

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.2.532

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ СКАЧКОВ ИМПЕДАНСА И РАЗРАБОТКА НА ЕЕ ОСНОВЕ МЕТОДА ИЗВЛЕЧЕНИЯ ИМПЕДАНСА

© 2020 г. Н. Н. Остриков^a, *, М. А. Яковец^a, М. С. Ипатов^a

^aЦентральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
Московский Комплекс (НИМК ЦАГИ), ул. Радио 17, Москва, 105005 Россия

*e-mail: aeroacoustics@tsagi.ru

Поступила в редакцию 05.07.2019 г.

После доработки 29.08.2019 г.

Принята к публикации 05.09.2019 г.

Проведено систематическое исследование проблем точности извлечения импеданса звукопоглощающих конструкций на установках типа “Интерферометр с потоком” в случае отсутствия скользящего потока. Предложен метод определения доверительного интервала измерений звуковых давлений на этой установке. Экспериментально подтверждена аналитическая модель распространения звука в прямоугольном канале при наличии скачков импеданса, предложенная ранее авторами и описанная с помощью метода Винера–Хопфа. Разработан и реализован метод извлечения импеданса звукопоглощающих конструкций при отсутствии потока, основанный на аналитическом методе учета прохождения звуковых мод через стык импеданса.

Ключевые слова: прямоугольный канал, звукопоглощающие конструкции, скачок импеданса, интерферометр с потоком

DOI: 10.31857/S0320791920010062

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее эффективным способом снижения шума вентилятора авиадвигателя является облицовка его каналов звукопоглощающими конструкциями (ЗПК), параметры которых подбираются таким образом, чтобы обеспечить максимальное снижение шума на местности на различных режимах работы двигателя в течение взлетно-посадочного цикла полета самолета. Успех настройки параметров ЗПК зависит от качества их исследований в стендовых условиях, в частности, на установках типа “Интерферометр с потоком”, предназначенных для определения импеданса ЗПК в зависимости от их геометрических параметров, скорости потока и уровня звукового поля. Исследования по созданию установок этого типа были начаты в конце прошлого века. В настоящее время такие установки существуют в основных крупных научных центрах США и Европы, занимающихся вопросами снижения авиационного шума [1–16]. В России созданы две такие установки – одна в Пермском национальном исследовательском политехническом университете, другая в ЦАГИ (эта установка была введена в строй в 2012 году) [17].

Структура и принцип работы всех таких установок одинаков: рабочая часть установки представляет собой длинный узкий канал прямоугольного сечения, плоский испытательный образец помещается заподлицо боковой поверхности канала, а извлечение импеданса основано на характеристиках звукового поля в канале, полученных с помощью микрофонов, установленных на стенках канала. При этом звук в канале создается с помощью динамиков, расположенных на конце(ах) канала, а создание потока в канале может основываться на различных принципах. В частности, на установке ЦАГИ с помощью вентиляторов создается поток, всасывающийся в канал. Поперечные размеры канала обычно выбираются из условия обеспечения одномодового распространения звука в интересующей области частот.

Задача определения импеданса из результатов измерения акустического давления на микрофонах относится к классу обратных задач, и для ее решения необходимо использовать ту или иную математическую модель распространения звука в канале при наличии импедансных граничных условий и потока. В целом, решения прямых задач о распространении звука в каналах с прямоугольным сечением хорошо изучены при нали-

ции на стенка различных объемных резонаторов [18–20]. Поскольку в канале установки реализуется одномодовое распространение звука, а образец устанавливается только на одной боковой поверхности канала, то обычно используют двумерные модели распространения звука в канале. При этом на начальной стадии исследований в основном использовалась модель распространения звука в однородном потоке, основанная на решении конвективного волнового уравнения с граничным условием Ингарда–Майерса на образце [1], а по мере накопления опыта стала применяться двумерная модель распространения звука в неоднородном плоскопараллельном потоке, основанная на решении уравнения Придмора–Брауна [2, 14, 21].

Существуют различные подходы к решению обратной задачи по определению импеданса, которые могут быть классифицированы по местоположению используемых микрофонов и их числу.

К первому типу можно отнести подходы, в которых используются данные, полученные только на микрофонах, равномерно расположенных напротив испытываемого образца. Методы извлечения импеданса в этих подходах основываются на методе Прони [22, 23]. Наиболее простым методом этого класса является метод 3-х микрофонов [12]. Этот метод прост в использовании, но не обеспечивает единственного решения относительно искомого импеданса и требует выбора наиболее подходящего результата.

Ко второму типу можно отнести подходы, основанные на методе двух портов [24–27]. В этом методе для извлечения импеданса используют минимум четыре микрофона, установленных по два с различных сторон от образца. Реализация этого метода требует согласования звуковых мод для описания эффектов отражения и преобразования волноводных мод в канале при наличии разрывов импеданса, имеющих место на стыке образца и жесткой стенки. Недостатком применяемых ранее реализаций этого метода было использование приближенных методов согласования мод на стыках образца.

И наконец, третий подход основан на использовании микрофонов, расположенных как напротив образца, так и в жесткостенной части канала с обеих сторон от образца. До настоящего времени реализация данного подхода требовала использования численных методов для описания звукового поля в канале даже в случае решения конвективного волнового уравнения, что обусловлено необходимостью корректного описания прохождения волн через разрыв импеданса на стыке образца. Этот подход предполагает использование большого числа микрофонов, а поиск искомого импеданса осуществляется с помощью минимизации целевой функции, которая выражает отклонение расчетного и измеренного аку-

стического давления в точках расположения микрофонов. Основная трудность реализации этого метода на практике состоит в том, что целевая функция может обладать сразу несколькими локальными минимумами, и поэтому итерационная процедура поиска минимума целевой функции хорошо сходится только тогда, когда стартовое значение импеданса находится достаточно близко к искомому значению. В противном случае существует вероятность сходимости к нефизическому минимуму. Для того чтобы избежать этого в случаях, когда отсутствует априорная оценка значения искомого импеданса, приходится вручную задавать различные стартовые значения, чтобы определить абсолютный минимум целевой функции, что не делает общую процедуру извлечения импеданса робастной.

Накопление опыта эксплуатации установок типа “Интерферометр с потоком” привело в последние годы к актуализации проблемы точности извлечения импеданса ЗПК на этих установках [28–46], что в значительной степени обусловлено результатами работ по сравнению импеданса, измеренного на различных установках для одних и тех же образцов ЗПК с помощью различных методов [17, 28–31]. В этих работах показано, что на большинстве частот результаты извлечения импеданса одинаковых образцов ЗПК оказываются близкими, хотя при этом имеется достаточно большой разброс значений при применениях различных методов. В том числе, в этих экспериментах были обнаружены режимы работы ЗПК, при которых возникают существенные расхождения извлеченного импеданса даже при использовании одинаковых методов как при наличии, так и отсутствии потока в канале. В этих случаях в каналах различных установок реализуется различная структура звукового поля, обусловленная различными отражениями от концов канала, что определяется конструктивными особенностями каждой установки, различными профилями скорости потока в канале, различным действием нелинейного режима работы ЗПК, при котором импеданс зависит от уровня звукового давления, а применяемые методы извлечения не способны учесть данные различия. В частности, к настоящему времени для этих установок не разработаны методы извлечения импеданса с учетом нелинейного режима их работы.

Целью настоящей работы является экспериментальная проверка аналитической модели распространения звука в прямоугольном канале при наличии скачков импеданса, развитой в работе [47] с помощью метода Винера–Хопфа, и разработка на ее основе метода извлечения импеданса, реализация которого на установке “Интерферометр с потоком” не требует использования большого числа микрофонов. В настоящей работе рассматривается случай отсутствия в канале потока.

Развитая аналитическая модель позволила верифицировать численный метод конечных элементов, применяемый для извлечения импеданса ЗПК на рассматриваемых установках, показать, что приближенные способы сшивки звуковых мод, применяемые в методе двух портов, приводят к существенным отклонениям в структуре восстановленного звукового поля в канале, и обнаружить случаи, при которых происходит потеря чувствительности большинства методов извлечения импеданса [48].

В настоящей работе верификация указанной аналитической модели и разработка метода извлечения импеданса выполняется на основе экспериментальных данных, полученных на однослойном сотовом образце ЗПК со следующими параметрами: диаметр отверстий – 1.4 мм, степень перфорации – 12%, толщина перфорированного листа – 1 мм, высота сот – 48 мм.

В первой части работы приводится описание установки ЦАГИ “Интерферометр с потоком” и проводится анализ факторов, влияющих на точность извлечения импеданса. Далее проводится анализ 3-х микрофонного метода извлечения импеданса ЗПК, показывается, что данный метод очень чувствителен к значениям звукового давления внутри доверительного интервала, достигнутого при измерениях, и предлагается его модификация с помощью метода наименьших квадратов. Затем предлагается метод определения импеданса из результатов измерений коэффициентов прохождения и отражения звуковых мод от разрывов импеданса на стыках образца. Применение этого метода к звуковым полям, восстановленным напротив образца с помощью метода наименьших квадратов, а с различных сторон от образца в жесткостенной части канала – с помощью стандартного 2-х микрофонного метода, позволяет показать, что предсказания аналитической модели и данные, получаемые из экспериментов, о значениях коэффициентов прохождения и отражения имеют очень близкие значения. Этот результат позволяет развить новый метод извлечения импеданса на основе аналитического метода учета прохождения звуковых мод через стык импеданса, который позволяет восстанавливать самосогласованное звуковое поле в рабочей части установки и использует относительно небольшое число микрофонов, установленных как напротив образца, так и за его пределами.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА “ИНТЕРФЕРОМЕТР С ПОТОКОМ” И АНАЛИЗ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ

Установка “Интерферометр с потоком” была создана в ЦАГИ в 2012 году и предназначена для измерения импеданса образцов локально-реаги-

рующего типа при наличии скользящего вдоль лицевой поверхности образцов потока с учетом высоких уровней звукового давления источника звука. Фотография и схема установки представлены на рис. 1а, 1б.

Рабочая часть установки представляет собой достаточно длинную трубу с внутренними поперечными размерами 40 × 40 мм. При таких размерах трубы рабочий диапазон частот установки составляет $0.5 < f < 4$ кГц, причем нижняя граница частотного диапазона обуславливается минимальной рабочей частотой динамиков, а верхняя граница надежно обеспечивает условие однодогового распространения звука в жесткостенной части канала. Для генерации звука в трубе используются две секции с динамиками Eighteen Sound ND1460 мощностью 150 Вт и частотным диапазоном 0.5–20 кГц. Сигнал на динамики подается с генератора через усилитель мощности Yamaha P2500S. На выходе трубы установлена сдвоенная расширительная камера, в которой помещены два радиальных вентилятора для создания воздушного потока в трубе и выхлопные глушители для создания заглушенного окончания трубы и уменьшения звуковой мощности, излучаемой в окружающее помещение. Диапазон скоростей потока в рабочей секции установки 0–100 м/с. На одной из стенок рабочей секции устанавливается образец ЗПК, лицевая перфорированная панель которой имеет размеры 40 × 400 мм, а максимальная толщина образца может достигать 100 мм. На противоположной к образцу стенке заподлицо устанавливаются одиннадцать 1/4 дюймовых микрофонов давления G.R.A.S. Type 40BE с предусилителем 26CB, семь из которых располагаются непосредственно напротив образца, и по два микрофона устанавливаются во входной и выходной секциях с жесткими стенками. Микрофоны нумеруются в направлении потока, и соседние микрофоны с номерами от 4 по 7 равноудалены относительно друг друга. Установка оснащена измерительным оборудованием для определения акустических характеристик и анализа данных, в состав которого входит два основных компонента: модули NI PXIe-4499 и PXIe-4461.

При проведении измерений включаются динамики, установленные только в одной из секций (правой или левой), в результате чего в секциях 6, 7 и 8 установки (рис. 1б) на каждой рабочей частоте устанавливается звуковое поле в виде суперпозиции волн, распространяющихся в обе стороны канала, причем в подавляющей части секций 6 и 7, имеющих твердые стенки, распространяются только поршневые моды, а звуковые моды более высокого порядка, образующиеся на неоднородностях канала, достаточно быстро затухают. Волны, распространяющиеся в направлении работающих динамиков, возникают в результате отражений на неоднородностях канала. Эф-

(a)

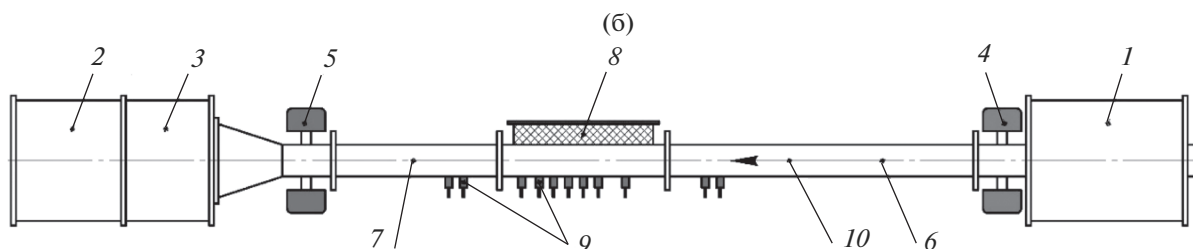
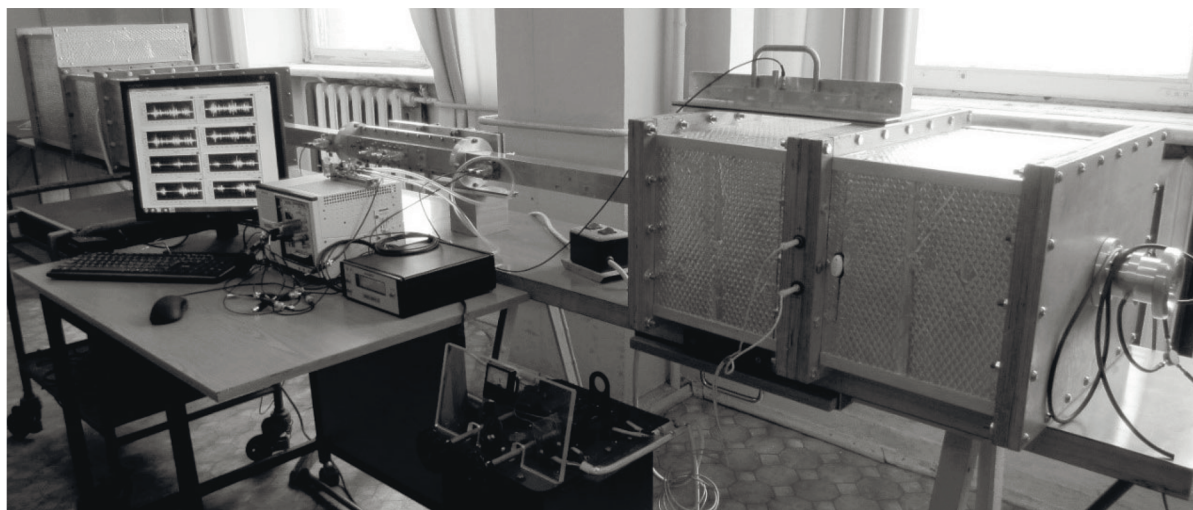


Рис. 1. (a) – Фотография экспериментальной установки “Интерферометр с потоком” в лабораторных условиях. (б) – Схема установки: 1 – входная заглушенная камера, 2 – выходная заглушенная камера с пластинчатыми звукопоглощающими конструкциями, 3 – камера с силовой установкой, 4 – правая секция с динамиками, 5 – левая секция с динамиками, 6, 7 – входная и выходная секции с жесткими стенками, 8 – рабочая секция с тестовым образцом, 9 – микрофоны, 10 – направление потока воздуха в канале установки.

фект отражения на стыках образца может быть использован для определения импеданса образца. В тоже время отражения на таких неоднородностях канала, как крепеж секции неработающих динамиков, и от входной или выходной камеры (№ 1 и 2 на рис. 1б), расположенных после выходных сечений трубы, снижают точность извлечения импеданса. Для уменьшения амплитуды отраженных волн от крепежа секции неработающих динамиков используются твердотельные заглушки, а для снижения амплитуды отраженной волны от выходных сечений трубы во входной и выходной камерах установлены звукопоглощающие материалы.

В каждом измерении задействуются все микрофоны, и длина временной реализации обычно составляет 60 с. При обработке сигналов на основе не менее 50 осреднений определяются автокорреляционные и взаимные спектры звукового давления, причем в качестве опорного сигнала выступает микрофон с номером 1. По результатам обработки сигналов получаются значения уровней звукового давления на каждом из одиннадцати микрофонов и сдвиги фаз по отношению к опорному

микрофону. Пример таких данных, полученных на тестовом образце (рис. 2) при работе динамиков 4 для двух частот 500 и 1500 Гц при отсутствии потока, представлен в табл. 1. При этом с генератора подавался сигнал в виде суперпозиции тональных сигналов на двенадцати частотах с суммарным уровнем звукового давления 130 дБ на первом микрофоне в канале. Данные, представленные в табл. 1, позволяют приписать каждому микрофону на каждой частоте комплексное значение звукового давления $P_j = A_j \exp(i\varphi_j)$, где A_j – амплитуда звукового давления, φ_j – сдвиг фазы по отношению к опорному микрофону, причем опорному микрофону приписывается фаза, равная нулю.

Источником случайной погрешности определения амплитуд A_j и фаз φ_j на микрофонах при отсутствии потока в канале установки является фоновый шум в помещении установки. Анализ процедуры осреднения показывает, что максимальное отклонение амплитуд на микрофонах от среднего значения обычно не превышает 0.01 Па и 0.01 градуса.

Источниками систематической погрешности при определении комплексных значений звукового давления на микрофонах выступают вибрации стенок трубы установки, которые переизлучают звук в канал коррелированно со звуковым полем, генерируемым в канале динамиками. Данные вибрации возникают вследствие ряда причин: (1) непосредственно из-за работы динамиков, (2) повышенных вибраций стенок камер 1 и 2 или кассеты 8 установки на резонансных частотах соответствующих объемов, (3) акустического поля на внешних стенках трубы, возникающего из-за излучения звука из открытого конца канала (при работе динамиков с суммарным уровнем звукового давления 140 дБ внутри канала на внешней поверхности секции 8 уровень звукового давления составляет около 70 дБ).

С целью оценки систематической погрешности измерений на микрофонах были проведены опыты, в которых воспроизводился режим, представленный в табл. 1, но при этом для изменения вибрационных свойств стенок канала использовалась различная конфигурация стяжек и грузов, а также установка с внешней стороны закрывалась звукопоглощающим матом. В табл. 2 приведены максимальные значения различий амплитуд и фаз, которые были достигнуты на одних и тех же микрофонах при реализации различных конфигураций. Сравнение данных, представленных в табл. 1 и 2, для частоты звука, далекой от частоты настройки ЗПК (в данном случае это 500 Гц), показывает, что систематическая погрешность измерения звукового давления может достигать величины 0.3–0.4 Па при амплитуде звукового поля в канале 20 Па. Сравнение данных табл. 1 и 2 на частоте, близкой к частоте настройки ЗПК (в данном случае это 1500 Гц), показывает, что амплитуда звукового поля, создаваемая в канале динамиками, настолько быстро затухает в секции, в которой располагается ЗПК, что становится сравнимой с амплитудой звука, создаваемого вибрациями сте-

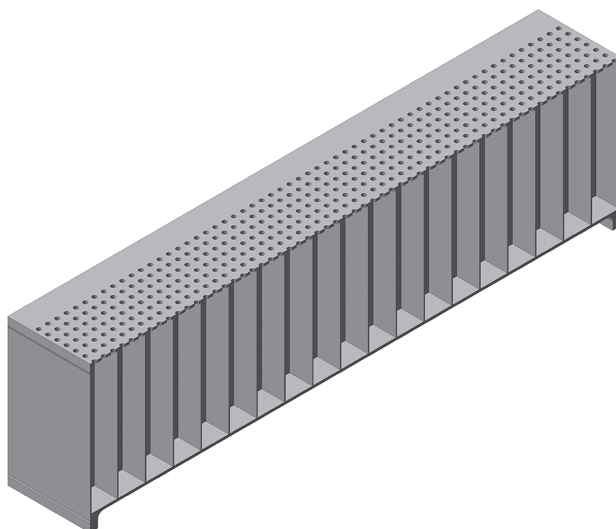


Рис. 2. Схема тестового образца ЗПК, результаты испытания которого используются в настоящей работе.

нок, и поэтому в звуковое давление, измеренное на микрофонах с номерами 8–11, может давать значительный вклад звук, порождаемый вибрациями стенок канала. Это означает, что учет результатов измерений на этих микрофонах может приводить к значительной погрешности определения импеданса ЗПК.

Важным с точки зрения точности измерений является контроль температуры, при которой проводятся эксперименты. Заметим, что опыты показывают, что изменение температуры на 2–3°C приводит к такому же порядку значений отклонений амплитуд и фаз, измеренных на микрофонах, которые представлены в табл. 2.

При наличии потока фоновый шум существенно возрастает из-за гидродинамических пульсаций давления в турбулентном пограничном слое, которые фиксируют микрофоны, уста-

Таблица 1. Пример данных, полученных на микрофонах установки на двух частотах

Частота, Гц	Амплитуда, дБ										
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10	№ 11
500	115.67	115.55	113.66	118.32	120.3	121.2	121.26	118.12	112.7	123.81	123.11
1500	121.98	124.25	99.53	81.23	75.82	69.69	63.03	48.41	53.61	61.13	58.29
Частота, Гц	Фаза, град										
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10	№ 11
500	0	28.05	146.75	–93.97	–85.8	–79.59	–74.67	–60.121	63.18	110.56	113.41
1500	0	5.27	–153.4	–142.75	–139.04	–134.5	–127.49	–124.45	172.12	90.99	99.78

Таблица 2. Максимальные значения различных амплитуд и фаз, которые были достигнуты на одних и тех же микрофонах при реализации различных конфигураций, изменяющих вибрационные характеристики стенок трубы установки.

Частота, Гц	Амплитуда, дБ										
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10	№ 11
500	0.04	0.06	0.14	0.01	0.03	0.04	0.06	0.09	0.01	0.06	0.06
1500	0.01	0.02	0.07	0.03	0.1	0.09	0.27	4.32	1.54	4.33	5.73
Частота, Гц	Фаза, град										
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10	№ 11
500	0	0.72	0.62	1.18	1.34	1.37	1.37	1.32	1.15	1.45	1.39
1500	0	0.04	0.16	0.31	0.56	0.36	3.08	29.72	9.98	43.33	60.9

новленные заподлицо стенок канала, а также из-за шума вентилятора, создающего поток.

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В КАНАЛЕ УСТАНОВКИ

Поскольку рабочие частоты предполагают однодоловое распространение звука в жесткостенной части канала, и разрыв импеданса реализуется только на одной стенке канала, то описание структуры звукового поля в канале при отсутствии потока может быть выполнено с помощью модели плоского канала. Рассмотрим плоский канал высотой H , на верхней стенке которого заподлицо располагается образец ЗПК длиной L . На противоположной жесткой стенке напротив средней части образца компактно располагаются четыре микрофона также заподлицо с жесткой стенкой (рис. 3).

Звуковое давление $p(x, y) \exp(-i\omega t)$ в гармонической волне, распространяющейся в этом канале при отсутствии потока, удовлетворяет уравнению Гельмгольца [49]

$$\Delta p(x, y) + k^2 p(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $k = \frac{\omega}{c}$ – осевое волновое число, c – скорость звука. При этом на верхней стенке канала реализуется граничное условие вида

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=H} = ik\beta p|_{y=H}, \tag{2}$$

где $\beta = 1/Z$ – удельный безразмерный адмитанс поверхности стенки (величина, обратная импедансу Z). Для жестких стенок канала $\beta = 0$, а на поверхности образца ЗПК адмитанс имеет ненулевое комплексное значение, зависящее от частоты. Нижние стенки канала являются абсолютно жесткими, и поэтому задается граничное условие вида

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \tag{3}$$

Кроме этого, для единственности решения уравнения (1) с граничными условиями (2) и (3) необходимо поставить условие конечности энергии в окрестности разрывов импеданса верхней стенки [47].

В каждой из секций 1, 2 или 3 (рис. 3) решение уравнения (1) с граничными условиями (2) и (3)

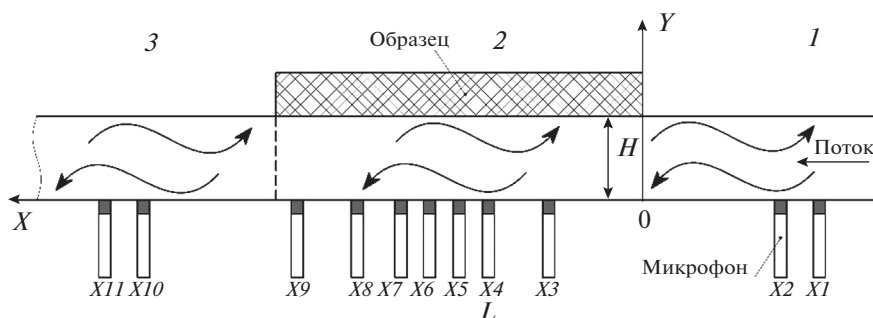


Рис. 3. Схема структуры звукового поля в канале установки.

имеет вид суперпозиции мод, распространяющихся в обе стороны канала

$$p(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} A^{(j)} \cos(\chi^{(j)} y) e^{ik_x^{(j)} x} + B^{(j)} \cos(\chi^{(j)} y) e^{-ik_x^{(j)} x}, \quad (4)$$

где $A^{(j)}$ и $B^{(j)}$ – комплексные амплитуды мод, $k_x^{(j)}$ и $\chi^{(j)}$ – продольное (осевое) и поперечное волновые числа j -й моды соответственно, значения которых определяются из характеристического и дисперсионного уравнений по известному значению адмитанса [49]

$$\chi^{(j)} \operatorname{tg}(\chi^{(j)} H) = -ik\beta, \quad (5)$$

$$(\chi^{(j)})^2 + (k_x^{(j)})^2 = k^2. \quad (6)$$

Трансцендентное уравнение (5) имеет бесконечное количество комплексных корней (данное уравнение необходимо решать численно), что определяет бесконечное число мод, которые могут присутствовать в структуре звукового поля. Из решения уравнений (5) и (6) относительно $k_x^{(j)}$ для секций 1 и 3 (рис. 3), имеющих жесткие стенки, следует, что, если частота звука меньше величины $f < c/(2H)$, то распространяется без затухания только одна мода (это поршневая мода), продольное волновое число которой совпадает с основным волновым числом k , а остальные моды затухают, имея мнимые волновые числа. Данные затухающие моды рождаются на стыках секций 1 и 3 с секцией 2, и поэтому, если микрофоны в секциях 1 и 3 достаточно удалены от стыков, то вкладом затухающих мод в окрестности микрофонов можно пренебречь.

Более сложная структура звукового поля наблюдается внутри секции 2, в которой адмитанс одной из стенок отличен от нуля. Решение уравнений (5) и (6) показывает, что в этой секции мнимые части продольных волновых чисел $k_x^{(j)}$ всех мод имеют положительные значения, тем самым, все моды затухают в той или иной степени в направлении распространения. Классификация волновых чисел мод при изменении адмитанса в прямоугольных каналах хорошо известна из многочисленных работ, например, [50, 51]. В частности, хорошо известно, что для некоторых значений адмитанса уравнение (5) имеет двойной корень, что обуславливает эффект слияния мод [17, 49, 52]. Поперечное волновое число каждой такой моды является одним из корней трансцендентного уравнения

$$\sin(2\chi_\mu H) = -2\chi_\mu H, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

а соответствующее значение адмитанса для соответствующего корня χ_μ выражается из уравнения (5):

$$\beta_\mu = i\chi_\mu \operatorname{tg}(\chi_\mu H)/k. \quad (8)$$

При этом уравнение (7) имеет бесконечное число корней, и β_0 в (8) соответствует слиянию 0-й и 1-й моды, β_1 – 1-й и 2-й моды, и т.д.

Дадим теперь краткое описание особенностей зависимости продольных волновых чисел $k_x^{(j)}$ от значений адмитанса ЗПК. С этой целью будем рассматривать вариацию комплексных значений адмитанса вдоль различных лучей, исходящих из нулевого значения:

$$\beta = t\tilde{\beta}, \quad (9)$$

где $\tilde{\beta}$ – некое комплексное значение адмитанса, лежащее в первой четверти комплексной плоскости значений адмитанса, соответствующей условиям $\operatorname{Re}[\tilde{\beta}] \geq 0$ и $\operatorname{Im}[\tilde{\beta}] \geq 0$, которое определяет направление луча при возрастании положительного действительного параметра t от нулевого значения. Тогда, если адмитанс β варьируется вдоль некоторого луча вида (9), то волновые числа $k_x^{(j)}$, вычисляемые для каждого значения адмитанса (9) из выражений (5) и (6), варьируются вдоль некоторой линии на комплексной плоскости волновых чисел, т.е. $k_x^{(j)} = k_x^{(j)}(t)$.

Если $t = 0$ и, тем самым, $\beta = 0$, то реализуются граничные условия жесткой стенки, и поэтому в рабочем диапазоне частот волновое число $k_x^{(0)}$, соответствующее поршневой моде, лежит на действительной оси в комплексной плоскости значений волновых чисел, а остальные волновые числа $k_x^{(j)}$ при $j \geq 1$ лежат на мнимой оси. Эта ситуация означает, что при наличии в прямоугольном канале установки только жестких стенок распространяется только поршневая мода, а остальные моды затухают.

Поведение комплексных волновых чисел $k_x^{(j)}(t)$ при возрастании параметра t от нулевого значения существенно зависит от местоположения зоны на комплексной плоскости значений адмитанса, внутри которой проходит соответствующий луч вида (9). Для описания этих особенностей разделим указанную четверть комплексной плоскости значений адмитанса на бесконечное число секторов с помощью лучей вида (9), для каждого из которых значение адмитанса $\tilde{\beta}$ совпадает с некоторым значением (8), при котором имеет место слияние соответствующих мод. Это разделение представлено на рис. 4 пунктирными линиями, для построения которых в выражении (9) выбиралось одно из условий $\tilde{\beta} = \beta_\mu$

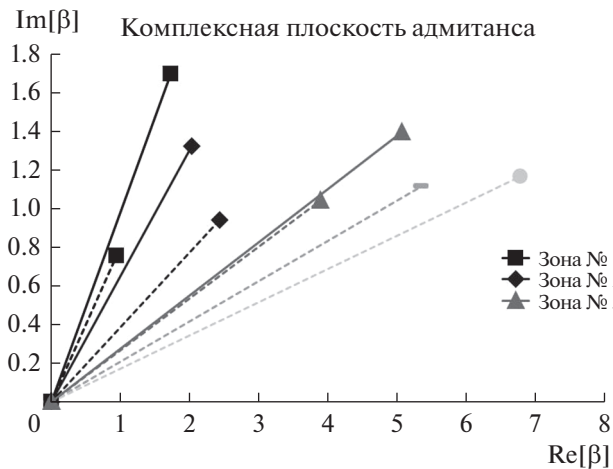


Рис. 4. Комплексная плоскость значений адмитанса, разделенная на бесконечное число секторов лучами, исходящими из начала координат, а затем пересекающимися адмитансы, соответствующие значениям (8).

($\mu = 0, 1, 2, \dots$), причем каждый такой луч прерывается на рис. 4 точно на соответствующем значении β_μ , т.е. при $t = 1$. Для всех лучей вида (9), расположенных внутри одного сектора, качественное поведение линий $k_x^{(j)}(t)$ на комплексной плоскости волновых чисел оказывается идентичным, но при рассмотрении лучей вида (9) в различных секторах качественное поведение линий $k_x^{(j)}(t)$, отвечающих некоторым номерам мод j , оказывается различным.

На рис. 5 представлены линии $\tilde{k}_x^{(j)}(t)$ на комплексной плоскости безразмерных волновых чисел $\tilde{k}_x^{(j)} = k_x^{(j)} H$ для первых четырех мод ($j = 0, 1, 2, 3$), которые соответствуют вариациям значений адмитанса вдоль лучей, представленных на рис. 4 для частоты $f = 3$ кГц. При этом пунктирные линии на рис. 5а и 5б соответствуют линиям $\tilde{k}_x^{(j)}(t)$, когда адмитанс варьируется вдоль луча, пересекающего адмитанс β_0 , при котором сливаются 0-я и 1-я моды, а пунктирные линии на рис. 5в соответствуют линиям $\tilde{k}_x^{(j)}(t)$, когда адмитанс варьируется вдоль луча, пересекающего адмитанс β_1 , при котором сливаются 1-я и 2-я моды. Жирные линии на рис. 5а соответствуют линиям $\tilde{k}_x^{(j)}(t)$, когда адмитанс варьируется вдоль луча, обозначенного на рис. 4 жирной линией в зоне № 1, жирные линии на рис. 5б соответствуют линиям $\tilde{k}_x^{(j)}(t)$, когда адмитанс варьируется вдоль луча, обозначенного на рис. 4 жирной линией в зоне № 2, а жирные линии на рис. 5в соответствуют линиям $\tilde{k}_x^{(j)}(t)$, когда адмитанс варьируется вдоль луча, обозначенного на рис. 4 жирной линией в зоне № 3. Заметим, что

при $t = 0$ линия $\tilde{k}_x^{(0)}(t)$ начинается на действительной оси, а линии $\tilde{k}_x^{(j)}(t)$ при $j \geq 1$ – на мнимой оси, причем, чем больше номер моды j , тем большим стартовым значением $\text{Im}[\tilde{k}_x^{(j)}(0)]$ обладает мода.

Рис. 5а, 5б, 5в показывают, что волновые числа $\tilde{k}_x^{(j)}$ для номеров мод, больших единицы ($j = 2, 3, \dots$), имеют большие мнимые части при любых значениях адмитанса, т.е. в рабочем диапазоне частот установки эти моды обладают сильным затуханием. Эти моды рождаются на стыках секции 2 с секциями 1 и 3 установки, и поэтому, если микрофоны в секции 2 достаточно удалены от стыков, то вкладами этих мод в звуковое поле в окрестности микрофонов можно пренебрегать.

Рис. 5б, 5в показывают, что для большинства комплексных значений адмитанса (адмитанс лежит в зонах с номерами большими 1 на рис. 4) волновое число $\tilde{k}_x^{(0)}$ нулевой моды обладает наименьшим значением мнимой части, т.е. эта мода является наименее затухающей, а первая мода с волновым числом $\tilde{k}_x^{(1)}$ имеет существенно большее затухание, чем нулевая мода. В этих случаях вкладом первой моды в звуковое поле в окрестности микрофонов, установленных в секции 2 вдали от стыков, также можно пренебрегать.

В противоположность указанным особенностям рис. 5а показывает, что, если комплексное значение адмитанса β лежит в зоне № 1 на рис. 4 и при этом выполняется условие $|\beta| > |\beta_0|$, то $\text{Im}[\tilde{k}_x^{(1)}] < \text{Im}[\tilde{k}_x^{(0)}]$, т.е. наименьшим затуханием в этом случае обладает первая мода, а не нулевая мода. При этом, если комплексное значение адмитанса β лежит в некоторой окрестности значения β_0 в зоне № 1 (рис. 5а) или зоне № 2 (рис. 5б), то значения $\text{Im}[\tilde{k}_x^{(0)}]$ и $\text{Im}[\tilde{k}_x^{(1)}]$ оказываются достаточно близкими, т.е. нулевая и первая моды обладают приблизительно одинаковым затуханием.

Поведение жирной линии $\tilde{k}_x^{(0)}(t)$ на рис. 5а, соответствующей нулевой моде, показывает, что, если β лежит в зоне № 1 и выполняется условие $|\beta| \gg |\beta_0|$, то значение $\text{Im}[\tilde{k}_x^{(0)}]$ оказывается достаточно большим, и, тем самым, нулевая мода быстро затухает, становясь поверхностной модой, звуковое давление в которой сосредоточено вблизи образца ЗПК и экспоненциально убывает по мере удаления от него.

Таким образом, анализ показывает, что в рабочем диапазоне частот звуковое поле вида (4) содержит в секциях 1 и 3 вдали от стыков с секцией 2 только нулевые моды (поршневые моды), а в секции 2 – суперпозицию нулевой и первой моды, причем, если комплексное значение адмитанса β

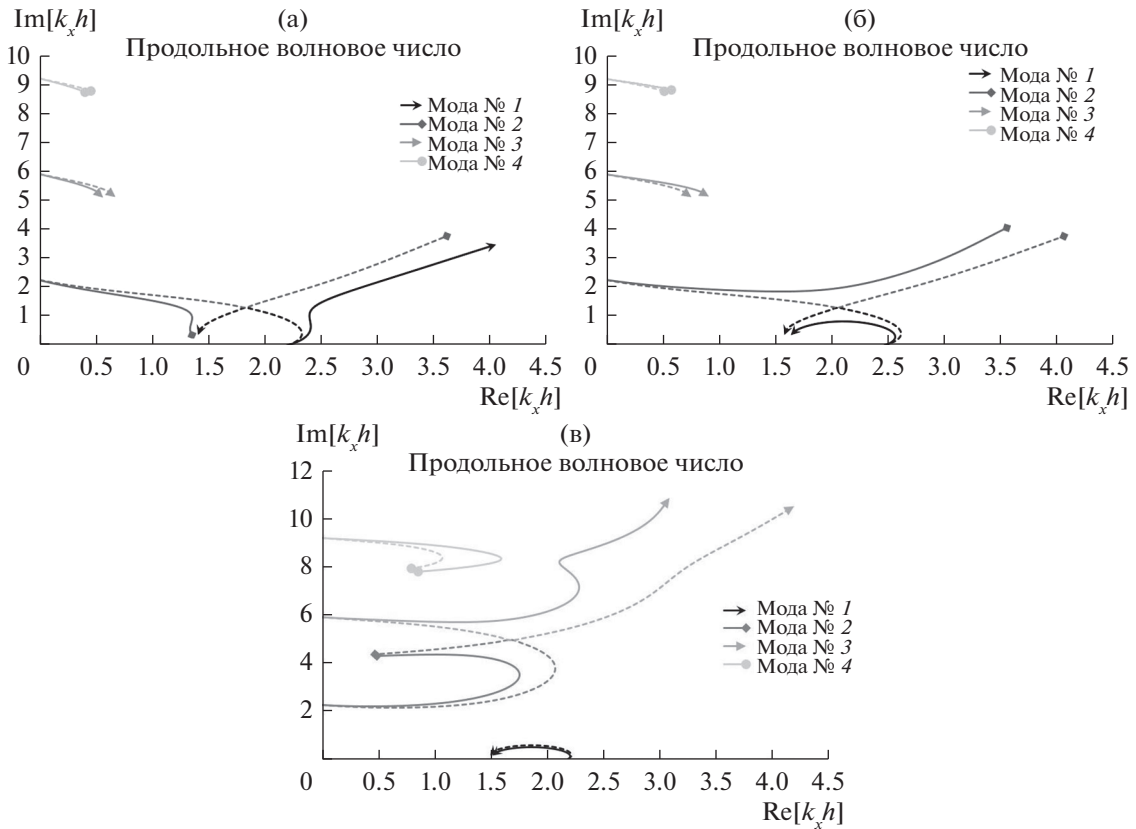


Рис. 5. Смещения безразмерных продольных волновых чисел первых четырех мод на комплексной плоскости, когда значение адмитанса варьируется вдоль лучей вида (9). (а) – Вариация адмитанса вдоль луча в зоне № 1 на рис. 4; (б) – вариация адмитанса вдоль луча в зоне № 2 на рис. 4; (в) – вариация адмитанса вдоль луча в зоне № 3 на рис. 4.

находится вдали от значения β_0 , то звуковое поле в секции 2 с высокой точностью можно считать одномодовым (учитывается или нулевая, или первая моды).

Сильно затухающие моды высшего порядка присутствуют в структуре звукового поля только в окрестности стыков, что обеспечивает дважды непрерывную дифференцируемость звукового давления при переходе из одной секции в другую при наличии разрыва импеданса на стенке. В работе [47] с помощью метода Винера–Хопфа найдены аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения различных мод через разрыв импеданса на одной из стенок прямоугольного канала, которые могут быть использованы для связи амплитуд мод в различных секциях установки:

$$A_s^{(2)} = T(\beta^{(1)} \rightarrow \beta^{(2)}; j \rightarrow s)A_j^{(1)}, \quad (10)$$

$$B_s^{(2)} = R(\beta^{(1)} \rightarrow \beta^{(1)}; j \rightarrow s)A_j^{(1)}, \quad (11)$$

где $A_j^{(1)}$ – комплексная амплитуда моды с номером j , которая падает на стык облицовки со стороны адмитанса стенки $\beta^{(1)}$, $A_s^{(2)}$ – комплексная амплитуда

моды с номером s , которая рождается в секции канала с адмитансом стенки $\beta^{(2)}$ (прошедшая мода), $B_s^{(2)}$ – комплексная амплитуда моды с номером l , которая отразилась обратно в секцию канала с адмитансом стенки $\beta^{(1)}$, $T(\beta^{(1)} \rightarrow \beta^{(2)}; j \rightarrow s)$ и $R(\beta^{(1)} \rightarrow \beta^{(1)}; j \rightarrow s)$ – соответствующие коэффициенты прохождения и отражения, вычисленные в работе [47] для случая, когда разрыв импеданса на стенке имеет координату $x = 0$.

Основываясь на описанных выше особенностях, можно выразить звуковое давление на микрофонах, установленных в секциях 1, 2 и 3 вдали от стыков на жесткой стенке с координатой $y = 0$, в следующей форме

$$p_r(x) = A_r^{(0)} e^{ikx} + B_r^{(0)} e^{-ikx} \quad \text{при } x < 0, \quad (12)$$

$$p_l(x) = A_l^{(0)} e^{ikx} + B_l^{(0)} e^{-ikx} \quad \text{при } x > L, \quad (13)$$

$$p(x) = A^{(0)} e^{ik^{(0)}x} + A^{(1)} e^{ik^{(1)}x} + B^{(0)} e^{-ik^{(0)}x} + B^{(1)} e^{-ik^{(1)}x} \quad (14)$$

при $0 < x < L$.

Звуковое давление, определенное согласно выражениям (12)–(14) с двух сторон стыков, имеющих координаты $x = 0$ и $x = L$, терпит разрыв. Тем не менее, прохождение волны через стыки может быть учтено для этих выражений, опираясь на коэффициенты прохождения и отражения (10) и (11), благодаря которым можно установить следующую связь между амплитудами звуковых мод в выражениях (12)–(14):

$$T_{01}A_r^{(0)} + R_{02}B^{(0)} + R_{11}B^{(1)} = A^{(0)}, \quad (15)$$

$$T_{11}A_r^{(0)} + R_{12}B^{(0)} + R_{22}B^{(1)} = A^{(1)}, \quad (16)$$

$$T_{02}B^{(0)} + T_{12}B^{(1)} + R_{01}A_r^{(0)} = B_r^{(0)}, \quad (17)$$

$$T_{02}A^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} + T_{12}A^{(1)}e^{ik_x^{(1)}L} + R_{01}B_l^{(0)}e^{-ikL} = A_l^{(0)}e^{ikL}, \quad (18)$$

$$T_{01}B_l^{(0)}e^{ikL} + R_{02}A^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} + R_{11}A^{(1)}e^{ik_x^{(1)}L} = B^{(0)}e^{-ik_x^{(0)}L}, \quad (19)$$

$$T_{11}B_l^{(0)}e^{-ikL} + R_{12}A^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} + R_{22}A^{(1)}e^{ik_x^{(1)}L} = B^{(1)}e^{-ik_x^{(1)}L}, \quad (20)$$

где введены следующие обозначения

$$T_{01} = T(0 \rightarrow \beta; 0 \rightarrow 0), \quad T_{02} = T(\beta \rightarrow 0; 0 \rightarrow 0),$$

$$T_{11} = T(0 \rightarrow \beta; 0 \rightarrow 1),$$

$$T_{12} = T(\beta \rightarrow 0; 1 \rightarrow 0), \quad R_{01} = R(0 \rightarrow 0; 0 \rightarrow 0),$$

$$R_{02} = R(\beta \rightarrow \beta; 0 \rightarrow 0),$$

$$R_{11} = R(\beta \rightarrow \beta; 1 \rightarrow 0), \quad R_{12} = R(\beta \rightarrow \beta; 0 \rightarrow 1),$$

$$R_{22} = R(\beta \rightarrow \beta; 1 \rightarrow 1).$$

Соотношения (15)–(17) связывают амплитуды на стыке с координатой $x = 0$, а соотношения (18)–(20) связывают амплитуды на стыке с координатой $x = L$, причем появление экспонент в соотношениях (18)–(20) связано с тем, что используются коэффициенты прохождения и отражения, вычисленные в работе [47] для случая, когда разрыв импеданса на стенке имеет координату $x = 0$.

Если звуковое поле содержит в секции 2 только одну доминирующую моду, распространяющуюся в обе стороны, то соотношения (15)–(20) принимают следующую форму

$$T_{01}A_r^{(0)} + R_{02}B^{(0)} = A^{(0)}, \quad (21)$$

$$T_{02}B^{(0)} + R_{01}A_r^{(0)} = B_r^{(0)}, \quad (22)$$

$$T_{02}A^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} + R_{01}B_l^{(0)}e^{-ikL} = A_l^{(0)}e^{ikL}, \quad (23)$$

$$T_{01}B_l^{(0)}e^{ikL} + R_{02}A^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} = B^{(0)}e^{-ik_x^{(0)}L}. \quad (24)$$

Здесь через $k_x^{(0)}$ обозначается волновое число с наименьшей мнимой частью, т.е. является волновым числом нулевой или первой моды, $A^{(0)}$ и $B^{(0)}$ – соответствующие амплитуды этой моды.

Четыре соотношения (21)–(24) могут быть использованы для нахождения четырех коэффициентов прохождения и отражения по амплитудам мод и продольному волновому числу, которые могут быть определены на основе обработки результатов измерений:

$$T_{01} = \frac{e^{ik_x^{(0)}L} (A^{(0)})^2 - e^{-ik_x^{(0)}L} (B^{(0)})^2}{A^{(0)}A_r^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} - B^{(0)}B_l^{(0)}e^{-ikL}}, \quad (25)$$

$$R_{02} = \frac{e^{-ikL}A^{(0)}B_l^{(0)} - e^{-ik_x^{(0)}L}B^{(0)}A_r^{(0)}}{A^{(0)}A_r^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} - B^{(0)}B_l^{(0)}e^{-ikL}}, \quad (26)$$

$$T_{02} = \frac{e^{ikL}A_r^{(0)}A_l^{(0)} - e^{-ikL}B_r^{(0)}B_l^{(0)}}{A^{(0)}A_r^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} - B^{(0)}B_l^{(0)}e^{-ikL}}, \quad (27)$$

$$R_{01} = \frac{e^{ik_x^{(0)}L}A^{(0)}B_r^{(0)} - e^{ikL}A_l^{(0)}B^{(0)}}{A^{(0)}A_r^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} - B^{(0)}B_l^{(0)}e^{-ikL}}. \quad (28)$$

Заметим, что в случае двухмодового распространения звука в секции 2 все коэффициенты прохождения и отражения не могут быть определены, поскольку соотношения (15)–(20) содержат 9 неизвестных коэффициентов, а уравнений только шесть.

АНАЛИЗ 3-Х МИКРОФОННОГО МЕТОДА ИЗВЛЕЧЕНИЯ ИМПЕДАНСА

Согласно 3-х микрофонному методу, импеданс ЗПК определяется только по измерениям на трех микрофонах, установленных на стенке напротив образца. При этом рассматривается распространение звука только в секции 2, причем учитывается только мода, обладающая наименьшим затуханием: в представлении (14) полагается или $A^{(1)} = B^{(1)} = 0$, или $A^{(0)} = B^{(0)} = 0$. Тем самым, данный метод не может быть в принципе использован для определения адмитанса, близкого по значению β_0 , при котором имеет место слияние 0-й и 1-й моды.

Пусть x_1 , x_2 и x_3 – координаты микрофонов в секции 2, а P_1 , P_2 и P_3 – соответствующие комплексные значения звукового давления, определенные на некоторой частоте на этих микрофонах. Тогда, согласно 3-х микрофонному методу составляется система уравнений

$$P_1 = Ae^{ik_x x_1} + Be^{-ik_x x_1}, \quad (29)$$

$$P_2 = Ae^{ik_x x_2} + Be^{-ik_x x_2}, \quad (30)$$

$$P_3 = Ae^{ik_x x_3} + Be^{-ik_x x_3}, \quad (31)$$

из решения которой определяются амплитуды A и B и составляется уравнение относительно продольного волнового числа k_x :

Таблица 3

	Извлечение по микрофонам № 4, 5 и 6	Извлечение по микрофонам № 5, 6 и 7
k_x	(9.92, 0.0185)	(0.53, 0.0326)
β	(0.0503, -26.92)	(0.0855, -0.37)
A	(8.44, -2.51)	(-2.56, 17.36)
B	(-11.34, -7.21)	(-1.04, 6.91)
Φ	586.04	4.72

$$A = \frac{P_1 e^{-ik_x x_2} - P_2 e^{-ik_x x_1}}{2i \sin(k_x(x_1 - x_2))}, \quad B = \frac{P_2 e^{ik_x x_1} - P_1 e^{ik_x x_2}}{2i \sin(k_x(x_1 - x_2))}, \quad (32)$$

$$P_1 \sin(k_x(x_3 - x_2)) - P_2 \sin(k_x(x_3 - x_1)) + P_3 \sin(k_x(x_2 - x_1)) = 0. \quad (33)$$

Если 3-х микрофонный метод рассматривается на основе метода Прони, то расстояние между двумя соседними микрофонами выбирается одинаковым. В этом случае уравнение (33) приобретает вид

$$\cos(k_x d) = \frac{P_1 + P_3}{2P_2},$$

где d – расстояние между соседними микрофонами. Решение данного уравнения относительно волнового числа k_x неединственно и зависит от целочисленного параметра n :

$$k_x = \frac{1}{d} \left(\pm \arccos \left(\frac{P_1 + P_3}{2P_2} \right) + 2\pi n \right). \quad (34)$$

После определения волнового числа k_x из характеристического уравнения (5) выражается адмитанс в виде

$$\beta = i\sqrt{k^2 - k_x^2} \operatorname{tg}(\sqrt{k^2 - k_x^2} H) / k. \quad (35)$$

Описанный классический вариант 3-х микрофонного метода обладает рядом недостатков. В первую очередь это неединственность определения волнового числа k_x из решения (34), благодаря которой требуется дополнительное исследование для выделения правильного значения. Такое дополнительное исследование обычно базируется на проверке качества восстановления звукового давления в секции 2 по найденному значению k_x , для чего должны быть задействованы дополнительные микрофоны. Критерием качества восстановления звукового давления обычно выступает квадратичное отклонение восстановленных значений давления на микрофонах от измеренных, выражаемое функционалом

$$\Phi = \sum_{m=1}^N |p(x_m) - P_m|^2, \quad (36)$$

где $N > 3$ – число микрофонов в секции 2, а $p(x_m)$ – звуковое давление на m -м микрофоне, восстановленное по выражению

$$p(x) = A e^{ik_x x} + B e^{-ik_x x}, \quad (37)$$

в котором амплитуды и волновое число определяются из выражений (32) и (34) и являются функциями комплексных значений P_1 , P_2 и P_3 . Очевидно, что слагаемые суммы (36), соответствующие микрофонам, задействованным в реализации 3-х микрофонного метода, обнуляются, и значение функционала (36) определяется отклонениями восстановленного давления на остальных микрофонах.

Звуковые давления P_1 , P_2 и P_3 , к которым строго “привязано” восстановление давления посредством соотношений (29)–(31), известны из измерений лишь внутри некоторого доверительного интервала. Поэтому особое значение для достижения минимального значения функционала (36) приобретает чувствительность восстановленного звукового давления к этим измеренным значениям, которая может быть охарактеризована с помощью производной $\partial p(x) / \partial P_j$. Эти производные вычисляются тривиально из соотношения (37) с учетом (32) и (34) (результат здесь не приводится). Заметим, что величина $\partial p(x) / \partial P_j$ всегда равна единице для координаты $x = x_j$ и нулю для координат двух остальных микрофонов, задействованных в 3-х микрофонном методе.

В качестве примера рассмотрим извлечение импеданса с помощью 3-х микрофонного метода (34) и (35), примененного к результатам измерений, представленным в табл. 1 для частоты 500 Гц для двух троек равноудаленных микрофонов (микрофоны с номерами 4, 5, 6 и 5, 6, 7). В табл. 3 представлены найденные продольные волновые числа k_x , адмитансы β , комплексные амплитуды A и B , и значения функционала (36), а в табл. 4 – относительные отклонения $\delta = |p(x_m) - P_m| / |P_m|$ восстановленного звукового давления $p(x_m)$ на микрофонах секции 2 от измеренных значений P_m и модули производных $|\partial p(x) / \partial P_j|$, вычисленные для координат микрофонов секции 2.

Таблица 4

m	Извлечение по микрофонам № 4, 5 и 6				Извлечение по микрофонам № 5, 6 и 7			
	δ	$ \partial p(x_m)/\partial P_1 $	$ \partial p(x_m)/\partial P_2 $	$ \partial p(x_m)/\partial P_3 $	δ	$ \partial p(x_m)/\partial P_1 $	$ \partial p(x_m)/\partial P_2 $	$ \partial p(x_m)/\partial P_3 $
3	2.43	4.77	7.27	3.86	0.21	9.26	14.65	6.13
4	0.00	1.00	0.00	0.00	0.03	2.81	2.72	0.91
5	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00
7	0.02	1.10	3.08	2.99	0.00	0.00	0.00	1.00
8	0.65	3.27	6.74	3.20	0.06	3.25	8.23	5.97
9	3.51	4.28	8.31	4.53	0.27	9.27	20.73	12.10

Данные, представленные в табл. 3, показывают, что извлечение импеданса на двух различных тройках микрофонов привело к существенно различным результатам для всех определяемых величин. При этом звуковое давление, восстановленное по микрофонам 5, 6 и 7 в секции 2, оказывается ближе к значениям, измеренным на других микрофонах, чем для случая использования микрофонов 4, 5 и 6, что следует из соответствующих значений функционала Φ . Относительные отклонения δ , представленные в табл. 4 для этих двух случаев, подтверждают сделанный вывод – в случае использования микрофонов 5, 6 и 7 относительные отклонения на порядок меньше, чем при использовании микрофонов 4, 5 и 6. При этом в обоих случаях наблюдается одинаковая тенденция: чем дальше расположен контрольный микрофон в секции 2 от тройки микрофонов, задействованных при извлечении импеданса, тем больше на нем относительное отклонение δ . Данная особенность объясняется значениями модуля производных $|\partial p(x)/\partial P_j|$, представленных в табл. 4, которые демонстрируют то же самое поведение, причем эти значения оказываются большими на удаленных микрофонах. Это означает, что малые вариации измеренных звуковых давлений P_1 , P_2 и P_3 внутри доверительных интервалов могут приводить к отклонениям восстановленного давления на контрольных микрофонах на порядок большим, чем сама вариация. Выше был оценен доверительный интервал в проведенных измерениях как 0.3–0.4 Па, поэтому отклонение восстановленного давления может иметь тот же порядок, что и сама измеряемая величина.

Таким образом, представленные данные демонстрируют второй недостаток 3-х микрофонного метода, который проявляется в высокой чувствительности восстановленного звукового давления к малым вариациям измеренных значений P_1 , P_2 и P_3 , что приводит к погрешностям извлечения импеданса.

Заметим, что использование 3-х микрофонного метода в общем случае, когда расстояния между соседними микрофонами могут быть произвольными и необходимо решать уравнение (33), отчасти снимает проблему неединственности решения, но высокая чувствительность метода к измеренным звуковым давлениям сохраняется.

МЕТОД ИЗВЛЕЧЕНИЯ ИМПЕДАНСА, ОСНОВАННЫЙ НА МИКРОФОНАХ, УСТАНОВЛЕННЫХ НАПРОТИВ ОБРАЗЦА

Наиболее естественный способ преодоления высокой чувствительности восстановленного звукового поля в секции 2 к малым вариациям измеренных звуковых давлений состоит в применении метода наименьших квадратов. Этот общий метод основывается на определении такого импеданса стенки, при котором восстановленное звуковое давление в секции 2 наименее отклоняется от измеренных значений на микрофонах. Реализация этого метода предполагает минимизацию функционала (36), например, с помощью метода градиентного спуска [53]. В этом процессе восстановленное на микрофонах звуковое давление $p(x_m)$ рассматривается в качестве комплексной функции адмитанса β . Однако данный метод хорошо сходится тогда, когда минимизация функционала начинается со значения переменной, достаточно близкого к искомому.

Перейдем к описанию метода, разработанного в настоящей работе применительно к установке “Интерферометр с потоком” ЦАГИ. Необходимо выделить три случая.

Первый случай относится к определению адмитанса, для которого в секции 2 реализуется звуковое поле, содержащее только одну доминирующую моду, распространяющуюся в обе стороны, но при этом затухание моды оказывается недостаточно сильным, так что данная мода, проходя один стык, достигает другого. Диагностика данного случая основана на определении адмитанса из 3-х микрофонного метода (35), примененного

к звуковым давлениям, измеренным как на микрофонах 4, 5, 6, так и микрофонах 5, 6 и 7. При этом выбирается то значение адмитанса $\beta^{(\text{start})}$, для которого восстановление звукового давления по выражению (37) в секции 2 дает минимальное значение функционала (36). Далее по найденному адмитансу $\beta^{(\text{start})}$ определяются волновые числа нулевой и первой мод, и проверяется, что волновое число, вычисленное из выражения (34), соответствует моде с наименьшим значением мнимой части, а мнимая часть волнового числа другой моды обеспечивает настолько сильное затухание, что вкладом этой моды в звуковое поле на крайних микрофонах секции 2 (микрофоны с номерами 3 и 9) можно пренебречь.

Если указанные критерии выполняются, то далее реализуется 3-х микрофонный метод для всевозможных сочетаний трех микрофонов из семи микрофонов, располагающихся в секции 2. При этом для случаев, когда три микрофона располагаются неравномерно друг по отношению к другу, волновое число k_x определяется из численного решения уравнения (33), а соответствующий адмитанс находится из выражения (35). В качестве стартового значения для численного решения уравнения (33) используется адмитанс $\beta^{(\text{start})}$. В результате такого перебора находится такое значение адмитанса $\beta^{(3)}$, для которого восстановление звукового давления по выражению (37) в секции 2 дает минимальное значение функционала (36) среди всевозможных реализаций 3-х микрофонного метода.

Именно данное значение адмитанса $\beta^{(3)}$ используется в качестве стартового значения для реализации процедуры минимизации функционала (36) с помощью метода градиентного спуска. В этом процессе восстановленное на микрофонах звуковое давление $p(x_m)$ вычисляется посредством выражения (37), а в качестве варьируемых комплексных переменных, для которых ищутся оптимальные значения, рассматриваются адмитанс β и амплитуды A и B , причем волновое число k_x в (37) вычисляется посредством численного решения уравнения (33) по заданному значению адмитанса. В результате процедуры минимизации определяется значение адмитанса $\beta^{(\text{LSQ})}$, для которого восстановленное звуковое давление в секции 2 оказывается ближе ко всем измеренным значениям, чем наилучший вариант применения 3-х микрофонного метода.

Второй случай относится к частотам настройки ЗПК, на которых в секции 2 наблюдается настолько сильное затухание одной прошедшей звуковой моды, что ее амплитуда становится сравнимой с амплитудой помех уже внутри самой

секции. Пример этого случая представлен в данных табл. 1 на частоте 1500 Гц. Этот случай диагностируется сразу после первичной обработки результатов измерений, по результатам которой определяются уровни звукового давления. Далее, наиболее трудной процедурой является отбраковка микрофонов, измеренные звуковые давления на которых содержат значительную долю помех, поскольку ее можно провести только экспериментально. В настоящей работе предложен способ такой отбраковки на основе изменения вибрационных свойств стенок канала с помощью различной конфигурации стяжек и грузов, а также использования звукопоглощающего мата. Если указанные мероприятия приводят к существенным изменениям звукового давления, измеренным на некоторых микрофонах, то эти микрофоны нельзя использовать при извлечении импеданса. Данные, представленные в табл. 2, показывают, что в приведенном примере такие микрофоны имеют номера 8–11.

В данном случае звуковая мода, прошедшая в секцию 2 через первый стык, фактически не достигает второго стыка, и поэтому в секции 2 отсутствует отраженная волна. Это означает, что вместо выражения (37) для звукового давления на микрофонах необходимо использовать следующее выражение

$$p(x) = Ae^{ik_x x}, \quad (38)$$

а амплитуду отраженной волны принять равной нулю, $B = 0$.

Выражение (38) содержит две неизвестных величины k_x и A , и поэтому для их определения можно использовать два микрофона. Пусть x_1 и x_2 — координаты микрофонов в секции 2, а P_1 и P_2 — соответствующие комплексные значения звукового давления, определенные на этих микрофонах. Далее составляется система уравнений

$$P_1 = Ae^{ik_x x_1}, \quad P_2 = Ae^{ik_x x_2}, \quad (39)$$

решение которой имеет следующий вид

$$k_x = \frac{1}{i(x_2 - x_1)} \left(\ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + 2\pi ni \right), \quad A = P_1 e^{-ik_x x_1}. \quad (40)$$

Заметим, что и в данном случае волновое число k_x не определяется однозначно, так как решение (40) содержит произвольный целочисленный параметр n .

Разработанный метод предполагает, что в данном случае процедура извлечения импеданса полностью повторяет процедуру, представленную выше для первого случая. Отличие состоит только в том, что вместо 3-х микрофонного метода используется 2-х микрофонный метод (40). Вначале проводится тестовое определение адмитанса $\beta^{(\text{start})}$ по измеренным звуковым давлениям на не-

Таблица 5

	Наилучший 3-х микрофонный метод	Метод наименьших квадратов
k_x	(0.54, 0.0066)	(0.54, 0.0071)
β	(0.0176, -0.40)	(0.0189, -0.40)
A	(-1.33, 15.21)	(-1.34, 15.19)
B	(-1.56, 7.94)	(-1.58, 7.92)
Φ	0.068	0.0375

которых двух соседних микрофонах, по результатам которого проводится проверка того, что в секцию 2 прошла только одна мода. Далее реализуется 2-х микрофонный метод (40) для всевозможных сочетаний двух микрофонов среди микрофонов в секции 2, прошедших отбор, и по результатам перебора находится такое значение адмитанса $\beta^{(2)}$, для которого восстановление звукового давления по выражению (38) в секции 2 дает минимальное значение функционала (36) среди всевозможных реализаций 2-х микрофонного метода. После этого значение адмитанса $\beta^{(2)}$ используется в качестве стартового значения для реализации процедуры минимизации функционала (36) с помощью метода градиентного спуска, которая приводит к определению значения адмитанса $\beta^{(LsQ)}$, для которого восстановленное звуковое давление в секции 2 оказывается ближе ко всем измеренным значениям, прошедшим отбор.

И наконец, третий случай относится к определению адмитанса, значение которого близко к значению β_0 , при котором реализуется слияние 0-й и 1-й моды. В этом случае в секции 2 наблюдается двухмодовое распространение, описываемое выражением (14). Данный случай диагностируется на стадии тестового определения адмитанса $\beta^{(start)}$ с помощью 3-х микрофонного метода (первый случай) или 2-х микрофонного метода (второй случай), которое показывает, что 0-я и 1-я мода имеют приблизительно одинаковые затухания в секции 2. Разработанный метод предполагает, что определение адмитанса в этом случае сразу проводится на основании минимизации функционала (36) методом градиентного спуска, причем адмитанс $\beta^{(start)}$ используется в качестве начального приближения. При этом восстановленное звуковое давление $p(x_m)$ вычисляется посредством выражения (14), а в качестве варьируемых комплексных переменных, для которых ищутся оптимальные значения, рассматриваются адмитанс β и амплитуды $A^{(0)}$, $B^{(0)}$, $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$, причем волновые числа $k_x^{(0)}$ и $k_x^{(1)}$ в (14) вычисляются посредством численного решения уравнения (33) по заданному значению адмитанса.

Результаты извлечения импеданса по этому методу для разных частот представлены ниже на рис. 7. Обратим внимание на то, что третий случай не реализуется для рассмотренной ЗПК. В табл. 5 для частоты 500 Гц представлены найденные продольные волновые числа k_x , адмитансы β , комплексные амплитуды A и B и значения функционала (36) для наилучшего извлечения импеданса по 3-х микрофонному методу (наилучший результат в данном примере достигнут на микрофонах с номерами 3, 5 и 8) и согласно методу наименьших квадратов.

Сравнение данных табл. 5 и 3 показывает, что наилучшее определение основных параметров с помощью 3-х микрофонного метода, достигнутое на микрофонах с номерами 3, 5 и 8, существенно скорректировало значения, найденные по стандартной версии 3-х микрофонного метода из микрофонов с номерами 5, 6 и 7, причем сильно изменилась мнимая часть продольного волнового числа, и, как следствие, реальная часть адмитанса. Метод наименьших квадратов не сильно изменил эти значения, но приблизительно в два раза уменьшил функционал Φ . Важным обстоятельством является то, что восстановленное звуковое давление на микрофонах по значениям, определенным по методу наименьших квадратов, находится в пределах доверительного интервала измерений.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В дополнении к звуковому полю, восстановленному в секции 2, по результатам измерений могут быть восстановлены и звуковые поля в секциях 1 и 3, в которых в рабочем диапазоне частот распространяются только поршневые моды, а звуковое давление на микрофонах выражается соотношениями (12) и (13). Комплексные амплитуды $A_r^{(0)}$ и $B_r^{(0)}$ в секции 1 и амплитуды $A_l^{(0)}$ и $B_l^{(0)}$ в секции 3 определяются по результатам измерений на двух микрофонах, расположенных в каждой из этих секций на основе применения стандартного 2-х микрофонного метода, используемого в интерферометрах нормального падения

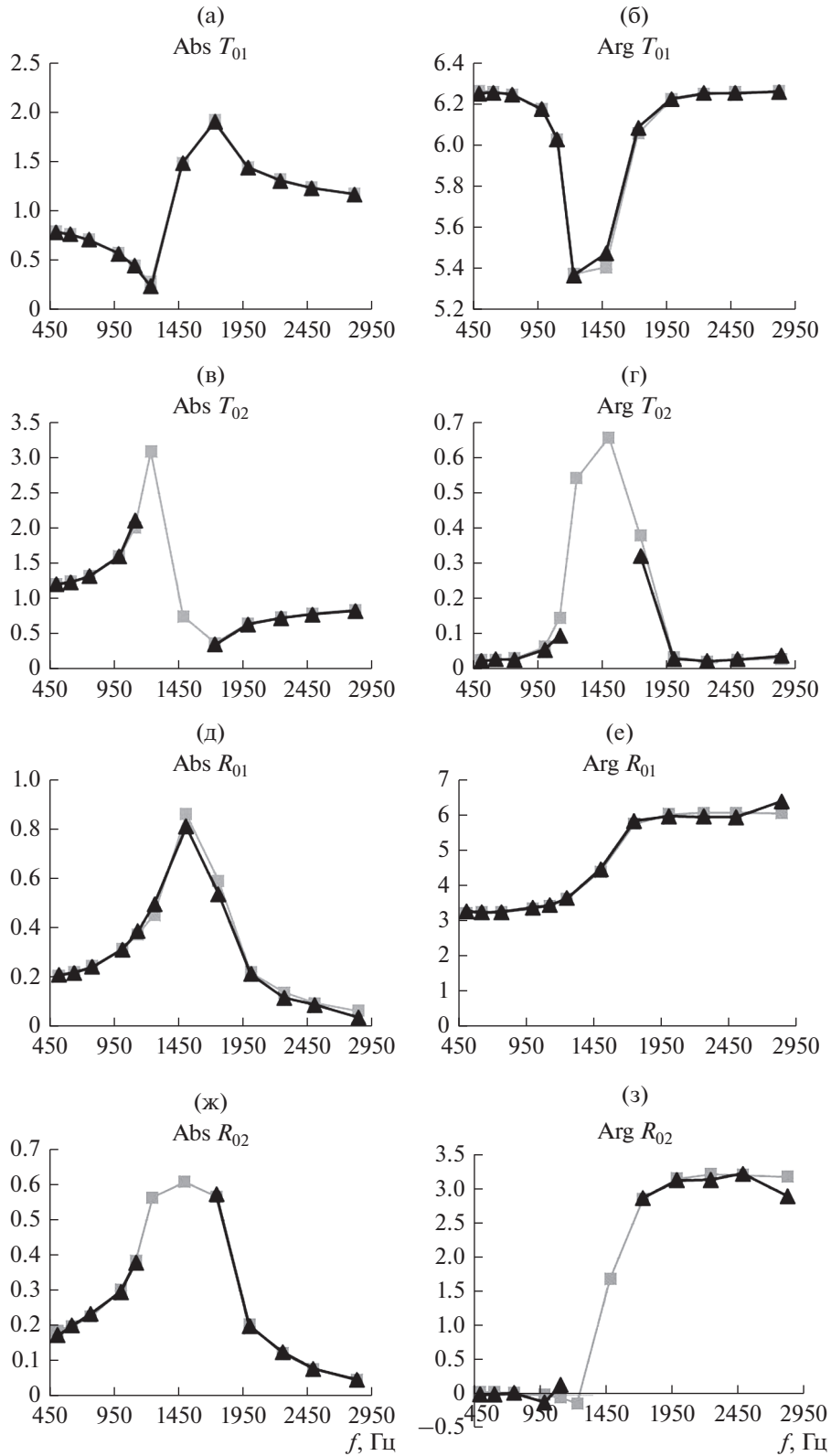


Рис. 6. Сравнение модулей и аргументов комплексных коэффициентов прохождения и отражения волн от разрыва импеданса, полученных из эксперимента (треугольники) и вычисленных по аналитическому решению (квадраты) для рассмотренных в эксперименте частот.

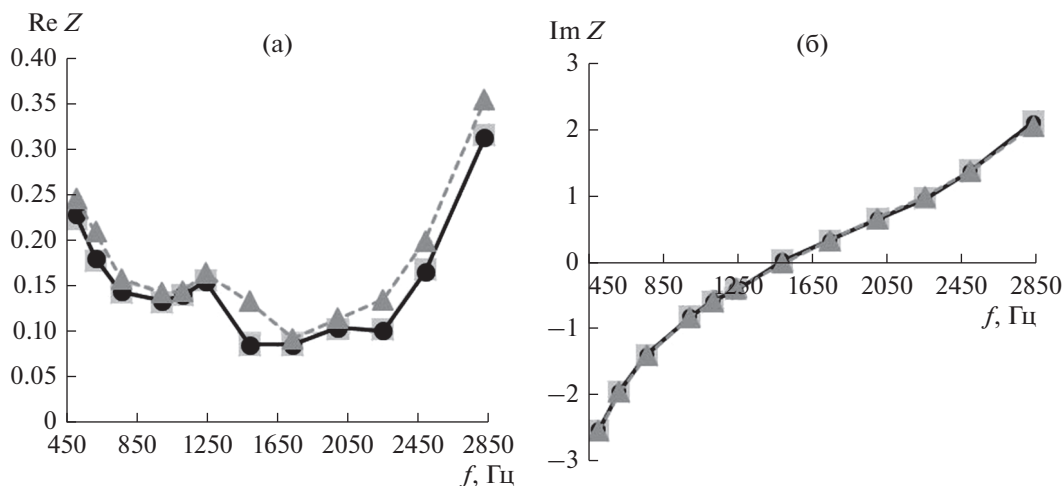


Рис. 7. Результаты извлечения (а) действительной и (б) мнимой частей импеданса с помощью лучшего 3-х микрофонного метода (круги), метода наименьших квадратов (квадраты) и с учетом эффектов на стыках (треугольники).

(соответствующие выражения хорошо известны, например, [54], и здесь не приводятся).

Таким образом, по результатам измерений определяются все комплексные амплитуды и волновые числа, входящие в соотношения (15)–(20). Поскольку на рассматриваемой ЗПК не реализуется случай двухмодового распространения звука в секции 2, то в этом случае необходимо рассматривать одномодовую версию этих соотношений (21)–(24). Это означает, что по известным из измерений амплитудам и волновым числам можно определить из выражений (25)–(28) коэффициенты прохождения и отражения волн через разрыв импеданса на стенке (10) и (11), выполнив сравнение со значениями, получаемыми из аналитического решения по определенному из эксперимента значению адмитанса $\beta^{(LsQ)}$.

При этом необходимо заметить, что вблизи частоты настройки ЗПК (в рассматриваемом случае это 1500 Гц), когда в секции 2 наблюдается только одна сильно затухающая мода и отражение от второго стыка внутрь секции 2 отсутствует, могут быть найдены только коэффициенты T_{01} и R_{01} из выражений (25) и (26), в которых надо положить $B^{(0)} = 0$ и $B_l^{(0)} = 0$, а коэффициенты T_{02} и R_{02} не могут быть определены, так как в эксперименте фактически отсутствует прохождение волны из секции 2, в которой установлена ЗПК, в жестко-стенные секции 1 и 3.

На рис. 6а–6з представлены результаты сравнения модулей и аргументов комплексных коэффициентов T_{01} , R_{01} , T_{02} и R_{02} , полученных из эксперимента и вычисленных по аналитическому решению для рассмотренного диапазона частот. При этом на рис. 6в, 6г, 6ж и 6з для частот 1240 и 1500 Гц отсутствуют соответствующие значения для коэффициентов T_{02} и R_{02} , полученные из экс-

перимента, так как в этих случаях наблюдалось сильное затухание мод при распространении в секции 2, что отражение от второго стыка фактически отсутствовало.

Данные, представленные на рис. 6, показывают хорошее совпадение экспериментальных значений коэффициентов прохождения и отражения звуковых мод через разрыв импеданса на стенке канала с их теоретическими значениями, вычисленными по аналитическому решению [47] — относительные отклонения значений не превышают в самых худших случаях 10–15%. Поскольку данные коэффициенты являются достаточно тонкой характеристикой прохождения волн через разрыв импеданса стенок канала, то можно сделать вывод о том, что аналитическое решение, полученное в [47], находит свое экспериментальное подтверждение.

МЕТОД ИЗВЛЕЧЕНИЯ ИМПЕДАНСА, ОСНОВАННЫЙ НА АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ

Одной из причин достаточно малых отклонений значений коэффициентов прохождения и отражения, определенных из экспериментов и найденных теоретически, является использование для проведения расчетов по аналитическому методу значения адмитанса $\beta^{(LsQ)}$, которое на самом деле найдено с некоторой погрешностью, а также использование амплитуд $A_r^{(0)}$, $B_r^{(0)}$, $A_l^{(0)}$ и $B_l^{(0)}$, определенных тоже с некоторой погрешностью. Отсюда возникает идея использования аналитических выражений для коэффициентов прохождения и отражения T_{01} , R_{01} , T_{02} , R_{02} и др. с целью коррекции значений адмитанса $\beta^{(LsQ)}$, найденного по результатам наилучшего восстановления зву-

кового поля в секции 2 с помощью метода наименьших квадратов.

Реализация такой коррекции должна опираться на восстановление звукового давления на всех микрофонах во всех секциях установки на основе учета только доминирующих мод в виде (12)–(14), а соотношения (15)–(20) должны использоваться в качестве граничных условий на стыках образца ЗПК. Данная коррекция адмитанса основывается на дополнительном эффекте. Если адмитанс $\beta^{(LsQ)}$ определяется на основе эффекта зависимости продольного волнового числа в секции 2 от значения адмитанса, то коррекция основывается на эффекте зависимости коэффициентов прохождения и отражения мод при прохождении стыков ЗПК от значения импеданса. Тем самым, при объединении метода определения адмитанса $\beta^{(LsQ)}$ с его последующей коррекцией возникает новый метод извлечения импеданса, учитывающий сразу два эффекта.

Следует отметить, что задача восстановления звукового поля в виде (12)–(14) при наличии граничных условий (15)–(20) является переопределенной, если точно фиксировать восстановленное звуковое давление на его измеренных значениях, так как число уравнений будет превышать число неизвестных. Однако, выше было показано, что такая точная привязка значений приводит к достаточно большим погрешностям из-за высокой чувствительности восстановленного звукового поля к измеренным значениям при наличии доверительного интервала измерений. Поэтому коррекция должна также осуществляться с помощью метода наименьших квадратов, тем более, что значение адмитанса $\beta^{(LsQ)}$ определяется этим методом. Критерием правильности извлечения импеданса выступают отклонения восстановленного звукового давления на всех микрофонах от измеренных значений, которые не должны быть больше доверительного интервала.

Метод извлечения импеданса основан на рассмотрении задачи минимизации полного функционала $\Phi_{\text{общ}}$:

$$\Phi_{\text{общ}} = \sum_{m=1}^N |p(x_m) - P_m|^2 + \sum_{m=1}^2 |p_r(x_m) - P_m^{(r)}|^2 + \sum_{m=1}^2 |p_l(x_m) - P_m^{(l)}|^2 + \sum_{j=1}^6 \phi_j, \quad (41)$$

где $p_r(x_m)$, $p(x_m)$ и $p_l(x_m)$ – звуковые давления, восстановленные в секциях 1, 2 и 3 с помощью выражений (12), (13) и (14) соответственно, $P_m^{(r)}$, P_m и $P_m^{(l)}$ – звуковые давления, измеренные на микрофонах секций 1, 2 и 3 соответственно, $\phi_j = |g_j|^2$,

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv T_{01}A_r^{(0)} + R_{02}B^{(0)} + R_{11}B^{(1)} - A^{(0)}, \\ g_2 &\equiv T_{11}A_r^{(0)} + R_{12}B^{(0)} + R_{22}B^{(1)} - A^{(1)}, \\ g_3 &\equiv T_{02}B^{(0)} + T_{12}B^{(1)} + R_{01}A_r^{(0)} - B_r^{(0)}, \\ g_4 &\equiv T_{02}A^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} + T_{12}A^{(1)}e^{ik_x^{(1)}L} + \\ &\quad + R_{01}B_l^{(0)}e^{-ikL} - A_l^{(0)}e^{ikL}, \\ g_5 &\equiv T_{01}B_l^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} + R_{02}A^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} + \\ &\quad + R_{11}A^{(1)}e^{ik_x^{(1)}L} - B^{(0)}e^{-ik_x^{(0)}L}, \\ g_6 &\equiv T_{11}B_l^{(0)}e^{-ik_x^{(0)}L} + R_{12}A^{(0)}e^{ik_x^{(0)}L} + \\ &\quad + R_{22}A^{(1)}e^{ik_x^{(1)}L} - B^{(1)}e^{-ik_x^{(1)}L}. \end{aligned}$$

В отличие от рассмотренного ранее функционала Φ (36) в данном функционале присутствуют также слагаемые, учитывающие экспериментальные данные на микрофонах в жесткостенных секциях, а также слагаемые ϕ_j , обеспечивающие корректное с точки зрения точного решения [47] описание эффектов отражения, прохождения и трансформации волноводных мод на скачках импеданса. При этом все коэффициенты отражения и прохождения $R_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$, входящие в функционал (41), являются функциями неизвестного импеданса и рассчитываются, исходя из выражений, найденных в [47]. В случаях, когда коэффициенты $R_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$, вычисленные согласно (25)–(28) для значения адмитанса $\beta^{(LsQ)}$, оказываются достаточно близки к их теоретическим значениям, то для упрощения вычислений значений функционала (41) можно использовать разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(\beta) &= T_{\mu\nu}(\beta^{(LsQ)}) + \frac{\partial T_{\mu\nu}(\beta^{(LsQ)})}{\partial \beta} (\beta - \beta^{(LsQ)}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_{\mu\nu}(\beta^{(LsQ)})}{\partial \beta^2} (\beta - \beta^{(LsQ)})^2 + \dots, \\ R_{\mu\nu}(\beta) &= R_{\mu\nu}(\beta^{(LsQ)}) + \frac{\partial R_{\mu\nu}(\beta^{(LsQ)})}{\partial \beta} (\beta - \beta^{(LsQ)}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_{\mu\nu}(\beta^{(LsQ)})}{\partial \beta^2} (\beta - \beta^{(LsQ)})^2 + \dots \end{aligned}$$

Задача минимизации значений функционала (41) решается с помощью метода градиентного спуска, при этом в качестве варьируемых параметров выступают все комплексные амплитуды, входящие в выражения (12)–(14), и адмитанс β , продольные волновые числа 0-й и 1-й мод находят из численного решения уравнения (33), а в качестве начальных значений этих переменных

Таблица 6

	С учетом эффектов на стыках	Метод наименьших квадратов
k_x	(0.54, 0.01)	(0.54, 0.0071)
β	(0.0266, -0.397)	(0.0189, -0.40)
A	(-2.46, 15.57)	(-1.34, 15.19)
B	(-2.45, 7.68)	(-1.58, 7.92)
$\Phi_{\text{общ}}/\Phi$	0.134/0.087	0.63/0.0375

используются амплитуды и значение адмитанса $\beta^{(LsQ)}$, полученные на предыдущем этапе.

Результаты извлечения импеданса рассмотренного образца ЗПК с помощью различных методов для реализованных в эксперименте частот представлены на рис. 7 (значение импеданса представлено для зависимости от времени вида $\exp(+i\omega t)$). Как видно из этого рисунка, проведенная коррекция с учетом эффектов прохождения и отражения на стыках образца практически не изменила мнимую часть импеданса, а в большей степени оказала влияние на реальную часть импеданса.

В табл. 6 для частоты 500 Гц представлены найденные продольные волновые числа k_x , адмитансы β , комплексные амплитуды A и B и значения функционалов Φ (36) и $\Phi_{\text{общ}}$ (41) для извлечения импеданса согласно методу наименьших квадратов и разработанному методу с учетом эффектов на стыках образца. Как видно из данных табл. 6, проведенная коррекция несколько увеличила мнимую часть волнового числа k_x , т.е. увеличила затухание звука, и как следствие, возросла реальная часть импеданса.

Сравнение значений функционалов $\Phi_{\text{общ}}$ показывает, что коррекция звукового поля существенно приблизила коэффициенты отражения и прохождения моды через разрыв импеданса к их теоретическим значениям, но при этом качество восстановления звукового поля в секции 2, которое определяется значением функционала Φ (36), несколько ухудшилось. Тем не менее, восстановленное звуковое давление на микрофонах находится внутри доверительного интервала измерений. Таким образом, можно утверждать, что результаты извлечения импеданса рассмотренного ЗПК корректны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено систематическое исследование проблем точности извлечения импеданса ЗПК на установках типа “Интерферометр с потоком” в случае отсутствия скользящего потока. Методические исследования на установке ЦАГИ выявили ряд проблем точности измере-

ний, по результатам которых был предложен метод определения доверительного интервала измерений звуковых давлений, основанный на изменении вибрационных характеристик стенок канала установки.

Проведенные исследования показали, что использование методов извлечения импеданса ЗПК, в которых восстановленное звуковое давление точно фиксируется на значениях, измеренных на ряде микрофонов, может приводить к существенным погрешностям из-за высокой чувствительности восстановленного звукового поля к измеренным значениям при наличии доверительного интервала измерений. Например, это методы, основанные на методе Прони.

Извлечение импеданса однослойного образца ЗПК на основе восстановления звукового поля с помощью метода наименьших квадратов позволило подтвердить аналитическую модель распространения звука в прямоугольном канале при наличии скачков импеданса, развитую в работе [47] с помощью метода Винера–Хопфа.

В настоящей работе разработан и реализован метод извлечения импеданса ЗПК при отсутствии потока, основанный на аналитическом методе учета прохождения звуковых мод через стык импеданса, который позволяет с помощью метода наименьших квадратов восстанавливать самосогласованное звуковое поле в рабочей части установки и использует относительно небольшое число микрофонов, установленных как напротив образца, так и за его пределами. В частности, этот метод может быть использован для получения стартовых значений импеданса при реализации численных методов извлечения импеданса ЗПК на этой установке.

Дальнейшие исследования будут направлены на решение задачи извлечения импеданса при наличии потока. Экспериментальные исследования на установке ЦАГИ показали, что волновая структура звукового поля в канале установки явно зависит от профиля скорости потока, и учет этого эффекта требует пересмотра ряда моделей, применяемых до настоящего времени для извлечения импеданса.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РФФИ №18-32-00908 мол_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Watson W.R., Jones M.G., Parrott T.L.* Validation of an impedance eduction method in flow // *AIAA J.* 1999. V. 37. № 7. P. 818–824.
2. *Watson W.R., Tracy M.B., Jones M.G., Parrott T.L.* Impedance eduction in the presence of shear flow // *AIAA Paper.* 2001. P. 2001–2263.
3. *Watson W.R., Tanner S.E., Parrott T.L.* Optimization method for educing variable-impedance liner properties // *AIAA J.* 1998. V. 36. № 1. P. 18–23.
4. *Jones M.G., Parrott T.L., Watson W.R.* Comparison of acoustic impedance eduction techniques for locally-reacting liners // *AIAA Paper.* 2003. P. 2003–3306.
5. *Jones M.G., Watson W.R., Tracy M.B., Parrott T.L.* Comparison of two waveguide methods for educing liner impedance in grazing flow // *AIAA Journal.* 2004. V. 42. № 2. P. 232–240.
6. *Jones M.G., Watson W.R., Parrott T.L.* Design and evaluation of modifications to the nasa langley flow impedance tube // *AIAA Paper.* 2004. P. 2004–2837.
7. *Gallman J.M., Kunze R.K.* Grazing flow acoustic impedance testing for the NASA AST Program // *AIAA Paper.* 2002. P. 2002–2447.
8. *Elnady T., Bodén H.* On semi-empirical liner impedance modeling with grazing flow // *AIAA Paper.* 2003. P. 2003–3304.
9. *Elnady T., Boden H., Elhadidi B.* Validation of an inverse semi-analytical technique to educe liner impedance // *AIAA Journal.* 2004. V. 47. № 12. P. 2386–2844.
10. *Simonich J.C., Morin B.L., Narayanan S., Patrick W.P.* Development and qualification of an in-situ grazing flow impedance measurement facility // *AIAA Paper.* 2006. P. 2006–2640.
11. *Elnady T., Musharraf M., Boden H., Elhadid B.* Validation of an inverse analytical technique to educe liner impedance with grazing flow // *AIAA Paper.* 2006. P. 2006–2639.
12. *Jing X., Peng S., Sun X.* A straightforward method for wall impedance eduction in a flow duct // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 124. № 1. P. 227–234.
13. *Watson W.R., Jones M.G.* Impedance eduction in ducts with higher-order modes and flow // *AIAA Paper.* 2009. P. 2009–3236.
14. *Jones M.G., Watson W.R., Nark D.M.* Effects of flow profile on educed acoustic liner impedance // *AIAA Paper.* 2010. P. 2010–3763.
15. *Piot E., Primus J., Simon F.* Liner impedance eduction technique based on velocity fields // *AIAA Paper.* 2012. P. 2012–2198.
16. *Enghard L., Fischer A., Schulz A., Busse-Gerstengarbe S.* Determination of the impedance for lined ducts with grazing flow // *AIAA Paper.* 2012. 2012–2243.
17. *Соболев А.Ф., Остриков Н.Н., Аношкин А.Н., Пальчиковский В.В., Бурдаков Р.В., Ипатов М.С., Остроумов М.Н., Яковец М.А.* Сравнение импеданса ЗПК, полученного по результатам измерений на двух различных установках с использованием малого числа микрофонов // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника.* 2016. Т. 45. № 2. С. 89–113.
18. *Ланин А.Д.* О распространении звука в волноводе, имеющем прямоугольные канавки на стенке // *Акуст. журн.* 1960. Т. 6. № 2. С. 237–243.
19. *Ланин А.Д.* Сечение рассеяния и поглощения резонатора Гельмгольца в многомодовом волноводе // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45. № 3. С. 376–379.
20. *Ланин А.Д.* О влиянии движения среды на распространение звука в волноводе, имеющем объемные резонаторы на стенке // *Акуст. журн.* 1961. Т. 7. № 4. С. 446–449.
21. *Соболев А.Ф.* Распространение звука в плоском канале при наличии слоистого потока // *Акуст. журн.* 2001. Т. 47. № 2. С. 273–282.
22. *de Prony R.* Essai exp'perimentale et analytique // *J. Ecole Polytech. Paris,* 1 (1795). 24–76.
23. *Jones M.G., Watson W.R., Howerton B.M., Busse-Gerstengarbe S.* Comparative study of impedance eduction methods. Part 2: NASA tests and methodology // *AIAA Paper.* 2013. 2013–2125.
24. *Abom M.* Measurement of the scattering-matrix of acoustical two-ports // *Mechanical Systems and Signal Processing.* 1991. V. 5. № 2. P. 89–104.
25. *Santana L.D., Roeck W., Desmet W.* Two-Port Indirect Acoustic Impedance eduction in presence of grazing flows // *AIAA Paper.* 2011. 2011–2868.
26. *Jones M.G., Watson W.R., Tracy M.B., Parrott T.L.* // Comparison of Two Acoustic Waveguide Methods for Determining Liners Impedance // *AIAA Paper.* 2001. 2001–2266.
27. *Gabard G.* Mode-matching techniques for sound propagation in lined ducts with flow // *AIAA Paper.* 2010. 2010–3940.
28. *Busse-Gerstengarbe S., Bake F., Enghardt L.* Comparative study of impedance eduction methods. Pt. 1. DLR tests and methodology // *AIAA Paper.* 2013. 2013–2124.
29. *Jones M.G., Watson W.R., Howerton B.M., Busse-Gerstengarbe S.* Comparative study of impedance eduction methods. Pt 2. NASA tests and methodology // *AIAA Paper.* 2013. 2013–2125.
30. *Primus J., Piot E., Simon F., Jones M.G., Watson W.R.* ONERA-NASA cooperative effort on liner impedance eduction // *AIAA Paper.* 2013. 2013–2273.
31. *Watson W.R., Jones M.G.* A comparative study of four impedance eduction methodologies using several test liners // *AIAA* 2013–2274.
32. *Zhou L., Bodén H., Busse-Gerstengarbe S., Elnady T.* Comparison of impedance eduction results using different methods and test rigs // *AIAA Paper.* 2014. 2014–2955.
33. *Watson W.R., Gerhold C.H., Jones M.G., June J.C.* Single mode theory for impedance eduction in large-scale ducts with grazing flow // *AIAA Paper.* 2014. 2014–3351.
34. *Zhou L., Bodén H.* Effect of viscosity on impedance eduction and validation // *AIAA Paper.* 2015. 2015–2227.
35. *Watson W.R., Jones M.G.* Impedance eduction in sound fields with peripherally varying liners and flow // *AIAA Paper.* 2015. 2015–2228.
36. *Zhou L., Bodén H.* A systematic uncertainty analysis for liner impedance eduction technology // *J. Sound Vibr.* 2015. V. 356. P. 86–99.

37. Troian R., Dragna D., Bailly C., Galland M.-A., Versaevel M., Wijntjes R. Broadband liner impedance education for multimodal acoustic propagation in the presence of a mean flow // AIAA Paper. 2016. 2016–2725.
38. Schulz A., Bake F., Enghardt L., Ronneberger D. Impedance education of acoustic liners based on four different levels of physical modeling // AIAA Paper. 2016. 2016–2726.
39. Boden H., Zhou L., Cordioli J.A., Medeiros A.A., Spillere A.M.N. On the effect of flow direction on impedance education results // AIAA Paper. 2016. 2016–2727.
40. Jiang H., Huang X. Impedance education with a theoretical model for sound propagation in a grazing impedance tube // AIAA Paper. 2016. 2016–2728.
41. Denayer H., Korchagin V., De Roeck W., Desmet W. Multi-port characterization of a modal filter containing micro-perforated panels // AIAA Paper. 2016. 2016–2850.
42. Sack S., Abom M. Full multi-port characterization of a circular orifice plate // AIAA Paper. 2016. 2016–2851.
43. Farooqui M., Elnady T., Abom M.A. Measurement of perforate impedance with grazing flow on both sides // AIAA Paper. 2016. 2016–2853.
44. Perrey-Debain E., Marechal R., Ville J.M. A spectral boundary integral method for computing the effect of locally and non-locally reacting liners in flow duct applications // AIAA Paper. 2016. 2016–2926.
45. Richter C., Lahiri C., Bake F., Knobloch K., Pongratz R., Redmann D. Impedance and attenuation measurements of acoustic absorbers in a hot environment // AIAA Paper. 2016. 2016–2978.
46. Weng C., Otto C., Peerlings L., Enghardt L., Bake F. Experimental investigation of sound field decomposition with higher order modes in rectangular ducts // AIAA Paper. 2016. 2016–3035.
47. Соболев А.Ф., Яковец М.А. Применение метода Винера–Хопфа для описания распространения звука в цилиндрическом и прямоугольном каналах с потоком при наличии скачка импеданса // Акуст. журн. 2017. Т. 63. С. 583–595.
48. Ostrikov N.N., Sobolev A.F., Yakovets M.A., Ipatov M.S., Palchikovskiy V.V., Pavlogradskiy V.V. Investigation of impedance education accuracy on “interferometer with the flow” test rigs with help of exact solution problem of sound propagation in duct with impedance transition // AIAA Paper. 2017. 2017–3186.
49. Мунин А.Г., Кузнецов В.М., Леонтьев Е.А. Аэродинамические источники шума. М.: Машиностроение, 1981. 248 с.
50. Rienstra S.W. A Classification of Duct Modes Based on Surface Waves // Wave Motion. 2003. V. 37. P. 119–135.
51. Соболев А.Ф. Исследование функции Грина в канале с звукопоглощающей облицовкой при наличии однородного потока // Акуст. журн. 2012. Т. 58. С. 535–548.
52. Соболев А.Ф. Повышение эффективности снижения шума в канале с потоком при наличии звукопоглощающих облицовок // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 3. С. 404–413.
53. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
54. ISO 10534-2:1998(en) Acoustics – Determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes. Pt 2. Transfer-function method.