = 15$ мм расположен на расстоянии $d = 270$ мм от пластины толщины $h = 6.05$ мм.

Сплошной линией на рис. 3 показана экспериментальная частотная зависимость коэффициента κ_T [35], пунктирной — рассчитанная по формулам (14). Пики резонансного прохождения, исследованию которого посвящена работа [35], наблюдаются на частотах появления новых вытекающих волн Лэмба (на частотах отсечки). Изменение структуры потоков волновой энергии в пластине при резонансном прохождении изучается также в работе [26].

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

Взаимодействие акустических пучков, генерируемых бесконтактным преобразователем, с погруженной пластиной приводит к появлению бегущих волн, описываемых асимптотикой (15). В свободном упругом слое это классические волны Лэмба [36], распространяющиеся вдоль него без экспоненциального затухания и потому переносящие энергию на бесконечность. Для пластины, погруженной в акустическую среду, распространение бегущих волн сопровождается переизлучением волновой энергии в окружающую среду, поэтому волны Лэмба трансформируются в вытекающие бегущие волны, которые уже не переносят энергию на бесконечность из-за ее оттока в акустическую среду возбуждаемыми в процессе их распространения объемными волнами.

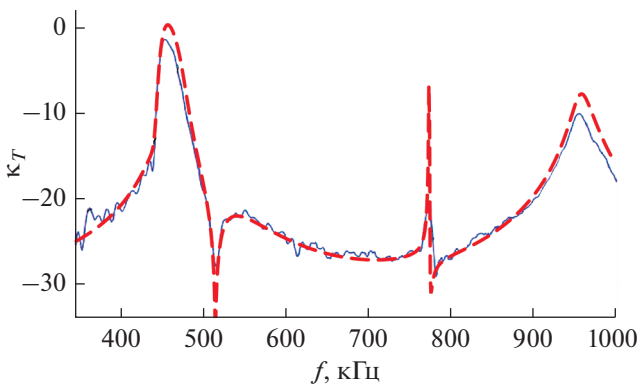


Рис. 3. Сопоставление численных результатов, полученных на основе полуаналитической модели (пунктирная линия), с экспериментальными результатами работы [35] (сплошная линия).

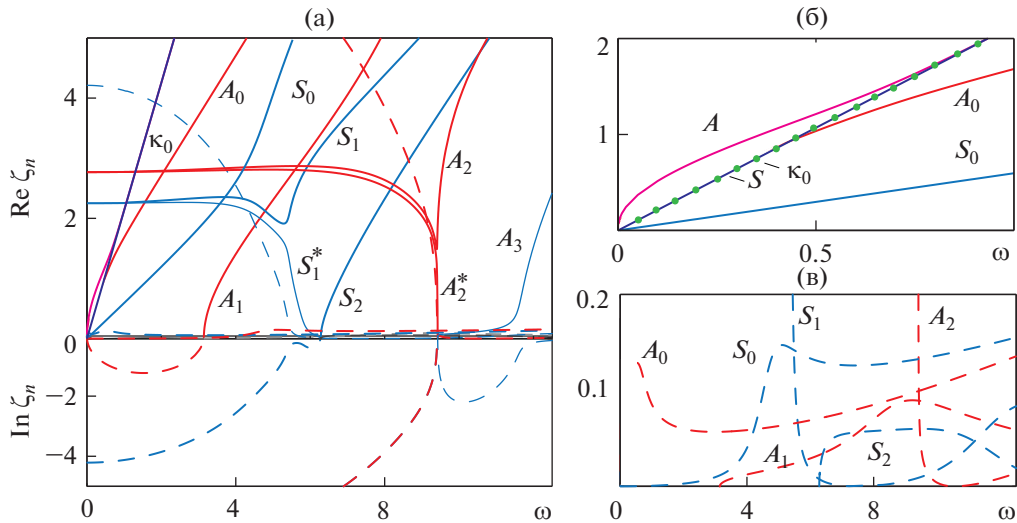


Рис. 4. (а) Вещественные ($\text{Re}\zeta_n$ – сплошные линии) и мнимые ($\text{Im}\zeta_n$ – пунктирные линии) части комплексных волновых чисел ζ_n для стальной пластины, погруженной в воду; увеличенные фрагменты (б) для чисто вещественных дисперсионных кривых волн Шолте-Стоунли A и S и (в) для мнимых частей $\text{Im}\zeta_n$ вытекающих волн Лэмба.

Математически на трансформацию волн Лэмба в вытекающие бегущие волны указывает появление у волновых чисел ζ_n ненулевой мнимой части, определяющей декремент их затухания $\delta_n = 2\pi\text{Im}\zeta_n/\text{Re}\zeta_n$ [37, 38]. При переходе к дисперсионному уравнению (16) чисто вещественные корни дисперсионного уравнения волн Лэмба сдвигаются с вещественной оси в комплексную плоскость α . Типичный вид получающихся дисперсионных кривых показан на рис. 4. Сплошными и пунктирными линиями изображены вещественная и мнимая части $\text{Re}\zeta_n$ и $\text{Im}\zeta_n$ комплексных волновых чисел ζ_n в зависимости от безразмерной круговой частоты $\omega = 2\pi fh/c_s$, где c_s – скорость поперечных волн в упругой среде.

Ниже численные результаты приводятся в безразмерном виде, получающемся при отнесении линейных размеров к толщине пластины h , скоростей – к скорости c_s и плотностей – к плотности пластины ρ . Безразмерные параметры стальной пластины: $c_p = 1.85$, $c_s = 1$, $\rho = 1$ и $h = 1$; параметры жидкости (вода): $c_0 = 0.47$ и $\rho_0 = 0.125$.

Вещественные части дисперсионных кривых вытекающих бегущих волн расположены ниже луча $\kappa_0 = \omega/c_0$ (их фазовая скорость больше скорости звука c_0). Они мало отличаются от дисперсионных кривых классических волн Лэмба для свободной упругой пластины, а амплитуда мнимых частей сравнительно мала (см. рис. 4в; практически такие же кривые приведены на рис. 8 [39], хорошее качественное совпадение наблюда-

ется также с кривыми рис. 2 [37], построенными методом возмущения по малому параметру). Кроме вытекающих волн в случае погруженного слоя появляются две новые незатухающие бегущие волны Шолте-Стоунли [32, 33] (вещественные кривые для антисимметричной волны A и симметричной S , рис. 4б). Эти волны распространяются с почти такой же фазовой скоростью, что и объемные акустические волны в жидкости, поэтому их дисперсионные кривые, идущие выше луча $\kappa_0 = \omega/c_0$, тесно прижимаются к нему с ростом частоты, но не сливаются. В то время как энергия, полученная вытекающими волнами

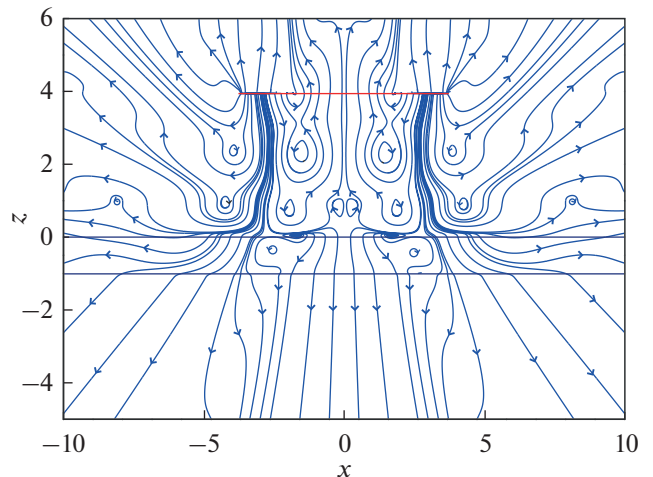


Рис. 5. Пример линий тока энергии для кругового преобразователя вблизи пластины.

Лэмба от источника, рассеивается вверх и вниз, не доходя вместе с ними до бесконечности, волны Шолте–Стоунли обеспечивают перенос энергии вдоль пластины на бесконечность.

Следует отметить, что для свободного слоя дисперсионная кривая моды A_0 выходит из начала координат вертикально вверх, поэтому в случае погруженного волновода должен существовать некоторый низкочастотный диапазон $0 < \omega < \omega_0$, в котором $\text{Re}\zeta_n > \kappa_0$, т.е. ее фазовая скорость меньше c_0 . С физической точки зрения такая волна должна распространяться без переизлучения энергии в окружающую среду (волновое число остается вещественным). Однако, соответствующий корень ζ_n оказывается на нефизическом листе римановой поверхности, который отделяется от физического листа разрезом $\text{Re}\alpha = \kappa_0$, $\text{Im}\alpha > 0$, идущим в комплексной плоскости α из точки ветвления κ_0 . Соответственно, дисперсионная кривая моды A_0 начинается на рис. 4б с частоты $\omega_0 = 0.44$, на которой этот корень выходит на физический лист, пересекая разрез.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ИСТОЧНИКА

Осредненный за период колебаний поток энергии E , переносимой в поле гармонических колебаний через некоторую поверхность D , определяется интегралом [40]:

$$E = \int_D e_n dS_n, \quad e_n = (\mathbf{e}, \mathbf{n}) = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\boldsymbol{\tau}_n, \mathbf{u}). \quad (17)$$

Здесь e_n — нормальная компонента вектора плотности энергии \mathbf{e} , $\boldsymbol{\tau}_n$ — вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} (в жидкости $\boldsymbol{\tau}_n = -p\mathbf{n}$).

Визуализация траекторий переноса энергии от источника на бесконечность обеспечивается линиями тока энергии, задаваемыми векторным полем $\mathbf{e}(\mathbf{x})$. В качестве примера, на рис. 5 показаны линии тока энергии, излучаемой круговым преобразователем безразмерного радиуса $a = 3.75$, расположенным на расстоянии $d = 4$ от пластины при частоте $\omega = 1$ (в размерных переменных это может быть тот же преобразователь, что и в примере рис. 3, но на расстоянии 16 мм от стальной пластины толщиной 4 мм).

Линии тока показывают осредненный за период колебаний путь переноса энергии, однако не дают информации о мощности потоков. Для количественной оценки распределения энергии источника между волнами различного типа и по направлениям излучения используются формулы, полученные из общего представления (17).

Энергия E_0 , поступающая от источника в среде (т.е. осредненная мощность источника), в общем случае вычисляется интегрированием плотности потока e_n по окружающей источник замкнутой поверхности D ; причем, в силу закона сохранения энергии результат не зависит от ее размера и формы. Для рассматриваемой модели бесконтактного преобразователя удобно взять в качестве D верхнюю и нижнюю поверхности круговой излучающей пластины D_0 , что с учетом выражения для плотности потока энергии в акустической среде $e_z = \text{Im}[p'_z p^*] / (2\omega\rho_0)$ и выражений (12), (14) приводит к представлению:

$$E_0 = \frac{1}{4\rho_0\omega\pi} \text{Im} \int_{\Gamma} [2\tilde{G}'_{0,z}(\alpha, z)\tilde{G}_0^*(\alpha^*, z) + \tilde{G}_{sc}^*(\alpha^*, z)] Q_0(\alpha) Q_0^*(\alpha^*) \alpha d\alpha, \quad z = \zeta \quad (18)$$

(звездочкой сверху обозначены комплексно-сопряженные величины). При выводе этой формулы, а также приведенных ниже формул (20)–(22) для энергии объемных и бегущих волн, применяется техника работы [21], детали реализации которой подробно обсуждаются также в статье [22].

Для анализа распределения энергии источника между возбуждаемыми волнами в качестве D используется поверхность цилиндра большого радиуса r_c (рис. 16). Потоки энергии E_V^+ и E_V^- через горизонтальные поверхности цилиндра $z = z_1$ и $z = z_2$ дают часть энергии источника, уносимой на бесконечность прошедшими и отраженными волнами p_{sc}^+ и p_{sc}^- , а поток E_R через боковую поверхность — долю энергии бегущих волн. При $\kappa_0 r_c \gg 1$ поток E_R фактически складывается только из энергии, переносимой модами A и S , так как количество энергии, переносимое вытекающими модами, убывает с расстоянием экспоненциально. Исходя из закона убывания амплитуды n -той моды

$$|\mathbf{u}_n| \sim O(e^{-\text{Im}\zeta_n r}), \quad r \rightarrow \infty,$$

степень уменьшения переносимой ей энергии $E_n(r)$ по отношению к начальному значению в ближней зоне $E_n(0)$ описывается следующей линейной зависимостью от расстояния r :

$$10 \lg |E_n(r)/E_n(0)| = -8.64 \text{Im}\zeta_n r \quad (\text{дБ})$$

(здесь учтено, что энергия пропорциональна квадрату амплитуды). Это соотношение позволяет оценить границу средней зоны, в которой вклад вытекающей волны еще заметен. Например, для мод, у которых $\text{Im}\zeta_n \approx 0.1$ (см. рис. 4в), потеря энергии более 50 дБ происходит на расстоянии $r/h > 60$.

В силу закона сохранения суммарное количество энергии через полную поверхность цилиндра E_c должно совпадать с энергией источника E_0 :

$$E_c = E_V^+ + E_V^- + E_R = E_0. \quad (19)$$

При осевой симметрии вектор плотности энергии выражается через две не зависящие от полярного угла φ компоненты – радиальную e_r и вертикальную e_z : $\mathbf{e} = (e_r, e_z)$. Используя представления для потоков энергии через горизонтальную плоскость и боковую поверхность цилиндра [21], выражения для E_V^\pm и E_R сводятся в этом случае к виду

$$E_V^+ = -\frac{1}{4\pi\rho_0\omega} \operatorname{Im} \int_0^{\kappa_0} \sigma_0 |\tilde{G}_{sc}^+ Q_0|^2 \alpha d\alpha, \quad z \leq -h, \quad (20)$$

$$E_V^- = -\frac{1}{4\pi\rho_0\omega} \operatorname{Im} \int_0^{\kappa_0} \sigma_0 |(\tilde{G}_0 + \tilde{G}_{sc}^-) Q_0|^2 \alpha d\alpha, \quad z \geq d, \quad (21)$$

$$E_R = \int_{z=z_1}^{z=z_2} \int_0^{2\pi} e_r(r, \varphi, z) r d\varphi dz = 2\pi \int_{z=z_1}^{z=z_2} e_r(r, z) r dz, \quad (22)$$

где

$$e_r = \begin{cases} \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} [\tau_{rr} u_r^* + \tau_{rz} u_z^*], & -h \geq z \geq 0, \\ \frac{1}{2\rho_0\omega} \operatorname{Im} \left[\frac{\partial p}{\partial r} p^* \right], & z > 0 \text{ и } z < -h. \end{cases}$$

В качестве примера распределения энергии кругового источника E_0 ($a = 3.75, d = 4$) между потоками E_V^-, E_V^+ и E_R на рис. 6а и его укрупненных фрагментах 6в и 6г приведены частотные зависимости этих величин и суммарного потока E_c (19), нормированные на мощность E_∞ такого же источника, но в безграничной акустической среде без пластины. Для количественной оценки изменения энергии источника с частотой на рис. 6б приведен график $E_\infty(\omega)/\tilde{E}_0$, где $\tilde{E}_0 = F/(8\pi\rho_0 c_0)$ – мощность эквивалентного по силе точечного источника $q_0 = F\delta(\mathbf{x})$ в безграничной среде.

Данный и другие численные примеры показывают, что баланс энергии (19) сохраняется для любых горизонтальных плоскостей $z = z_1 < -h, z = z_2 > d$ и боковой поверхности цилиндра достаточно большого радиуса $\kappa_0 r_c \gg 1$ (круговые маркеры для E_c лежат на сплошной линии для E_0). Видно, что доля энергии прошедших через пластину и бегущих волн E_V^+ и E_R значительна только на низких частотах (рис. 6в), а для E_V^+ – и при резонансном прохождении в окрестности частот отсечки и в диапазонах обратных волн, на-

пример, при $\omega \approx 5.7$ на рис. 6а. Для остальных частот с ростом ω основная часть энергии уходит на бесконечность через верхнюю плоскость $z = z_2$ вместе с полем объемных волн $p_0 + p_{sc}^-$ (E_V^- практически совпадает с E_0). Деформация пластины при этом фактически не влияет на мощность источника, на этих частотах она работает как жесткая преграда. Это согласуется с хорошо известными в структурной акустике законами рассеяния акустических волн на упругих телах – на высоких частотах последние можно рассматривать как недеформируемые [13, 16, 41].

В зависимости от частоты отраженное поле p_{sc}^- складывается с прямым полем источника p_0 в фазе или противофазе. Соответственно, график E_0/E_∞ (рис. 6а) быстро выходит на режим колебаний вокруг единицы с минимумами и максимумами, близкими к нулю и двум. Периодичность их чередования слегка нарушается только при переходе через диапазон появления обратной волны (мода S_1^* на рис. 4а). Здесь же наблюдается и резонансное прохождение звука сквозь пластину (рост значений энергии прошедших волн E_V^+). Это тот же резонансный пик, что и на частоте $f = 457$ кГц на рис. 3 (безразмерная частота $\omega = 5.5$). Следующий пик на частоте $f = 774$ кГц ($\omega = 9.4$) вызван появлением обратной волны A_2^* . Анализ изменения картины линий тока и плотности потока энергии при переходе от нерезонансных частот (как на рис. 5) к резонансным проводится в работе [20].

Общие закономерности изменения суммарной мощности E_0 при варьировании положения и размера источника иллюстрируют линии уровня функций $E_0(\omega, d)/E_\infty$ (рис. 7а) и $E_0(\omega, a)/E_\infty$ (рис. 7б) (относительное по сравнению с безграничной средой изменение отдаваемой мощности источника E_0 как функция частоты и расстояния при фиксированном $a = 3.75$, и как функция частоты и размера при фиксированном $d = 4$). Горизонтальными пунктирными линиями показаны сечения этих поверхностей, дающие график $E_0(\omega)/E_\infty$ на рис. 6. Чередование максимумов и минимумов на рис. 7а, как и ожидалось, определяется четным или нечетным числом акустических полуволн длины $\lambda = 2\pi c_0/\omega$, укладываемых в расстояние d . Соответственно, полосы максимумов идут в плоскости (ω, d) вдоль гипербол с небольшим сдвигом при переходе через диапазон обратных волн и частоты отсечки моды S_2 (после $\omega = 5.5$). А вот рис. 7б демонстрирует отсутствие зависимости лучших частот от радиуса источника a в отли-

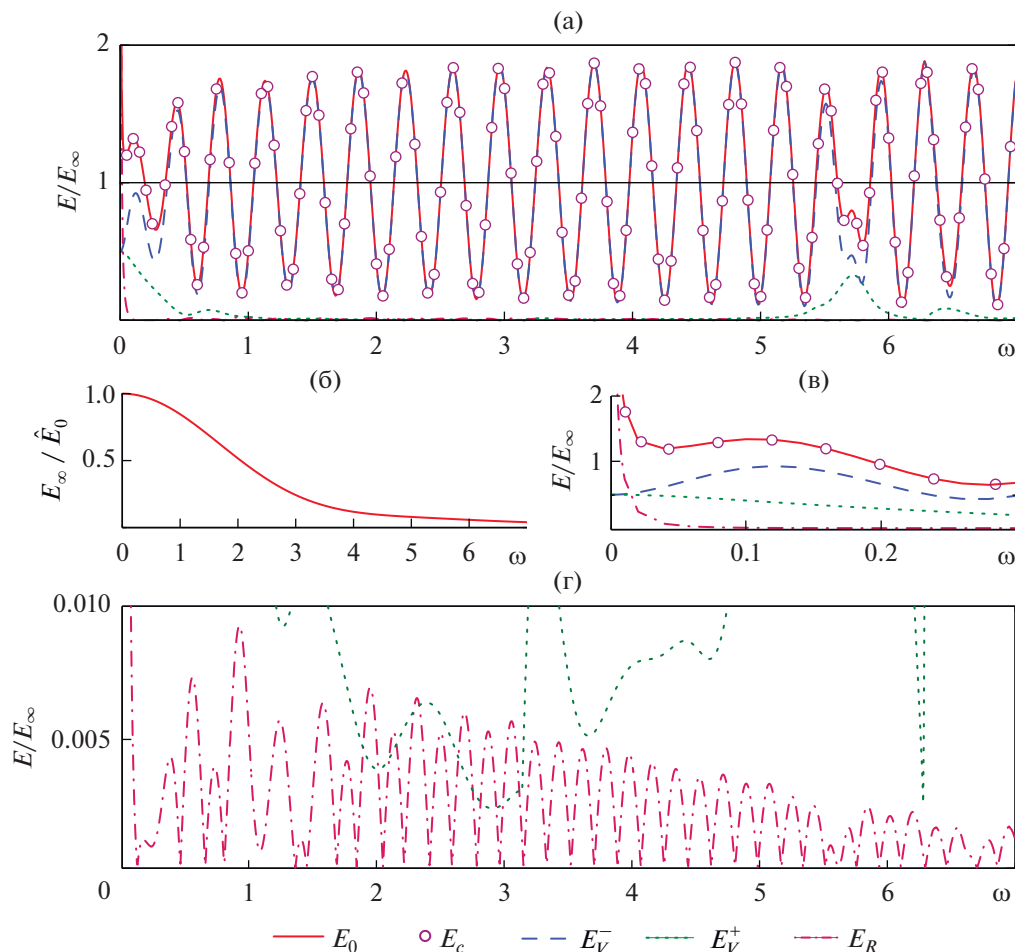


Рис. 6. (а) Распределение энергии кругового преобразователя ($a = 3.75$, $d = 4$) между возбуждаемыми волнами: частотные зависимости для энергии источника E_0 (сплошная линия), суммарного потока через полную поверхность цилиндра E_c (круговые маркеры) и потоков энергии через его верхнюю E_V^- (штриховая линия), нижнюю E_V^+ (пунктирная линия) и боковую E_R (штрих-пунктир) поверхности по отдельности (все величины отнесены к энергии E_∞ такого же источника, но в безграничной среде); (б) частотная зависимость E_∞/\hat{E}_0 , где \hat{E}_0 – не зависящая от частоты энергия эквивалентного точечного источника; (в) и (г) укрупненные фрагменты, показывающие распределение энергии в низкочастотном диапазоне и долю энергии проходящих и бегущих волн E_V^+ и E_R .

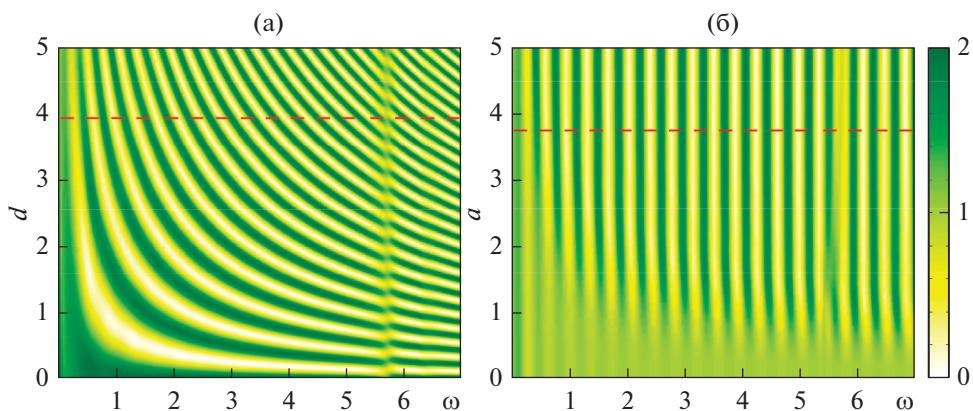


Рис. 7. (а) Относительная мощность преобразователя E_0/E_∞ в зависимости от частоты ω и расстояния d при $a = 3.75$ и (б) частоты ω и радиуса a при $d = 4$; график E_0/E_∞ на рис. 6а – сечение данных поверхностей вдоль показанных пунктиром горизонтальных прямых.

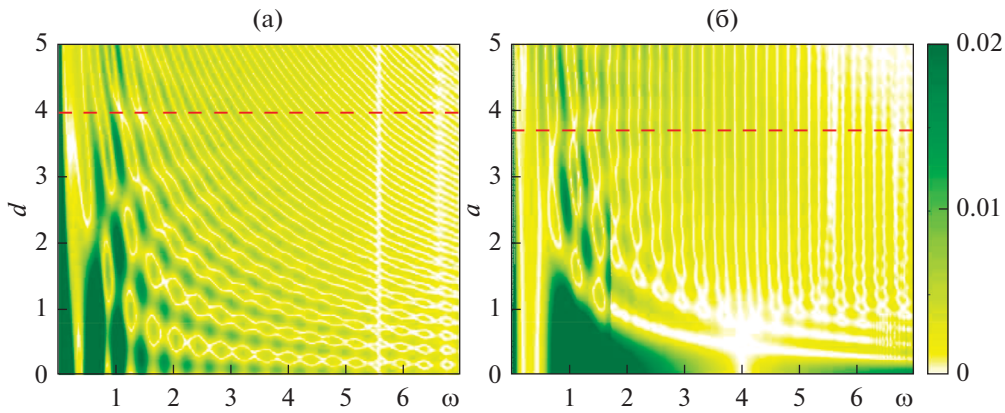


Рис. 8. (а) Относительная энергия бегущих волн E_R/E_∞ в зависимости от частоты ω и расстояния d при $a = 3.75$ и (б) частоты ω и радиуса a при $d = 4$; график E_R/E_∞ на рис. 6г – сечение данных поверхностей вдоль показанных пунктиром горизонтальных прямых.

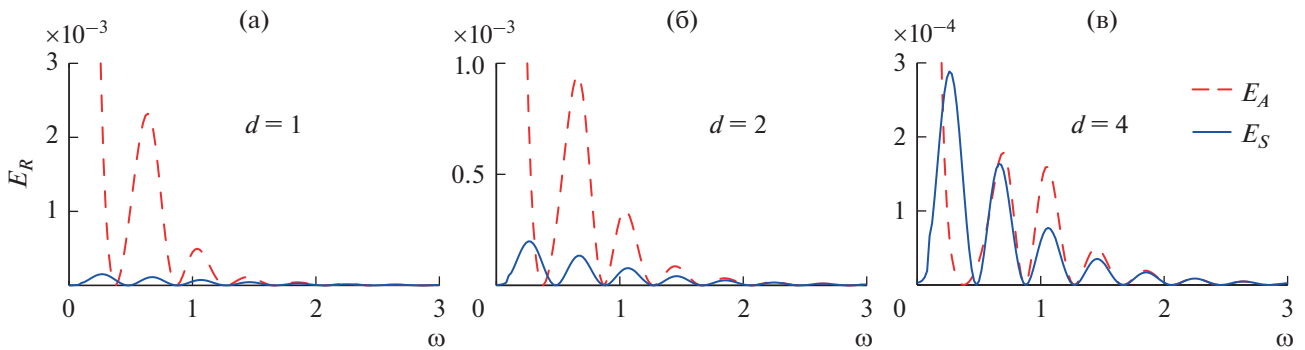


Рис. 9. Энергия E_A и E_S , уносимая на бесконечность волнами Шолте-Стоунли, при различном расстоянии d преобразователя от пластины: $d = 1, 2, 4$; $a = 3.75$.

чие от случая контактного пьезоактуатора, для которого характерны такие же идущие вдоль гипербол полосы максимумов, как и на рис. 7а [7].

На укрупненном графике для энергии бегущих волн $E_R(\omega)/E_\infty$ (рис. 6г) видно такое же чередование максимумов и минимумов, как и у E_0 , т.е. для бегущих волн, возбуждаемых в пластине акустическим пучком, также существуют периодически повторяющиеся лучшие частоты, однако их значения не совпадают с максимумами энергии, отдаваемой источником. Это означает, что работа источника на максимуме мощности совсем не обязательно приводит к возбуждению бегущих волн максимальной амплитуды. Рис. 8 иллюстрирует зависимость E_R/E_∞ от частоты и от параметров d и a .

Что касается распределения энергии бегущих волн между двумя модами Шолте-Стоунли, то графики E_A и E_S , приведенные на рис. 9, показывают, что при расположении источника возле

пластины большую часть энергии переносит антисимметричная волна A (рис. 8а для $d = 1$), а с увеличением расстояния ее вклад уменьшается и энергия волн A и S становится сопоставимой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе интегральных и асимптотических представлений для функции Грина рассматриваемой задачи разработаны, реализованы и верифицированы математические и компьютерные модели, предназначенные для численного анализа волновых полей и энергетических потоков в системе бесконтактный ультразвуковой преобразователь – акустическая среда – погруженный упругий волновод. В рамках разработанной модели анализируется распределение волновой энергии бесконтактного ультразвукового преобразователя между отраженными, прошедшими и бегущими волнами, возбуждаемыми в погруженной однородной упругой пластине в зависимости от размера ис-

точника, расстояния до зондируемой пластины и частоты. Численные примеры показывают, что лучшие частоты возбуждения бегущих волн не обязательно совпадают с частотами локальных максимумов мощности источника, чередование которых с минимумами мощности определяется хорошо известными в акустике закономерностями сложения прямого и отраженного полей в фазе или противофазе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 17-11-01191).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Giurgiutiu V* Structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensors. 2nd Edition. Oxford. UK: Elsevier Academic Press, 2014. 1024 p.
2. *Lammering R., Gabbert U., Sinapius M., Schuster Th., Wierach P.* Lamb-wave based Structural Health Monitoring in polymer composites. Springer, 2018. 479 p.
3. *Masmoudi M., Castaings M.* Three-dimensional hybrid model for predicting air-coupled generation of guided waves in composite material plates // *Ultrasonics*. 2012. V. 52(1). P. 81–92.
4. *Giurgiutiu V.* Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring // *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 2005. V. 16. P. 291–305.
5. *Raghavan A., Cesnik C.E.S.* Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring // *Smart Mater. Struct.* 2005. V. 14. P. 1448–1461.
6. *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Eremin A.A., Lammering R., Neumann M.* Lamb wave excitation and propagation in elastic plates with surface obstacles: proper choice of central frequencies // *Smart Mater. Struct.* 2011. V. 20(1). 015020.
7. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А.* Распределение энергии пьезоактуатора между бегущими волнами, возбуждаемыми в упругом слое // *Прикладная механика и техническая физика*. 2015. Т. 56. № 6. С. 84–93.
8. *Grandia W., Fortunko C.* NDE applications of air-coupled ultrasonic transducers // *IEEE Ultrasonic Symposium, Proceedings*. 1995. V. 1. P. 697–709.
9. *Green R.E.* Non-contact ultrasonic techniques // *Ultrasonics*. 2004. V. 42. P. 9–16.
10. *Fan Z., Jiang W., Cai M., Wright W.M.D.* The effects of air gap reflections during air-coupled leaky Lamb wave inspection of thin plates // *Ultrasonics*. 2016. V. 65. P. 282–295.
11. *Huber A.* Non-destructive testing of future rocket boosters using air-coupled ultrasound // *Proceeding of the 19th World Conference on Non-Destructive Testing (WCNDT 2016)*. Germany, Munich, June 13th–June 17th, 2016. 9 p.
12. *Adebahr W., Bernhardt Y., Kreuzbruck M.* 3d-robotized air-coupled ultrasound measurements of large components // *Proceeding of the 19th World Conference on Non-Destructive Testing (WCNDT 2016)*. Germany, Munich, June 13th–June 17th, 2016. 8 p.
13. *Junger M.C., Feit D.* Sound structures and their interaction. 2nd Edition. Boston, MA: MIT Press, 1986. 462 p.
14. *Ross D.* Mechanics of Underwater Noise. N.Y.: Pergamon Press. 1976. 375 p.
15. *Lyon R.H.* Theory and application of statistical energy analysis. 2-nd edition. Elsevier. 1994. 400 p.
16. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
17. *Авербух А.А., Вейцман Р.И., Генкин М.Д.* Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука. 1987. 157 с.
18. *Гринченко В.Т., Вовк И.В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. Киев: Наукова Думка, 1986. 240 с.
19. *Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H.* Computational Ocean Acoustics. 2-nd edition. Springer. 2011. 794 p.
20. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342 с.
21. *Глушков Е.В.* Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве // *Прикл. математика и механика*. 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 94–100.
22. *Glushkov E., Glushkova N., Fomenko S.* Wave energy transfer in elastic half-spaces with soft interlayers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. V. 137(4). P. 1802–1812.
23. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1978. 319 с.
24. *Crighton D.G.* The 1988 Rayleigh medal lecture: fluid loading – the interaction between sound and vibration // *J. Sound Vibr.* 1989. V. 133(1). P. 1–27.
25. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Жанг Ч.* Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.
26. *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Miakisheva O.A.* Backward waves and energy fluxes excited in acoustic medium with an immersed plate // *Ultrasonics*. 2019. V. 92. P. 158–168.
27. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
28. *Свешников А.Г.* Принцип предельного поглощения для волновода // *Докл. АН СССР*. 1951. Т. 80. № 3. С. 345–347.
29. *Бреховских Л.М.* Отражение и преломление сферических волн // *Усп. физ. наук*. 1949. Т. 38. Вып. 5. С. 1–42.
30. *Титов С.А., Маев Р.Г., Богаченков А.Н.* Линзовый многоэлементный акустический микроскоп в режиме измерения параметров слоистых объектов // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 5. С. 546–552.
31. *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Eremin A.A., Miakisheva O.A.* Ultrasonic inspection of anisotropic laminate plates immersed in acoustic medium // *Materials Physics and Mechanics*. 2019 (to appear).
32. *Osborne M.F.M., Hart S.D.* Transmission, Reflection, and Guiding of an Exponential Pulse by a Steel Plate in

- Water. I. Theory // *J. Acoust. Soc. Am.* 1945. V. 17(1). P. 1–18.
33. *Sessarego J.-P., Sagéoli J., Gazanhes C., Überall H.* Two Scholte-Stoneley waves on doubly fluid-loaded plates and shells // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. V. 101(1). P. 135–142.
34. *Shen C., Xin F.X., Lu T.J.* A 3-D elasticity theory based model for acoustic radiation from multilayered anisotropic plates // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. V. 135(5). P. EL232–8.
35. *Aanes M., Lohne K., Lunde P., Vestrheim M.* Beam diffraction effects in sound transmission of a fluid-embedded viscoelastic plate at normal incidence // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 140. EL67.
36. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // *Proc. Roy. Soc. London.* 1917. V. A 93. P. 114–128.
37. *Меркулов Л.Г.* Затухание нормальных волн в пластинах, находящихся в жидкости // *Акуст. журн.* 1964. Т. 10. № 2. С. 206–212.
38. *Rokhlin S.I., Chimenti D.E., Nayfeh A.H.* On the topology of the complex wave spectrum in a fluid-coupled elastic layer // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 85(3). P. 1074–1080.
39. *Inoue D., Hayashi T.* Transient analysis of leaky Lamb waves with a semi-analytical finite element method // *Ultrasonics.* 2015. V. 62. P. 80–88.
40. *Умов Н.А.* Избранные сочинения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 492 с.
41. *Veksler N.D.* Resonance acoustic spectroscopy. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 282 p.