АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 3, с. 235–241

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СЛОЕ С ДЕФЕКТОМ МАЛОГО ХАРАКТЕРНОГО РАЗМЕРА

© 2020 г. А. О. Ватульян[a, b], *, О. А. Беляк[c], **

[a] *Южный федеральный университет, ул. Большая Садовая 105/42, Ростов-на-Дону, 344006 Россия*

[b] *Южный математический институт ВНЦ РАН, ул. Маркуса 22, Владикавказ, 362027 Россия*

[c] *Ростовский государственный университет путей сообщения, пл. Народного Ополчения 2, Ростов-на-Дону, 344038 Россия*

**e-mail: vatulyan@math.rsu.ru*

***e-mail: o_bels@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.04.2019 г.
После доработки 16.10.2019 г.
Принята к публикации 29.10.2019 г.

Рассмотрены задачи о колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения под действием нагрузки, приложенной на его поверхности. В случае полостей малого относительного размера предложен асимптотический подход к расчету полей. Дана оценка области применимости асимптотического подхода по сравнению с методом граничных интегральных уравнений, а также сравнение с решением, полученным на основе приближения Борна.

Ключевые слова: колебания полуограниченных тел с полостями, асимптотика, граничные интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S0320791920020136

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о колебаниях упругих полуограниченных тел [1–11] достаточно давно привлекают внимание многих исследователей, поскольку анализ динамических процессов весьма важен, например, при оценке динамической прочности элементов тяжелонагруженных транспортных средств, машин и механизмов, в геофизике и горной механике. Отметим, что для изотропных однородных сред динамические процессы в таких структурах хорошо изучены [1, 2], а исследование волновых процессов для сред с более сложной структурой, например, для слоистых [3, 4], функционально-градиентных [5, 6], пористых [7–9] является весьма актуальным и в настоящее время. Одним из важных классов динамических задач теории упругости являются задачи о колебаниях упругих тел с локальными неоднородностями [10–13], такими как полости, включения, трещины. Изучение рассеяния упругих волн на неоднородностях разных типов и форм позволяет устанавливать факт наличия дефекта [14–16], что дает возможность определять тип и положение повреждения в исследуемой структуре. Чаще всего решение таких задач базируется на сведении их к системам граничных интегральных уравнений [1, 2, 11, 12] при помощи фундаментальных решений или матриц-функций Грина, что позволяет снизить размерность исходной задачи на единицу. Такой подход к решению реализован в настоящей работе. При решении динамических задач теории упругости также применяется метод блочных элементов [3] и гибридные численно-аналитические схемы [10, 13]. На основе решения задач о колебаниях сред с дефектами может быть осуществлен расчет амплитудных значений волновых полей, используемых для идентификации дефекта. В настоящей работе реализован подход, основанный на расчете волнового поля в волноводе с полостью на основе метода граничных элементов [17, 18], асимптотического подхода и приближения Борна, часто используемого в акустике [19, 20], и проведено сравнение результатов.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившийся режим колебаний с частотой ω ортотропного упругого слоя толщины h с цилиндрической полостью, не выходящей на его границы, направляющая которой есть гладкая замкнутая кривая l_0 с образующей, параллельной оси Ox_2. Нижняя грань слоя жестко защемлена и совпадает с осью Ox_1, ось Ox_3 направлена перпендикулярно вверх. Оси упругой симметрии материала совпадают с осями системы координат. Колебания в слое вызваны нагрузкой $\mathbf{p}(x_1,t) = \mathrm{Re}(\mathbf{p}(x_1)e^{-i\omega t})$, приложенной к верхней части границы слоя.

Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0,\qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l},\quad i,j = 1,2,3, \tag{1}$$

$$u_i\big|_{x_3=0} = 0,\quad \sigma_{i3}\big|_{x_3=h} = p_i,\quad \sigma_{ij}\,n_j\big|_{l_0} = 0, \tag{2}$$

где ρ — плотность среды, C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных материала, удовлетворяющие соотношениям симметрии и положительной определенности, n_j — компоненты единичного вектора нормали к кривой l_0, внешнего по отношению к области, занятой упругой средой. Замыкает постановку задачи условие излучения волн на бесконечности, при формулировке которого использован принцип предельного поглощения [2].

Исходная задача (1)–(2) в зависимости от типа нагрузки распадается на две: задача об антиплоских колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью (задача 1) и плоская задача о колебаниях слоя с полостью (задача 2). В задаче 1 ненулевой является компонента $u_2(x_1,x_3)$ и в краевой задаче (1)–(2) полагаем $i = 2,\ j = 1,3$. Для задачи 2 отличными от нуля являются компоненты $u_i(x_1,x_3)$, $i = 1,3$ и в краевой задаче (1)–(2) полагаем $i,j = 1,3$.

Основным способом исследования задач 1, 2 является предварительное сведение их к интегральным уравнениям с нерегулярными ядрами на основе идей теории потенциала. Решения краевых задач 1, 2 построены на основе матриц-функций Грина для слоя $U_i^{(m)}(\boldsymbol{x},\xi)$, $i = 1,2,3$, удовлетворяющих однородным граничным условиям на границах, и обобщенной теоремы взаимности [2], где индекс m указывает, что сосредоточенная сила приложена в направлении оси Ox_m, $m = 1,2,3$. Функция Грина для ортотропного слоя в случае задачи 1 приведена в работе [21], а для задачи 2 имеет вид:

$$U_i^{(m)}(\mathbf{x},\xi) = \frac{1}{4\pi^2 C_{33}}\times \iint_\Gamma \frac{\Delta_i^{(m)}}{\Delta}e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}-\xi)}d\alpha_1 d\alpha_3 + S_i^{(m)}(\mathbf{x},\xi),\quad i = 1,3, \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}-\xi) = \alpha_1(x_1-\xi_1)+\alpha_3(x_3-\xi_3),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_1\alpha_1^2+\gamma_5\alpha_3^2-k^2 & (\gamma_5+\gamma_7)\alpha_1\alpha_3 \\ (\gamma_5+\gamma_7)\alpha_1\alpha_3 & \gamma_5\alpha_1^2+\alpha_3^2-k^2 \end{vmatrix},$$
$$\gamma_1 = C_{11}/C_{33},\quad \gamma_5 = C_{55}/C_{33},\quad \gamma_7 = C_{13}/C_{33}. \tag{4}$$

Здесь $\Delta_i^{(m)}$, i, $m = 1,3$ — определители, получающиеся путем замены k-го столбца ($k = 1,2$) в (4) столбцом $g^{(m)} = (\delta_{1m}\delta_{3m})^T$, α_i, $i = 1,3$ — параметры преобразования Фурье, Γ — поверхность, всюду совпадающая с плоскостью R^2, за исключением множества нулей Δ, которые она огибает в соответствии с принципом предельного поглощения. Второе слагаемое в выражении (3) представляет собой некоторую регулярную при $-h+\delta_1 < x_3$, $\xi_3 < h-\delta_1$, $\delta_1 > 0$ добавку, обеспечивающую выполнение однородных граничных условий. Надо отметить, что представление функций Грина для ортотропного слоя в виде однократного интеграла по контуру σ в комплексной плоскости [21, 22] удобно использовать при построении решения задачи (1)–(2) путем сведения ее к интегральным уравнениям с нерегулярными ядрами (6), тогда как при решении задачи в рамках асимптотического подхода использовался вид (3).

Поле перемещений в слое под действием поверхностной нагрузки с носителем на отрезке $[a,b]$ для задач 1, 2 имеет вид:

$$u_m(\xi) = u_m^*(\xi) - \int_{l_0}\sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x},\xi)n_j(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x})dl_x,\quad i,j,m = 1,2,3,$$
$$u_m^*(\xi) = \int_a^b p_i(x_1)U_i^{(m)}(x_1,h,\xi)dx_1, \tag{5}$$

где $\sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x},\xi)$ — компоненты тензора напряжений, выраженные через функции Грина для слоя $U_i^{(m)}(\mathbf{x},\xi)$, $i = 1,2,3$.

Поля перемещений в слое (5) представимы в виде суммы двух слагаемых, первое из которых $u_m^*(\xi)$ — поле смещений в среде без дефекта под действием заданной нагрузки (эталонное поле смещений), второе слагаемое обусловлено наличием полости в слое. Таким образом, на основании соотношения (5) может быть рассчитано поле смещений всюду в слое, если найдено поле смещений на границе полости. В настоящей работе поля смещений на контуре полости рассчитаны на основании двух подходов: метод интегральных уравнений и основанный на нем метод граничных элементов (МГЭ), который может быть использован для полостей любой конфигурации, и асимптотический метод для круговых полостей малого относительного радиуса.

Далее сформулированы системы граничных интегральных уравнений (ГИУ), которые за счет специального выбора матриц-функций Грина содержат операторы лишь по границе полости. Системы ГИУ для задачи 1 ($j = 1,3$; $i,m = 2$) и задачи 2 ($i,j,m = 1,3$) имеют вид:

$$\frac{1}{2}u_m(\mathbf{y}) = u_m^*(\mathbf{y}) - \text{v.p.}\int_{l_0}\sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x},\mathbf{y})n_j(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x})dl_x, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_3) \in l_0, \tag{6}$$

где интеграл по l_0 понимается в смысле главного значения по Коши, а в случае нерегулярной кривой l_0 коэффициент при $u_m(\mathbf{y})$ отличен от ½ и зависит от угла между касательными в особой точке и упругих постоянных материала [22].

В настоящей работе численная реализация систем ГИУ (6) с нерегулярным ядром на основе МГЭ [17, 18] выполнена следующим образом. Гладкая граница аппроксимировалась N-угольником $l = \bigcup_{q=1}^{N} l_q$, где функция $u_m(x_1, x_3)$ постоянна в пределах каждого из элементов l_q, а в качестве узлов выбраны середины соответствующих отрезков. Число ГЭ N выбиралось таким образом, чтобы было не менее 5–6 элементов на длину волны. Таким образом, системы ГИУ (6) сводились к линейным алгебраическим системам относительно $u_{mq} = u_m(y_{1q}, y_{3q})$. Полученные алгебраические системы относительно узловых смещений на контуре хорошо обусловлены, имеют явное диагональное преобладание. Отметим, что МГЭ позволяет рассчитывать поле перемещений на поверхности слоя в случае произвольной формы и размера дефекта. Процедура решения ГИУ (6) достаточно сложна и требует значительной вычислительной работы, однако, если сечение полости представляет собой окружность малого характерного размера, то схему расчета волновых полей можно значительно упростить на основе асимптотического анализа.

Асимптотический подход к решению многопараметрической задачи (1)–(2) о колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью, поперечное сечение которой представляет собой окружность радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{30})$, был реализован в области изменения безразмерных параметров:

$$\varepsilon_1 \ll 1, \quad \varepsilon_* < \varepsilon_2 < 1, \tag{7}$$

где $\varepsilon_1 = r/h$, $\varepsilon_2 = \omega r\sqrt{\rho/C}$, где $C = C_{44}$ для задачи 1, $C = C_{33}$ для задачи 2, а ε_* соответствует частоте запирания, когда в слое нет бегущих волн.

Поля перемещений, всюду в области, занятой упругой средой, отличные от соотношений (5) и полученные на основании обобщенной теоремы взаимности, имеют вид:

$$u_m(\xi) = u_m^*(\xi) - \int_{l_0} K_{im}(\mathbf{x},\xi)\left(u_i(\mathbf{x}) - u_i(\xi)\right)dl_x - \rho\omega^2\int_{S_0} U_i^{(m)}(\mathbf{x},\xi)dS_x u_i(\xi), \quad i,j,m = 1,2,3, \tag{8}$$

$$K_{im}(\mathbf{x},\xi) = \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x},\xi)n_j(\mathbf{x}),$$

где S_0 — плоская область, ограниченная гладкой замкнутой кривой l_0. На основании представления (8) при предельном переходе $\xi \to \mathbf{y} \in l_0$ получена следующая система ГИУ:

$$u_m(y) = u_m^*(y) - \int_{l_0} K_{im}(\mathbf{x},\mathbf{y})\left(u_i(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{y})\right)dl_x - \rho\omega^2\int_{S_0} U_i^{(m)}(\mathbf{x},\mathbf{y})dS_x u_i(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in l_0, i,j,m = 1,2,3. \tag{9}$$

Надо отметить, что система ГИУ (9) имеет регулярные подынтегральные функции в отличие от уравнений (6), а криволинейный интеграл по контуру l_0 существует как несобственный, что позволяет при дискретизации избежать вычисления сингулярных интегралов. Функцию $K_{im}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых соответствует статическому случаю ($\varepsilon_2 = 0$), а второе — некоторая добавка:

$$K_{im}(x_0 + r\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}_0 + r\varsigma) = K_{im}^0(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}_0 + r\varsigma) + K_{im}^1(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}_0 + r\varsigma),$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \{\cos\theta, \sin\theta\}, \quad y = \mathbf{x}_0 + r\varsigma,$$

$$\varsigma = \{\cos\psi, \sin\psi\}, \quad \theta,\psi \in [0, 2\pi].$$

При этом имеют место следующие оценки:

$$K_{im}^1(\theta,\psi) = O(\varepsilon_2^2), \quad K_{im}^0(\theta,\psi) = \varepsilon_1^{-1}F_{im}(\theta,\psi) + O(\varepsilon_1),$$

$$\rho\omega^2\int_{S_0} U_i^{(m)}(\mathbf{x},\mathbf{y})dS_x = O(\varepsilon_2^2),$$

$$F_{im}(\theta,\psi) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{A_{im}(\theta,\varphi)}{A(\varphi)\left(\cos(\theta-\varphi) - \cos(\varphi-\psi)\right)}d\varphi.$$

Выше введены следующие обозначения для задачи 1:

$$A_{22}(\theta,\varphi) = \nu\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi,$$

$$A(\varphi) = \nu\cos^2\varphi + \sin^2\varphi,$$

а для задачи 2:

$$A_{11}(\theta,\varphi) = \left(\gamma_1\gamma_5\cos^3\varphi + G\cos\varphi\sin^2\varphi\right)\cos\theta + \left(\gamma_5\sin^3\varphi - \gamma_5\gamma_7\cos^2\varphi\sin\varphi\right)\sin\theta,$$

$$A_{13}(\theta,\varphi) = \left(\gamma_5\sin^3\varphi - \gamma_5\gamma_7\cos^2\varphi\sin\varphi\right)\cos\theta + \left(\gamma_5\gamma_7\cos^3\varphi - \gamma_5\cos\varphi\sin^2\varphi\right)\sin\theta,$$

$$A_{31}(\theta,\varphi) = \left(\gamma_5\gamma_7\sin^3\varphi - \gamma_5\gamma_1\cos^2\varphi\sin\varphi\right)\cos\theta + \left(\gamma_1\gamma_5\cos^3\varphi - \gamma_5\gamma_7\cos\varphi\sin^2\varphi\right)\sin\theta,$$

$$A_{33}(\theta,\varphi) = \left(\gamma_1\gamma_5\cos^3\varphi - \gamma_5\gamma_7\cos\varphi\sin^2\varphi\right)\cos\theta + \left(\gamma_5\sin^3\varphi + G\cos^2\varphi\sin\varphi\right)\sin\theta,$$

$$A(\varphi) = \gamma_5\sin^4\varphi + G\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \gamma_1\gamma_5\cos^4\varphi,$$

$$G = \gamma_1 - \gamma_5\gamma_7 - \gamma_7^2.$$

Поля смещений на контуре полости l_0 представимы в виде разложения по малому параметру ε_1:

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}_0) + \varepsilon_1(u_{m,1}(\mathbf{x}_0)\cos\theta + u_{m,3}(\mathbf{x}_0)\sin\theta) + O(\varepsilon_1^2), \quad m = 1,2,3. \tag{10}$$

Коэффициенты в разложении (10) вычислены аналитически и для задачи 1 приведены в работах [11, 12], а для задачи 2 имеют вид:

$$\begin{gathered}
u_m(\mathbf{x}_0) = u_m^*(\mathbf{x}_0),\\
u_{1,1}(\mathbf{x}_0) = \left(I_3 u_{3,3}^*(\mathbf{x}_0) - (1 - I_6)u_{1,1}^*(\mathbf{x}_0)\right)\big/\Delta_1,\\
u_{3,3}(\mathbf{x}_0) = \left((1 - I_1)u_{3,3}^*(\mathbf{x}_0) + I_4 u_{1,1}^*(\mathbf{x}_0)\right)\big/\Delta_1,\\
u_{1,3}(\mathbf{x}_0) = \left(-I_2 u_{3,1}^*(\mathbf{x}_0) + (1 - I_5)u_{1,3}^*(\mathbf{x}_0)\right)\big/\Delta_2,\\
u_{3,1}(\mathbf{x}_0) = \left(-(1 - I_2)u_{3,1}^*(\mathbf{x}_0) - (1 - I_5)u_{1,3}^*(\mathbf{x}_0)\right)\big/\Delta_2 J,\\
\Delta_1 = I_1 I_6 - I_3 I_4 - I_1 - I_6 + 1, \quad \Delta_2 = I_2 + I_5 - 1,\\
I_1 = I(\gamma_1\gamma_5 - G, G, 0),\\
I_2 = I(\gamma_5\gamma_7 + \gamma_5, -\gamma_5\gamma_7 - 2\gamma_5, \gamma_5),\\
I_3 = I(\gamma_5\gamma_7 + \gamma_5, -\gamma_5, 0),\\
I_4 = I(\gamma_1\gamma_5 + \gamma_1\gamma_7, -\gamma_1\gamma_5 - \gamma_1\gamma_7, 0),\\
I_5 = I(\gamma_1\gamma_5 + \gamma_5\gamma_7, -\gamma_5\gamma_7, 0),\\
I_6 = I(\gamma_5 - G+, G - 2\gamma_5, \gamma_5).
\end{gathered} \tag{11}$$

Интеграл $I(C_1, C_2, C_3) = \dfrac{C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2 + C_3\Psi_3}{\Lambda}$ вычислен аналитически по теории вычетов, где

$$\begin{gathered}
\Lambda = w_0\sqrt{\frac{w_1^3}{\gamma_5^3}}, \quad \Psi_1 = \sqrt{\left(\frac{w_1}{\gamma_5}\right)^3} + \\
+ w_1\frac{(s_1^2 - 2\gamma_1\gamma_5)(\gamma_5\sqrt{\gamma_1} - s_1 + \gamma_1\gamma_5) - s_1 w_1\gamma_1\gamma_5}{\gamma_1^2\gamma_5^4},\\
\Psi_2 = \frac{w_0}{2\gamma_1\gamma_5^3}\sqrt{4\gamma_5^2 - s_1^2}\sqrt{4\gamma_1\gamma_5^2 - s_1^2},\\
\Psi_3 = \frac{w_0}{\gamma_5^2}w_1(1 + 1\big/\sqrt{\gamma_1}),\\
w_0 = \gamma_1\gamma_5 + \gamma_5 - s_1, \quad w_1 = 2\gamma_5\sqrt{\gamma_1} - s_1,\\
s_1 = \gamma_1 - 2\gamma_5\gamma_7 - \gamma_7^2.
\end{gathered}$$

Таким образом, для задач 1, 2 получено явное асимптотическое представление полей смещений на контуре полости, минуя процедуру дискретизации ГИУ (6) на основе МГЭ. Поля перемещений на поверхности $u_m(\xi_1, h)$, $m = 1,2,3$, построенные в рамках асимптотического подхода, в дальней от дефекта зоне ($x_1 < \xi_1$), имеют вид:

$$u_m(\xi_1, h) = u_m^*(\xi_1, h) - \sum_{p=1}^{M} A_p^{(m)}(u_m(x))e^{i\alpha_{1p}^*\xi_1} + O(e^{-\gamma\xi_1}), \quad \gamma > 0, \quad \xi_1 > x_1 > 0, \tag{12}$$

где M — число распространяющихся волн в слое, α_{1p}^* — корни дисперсионного уравнения. Амплитуды бегущих волн на поверхности слоя для задачи 1 имеют вид [12], а для задачи 2 имеют вид:

$$\begin{gathered}
A_p^{(m)} = \frac{\varepsilon_1^2\pi i\exp(-i\alpha_{1p}^* x_{10})}{2\psi(\alpha_{1p}^*)}\times\\
\times\Big[\Phi_1^{(m)}(x_{30})u_1^*(\mathbf{x}_0) + \Phi_3^{(m)}(x_{30})u_3^*(\mathbf{x}_0) + \\
+ \sum_{k=1,3}\Omega_k^{(m)}(x_{30})u_{1,k}(\mathbf{x}_0) + \Lambda_k^{(m)}(x_{30})u_{3,k}(\mathbf{x}_0)\Big],\\
m = 1,3.
\end{gathered} \tag{13}$$

Выражения $\psi(\alpha_{1p}^*)$, $\Phi_k^{(m)}(x_{30})$, $\Omega_k^{(m)}(x_{30})$, $\Lambda_k^{(m)}(x_{30})$ не приводятся в виду их громоздкости, а $u_{s,k}(\mathbf{x}_0)$, $s,k = 1,3$ заданы формулами (11).

Надо отметить, что в рамках приближения Борна, широко используемого в акустике [19, 20], перемещения на контуре заменяются эталонными полями смещений в точке $\mathbf{x}_0$, поэтому амплитуды полей перемещений на поверхности слоя в этом приближении не учитывают изменяемость полей смещений на контуре. В рамках такого приближения однократного рассеяния поля смещений на контуре полости определяются соотношением (10) при удержании лишь первого члена в разложении полей. В свою очередь, в соотношении (13) для амплитуд отсутствуют слагаемые, содержащие производные от эталонных полей $u_m^*(\mathbf{x}_0)$, $m = 1,3$, а их выражение имеет вид:

$$\begin{gathered}
A_p^{(m)} = \frac{\varepsilon_1^2\pi i\exp(-i\alpha_{1p}^* x_{10})}{2\psi(\alpha_{1p}^*)}\times\\
\times\Big[\Phi_1^{(m)}(x_{30})u_1^*(\mathbf{x}_0) + \Phi_3^{(m)}(x_{30})u_3^*(\mathbf{x}_0)\Big], \quad m = 1,3.
\end{gathered} \tag{14}$$

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

На основании соотношений (5), (12)–(14) построены поля перемещений $\upsilon_m(\xi_1, h) = u_m(\xi_1, h) - u_m^*(\xi_1, h)$, $m = 1,2,3$ на поверхности слоя $x_3 = h$, обусловленные лишь наличием полости. Проведен ряд численных экспериментов по расчету волновых полей на поверхности слоя для случая цилиндрической полости кругового сечения малого относительного размера на основании трех походов: МГЭ, асимптотического подхода и приближения Борна.

В расчетах приняты следующие значения упругих постоянных для диоксида гафния HfO_2 $C_{11} = 502$, $C_{13} = 159$, $C_{33} = 597$, $C_{44} = 78$, $C_{55} = 90$, $C_{66} = 111$ (ГПа), $\rho = 13310$ кг/м^3 [22]. Колебания в слое вызваны сосредоточенной нагрузкой $\mathbf{p} = \{0, -p_0/C_{44}, 0\}$ и $\mathbf{p} = \{0, 0, -p_0/C_{33}\}$ для задач 1 и 2 соответственно, которая приложена в точке $(0, h)$.

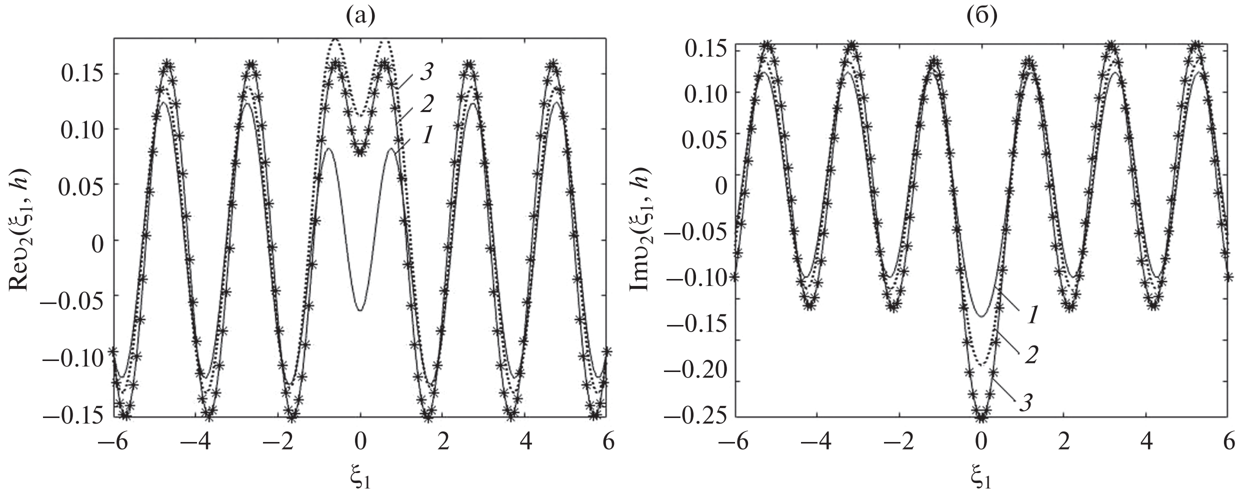

Рис. 1. Действительная и мнимая части поля перемещений $\upsilon_2(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (*1*), асимптотического подхода (*2*), приближения Борна (*3*) для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.24$, $\varepsilon_2 = 0.98$.

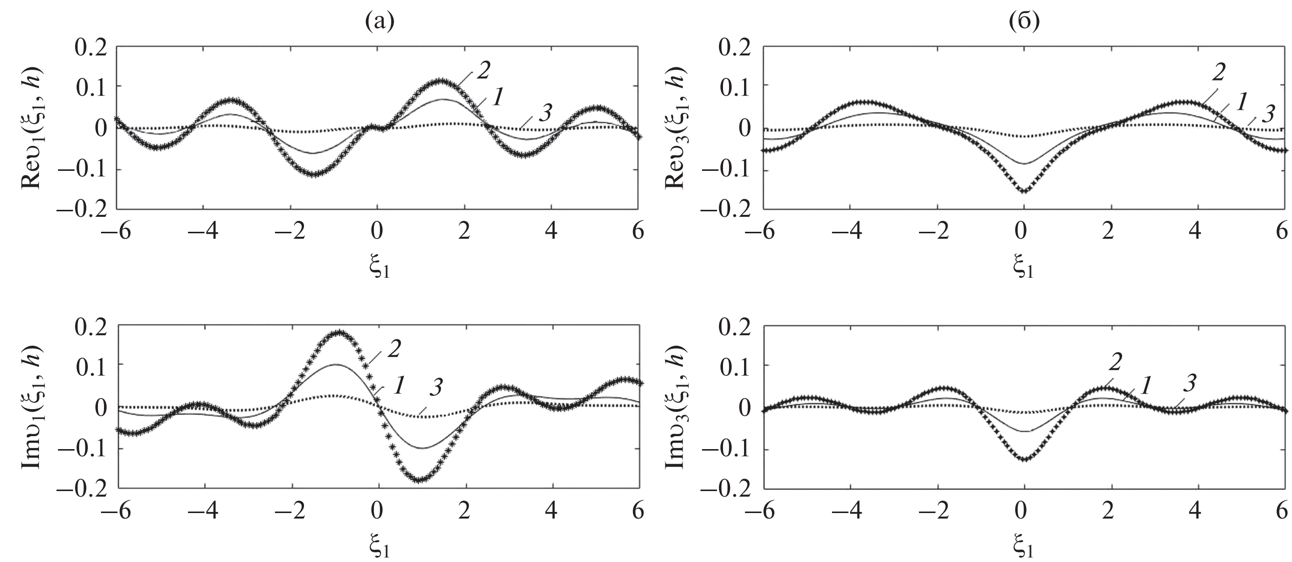

Рис. 2. (а) – Действительная и мнимая части поля перемещений $\upsilon_1(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (*1*), асимптотического подхода (*2*), приближения Борна (*3*) для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.3$. (б) – Действительная и мнимая части поля перемещений $\upsilon_3(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (*1*), асимптотического подхода (*2*), приближения Борна (*3*) для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.3$.

Направляющая цилиндрической полости l_0 – окружность с центром в точке (0, $h/2$). Число граничных элементов $N = 12$. На рис. 1–4 приведены графики полей перемещений на поверхности слоя $\upsilon_m(\xi_1, h)$, $m = 1, 2, 3$, рассчитанных тремя способами для задач 1 и 2, при этом сплошная линия соответствует расчетам по МГЭ, графики полей, полученных на основе асимптотического подхода, изображены сплошной линией с маркером "*" и штриховой линией отмечены поля, полученные в рамках приближения Борна. На рис. 1–2 представлены графики, соответствующие случаю одной распространяющейся моды в слое для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.24$, $\varepsilon_2 = 0.98$ (задача 1) и $\varepsilon_1 = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.3$ (задача 2).

На рис. 3–4 представлены графики полей перемещений на поверхности слоя $\upsilon_m(\xi_1, h)$, $m = 1, 2, 3$ для двух распространяющихся мод при следующих значениях параметров $\varepsilon_1 = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.98$ (задача 1) и $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.4$ (задача 2).

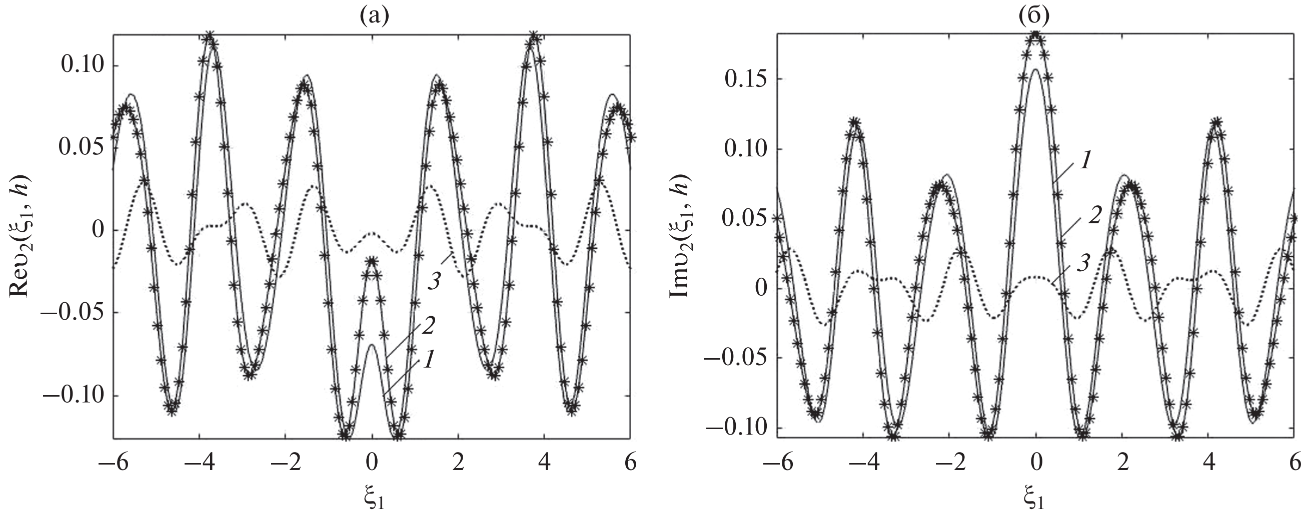

Рис. 3. Действительная и мнимая части поля перемещений $\upsilon_2(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (*1*), асимптотического подхода (*2*), приближения Борна (*3*) для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.98$.

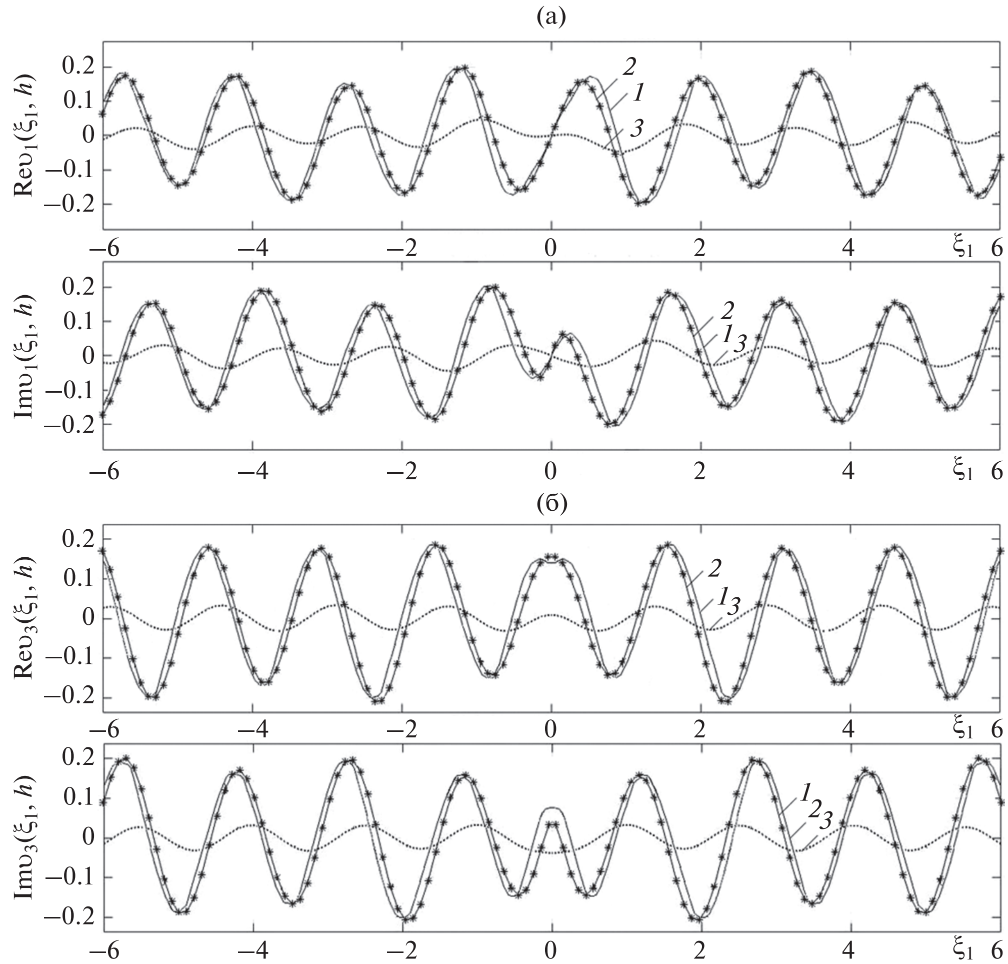

Рис. 4. (а) – Действительная и мнимая части поля перемещений $\upsilon_1(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (*1*), асимптотического подхода (*2*), приближения Борна (*3*) для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.4$. (б) – Действительная и мнимая части поля перемещений $\upsilon_3(\xi_1, h)$, рассчитанные на основе МГЭ (*1*), асимптотического подхода (*2*), приближения Борна (*3*) для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.4$.

ВЫВОДЫ

На основе численных экспериментов определена область корректной работы асимптотического подхода для задач 1 и 2 для среднезаглубленных полостей малого поперечного размера и приближения Борна при расчете волновых полей в дальней зоне. Эта область описывается следующими неравенствами: $\begin{cases} \varepsilon_1 < 0.24 \\ \varepsilon_2 < 1 \end{cases}$ для задачи 1 и $\begin{cases} \varepsilon_1 < 0.15 \\ \varepsilon_2 < 1 \end{cases}$ для задачи 2 (относительное расхождение результатов не превышало 10%). Как видно из графиков на рис. 1, на частотах, соответствующих одной распространяющейся моде в слое, волновое поле в дальней от дефекта зоне, рассчитанное на основе приближения Борна, практически совпадает с полем, рассчитанным на основе МГЭ. На тех частотах, для которых имеются две распространяющиеся моды, приближение Борна значительно отличается от расчетов по МГЭ. В то же время поле на поверхности, рассчитанное на основе асимптотического подхода, отличается от поля, полученного на основе МГЭ, не более, чем на 4%. Отметим, что для задачи 2 для любых частот, соответствующих распространяющим модам в слое, наблюдается качественное и количественное отличие полей перемещений, построенных на основании приближения Борна от полей, рассчитанных на основе МГЭ и асимптотического подхода.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы” при финансовой поддержке государства в лице Министерства науки и высшего образования России (идентификатор проекта RFMEFI60718X0203).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. М.: Наука, 1981. 282 с.
2. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
3. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова В.О.* О колебаниях слоистых упругих сред с рельефной границей // ПММ. 2010. Т. 74. № 6. С. 890–894.
4. *Lei Huang, Jianwen Liang, Chengqing Wu.* A three-dimensional indirect boundary integral equation method for modeling elastic wave scattering in a layered half-space // Int. J. Solids Structures. 2019. V. 169. P. 81–94.
5. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Жанг Ч.* Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.
6. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* О динамике среды с непрерывно изменяющимися по глубине свойствами // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естест. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 46–49.
7. *Gusakov D., Vatul'yan A.* Dispersion properties of ingomogeneousporoelastic layer // ZAMM Zeitschrift fur AngewandteMathematik und Mechanik. 2018. V. 98. № 4. P. 532–541.
8. *Суворова Т.В., Беляк О.А., Усошин С.А.* Волновое поле, генерируемое в слоистом полупространстве движущейся осциллирующей нагрузкой // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 1. С. 53–61.
9. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И.* Влияние пористости на характеристики волн релеевского типа в многослойном полупространстве // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 234–245.
10. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А.* Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 3–12.
11. *Ватульян А.О., Беляк О.А.* К реконструкции малых полостей в упругом слое // Дефектоскопия. Уральское отделение РАН. 2006. № 10. С. 33–39.
12. *Ватульян А.О., Беляк О.А.* О различных способах реконструкции полости в ортотропном слое // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 3(295). С. 181–189.
13. *Falleta S., Monegato G., Scuderi L.* On the discretization and application of two space–time boundary integral equations for 3D wave propagation problems in unbounded domains // Applied Numerical Mathematics. 2018. V. 124. P. 22–43.
14. *Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Иващенко Е.Н.* Исследование обратного рассеивания акустических волн дискретными неоднородностями разных размеров // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 2. С. 203–207.
15. *Буров В.А., Шуруп А.С., Румянцева О.Д., Зотов Д.И.* Функционально-аналитическое решение задачи об акустической томографии по данным от точечных преобразователей // Изв. РАН. Серия физическая. 2012. Т. 76. № 12. С. 1524–1529.
16. *Ватульян А.О.* Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
17. *Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
18. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
19. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
20. *Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 149 с.
21. *Ватульян А.О., Суворова О.А.* Об обратной задаче для упругого слоя с полостью // Экологический вестник научных центров черноморского сотрудничества (ЧЭС). 2005. № 1. С. 10–16.
22. *Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М.* О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. СКНЦ. Сер. естеств. науки. 1989. № 2. С. 81– 85.
23. *Caravaca M.A., Mino J.C., Perez V.J., Casali R.A., Ponce C.A.* Ab initio study of the elastic properties of single and polycrystal TiO_2, ZrO_2 and HfO_2 in the cotunnite structure // J. Phys. Condens. Matter. 2009. V. 21(1). P. 1–11.