

УДК 534.414

## РЕЗИНО-ЖИДКОСТНЫЙ РЕЗОНАТОР

© 2020 г. Л. И. Казаков\*

Редакция “Акустического журнала”, Московский государственный университет, физический факультет, Ленинские горы, Москва, 119991 Россия

\*e-mail: lev-kazakov@rambler.ru

Поступила в редакцию 27.03.2019 г.

После доработки 21.10.2019 г.

Принята к публикации 29.10.2019 г.

Выполнен расчет акустических характеристик резино-жидкостного резонатора, сочетающего свойства пустой полости в резине, резонатора Гельмгольца и водно-воздушного, газового пузыря в вязкоупругой среде и в оболочке, пузырька в жидкости. Уравнение вынужденных колебаний резонатора в поле звуковой волны получено применением принципа наименьшего действия. Вычислена собственная частота резонатора. Рассмотрены следующие механизмы диссипации звуковой энергии: за счет сдвиговой вязкости резины, за счет вязкости жидкости в горле, тепловые потери в воздушной камере, потери на излучение. Приведены экспериментальные данные. Обсуждены возможные применения резонатора.

*Ключевые слова:* акустические резонаторы, принцип наименьшего действия, диссипация звуковой энергии

DOI: 10.31857/S0320791920020033

### ВВЕДЕНИЕ

Резино-жидкостный резонатор (РЖР), показанный в разрезе на рис. 1, включает в себя: полость 1 в резине 2; узкое горло 3; жидкость 4, заполняющую полость и горло; воздушную камеру 5 за горлом. Конструктивные элементы резонатора могут иметь произвольные формы. Необходима лишь малость всех его размеров в сравнении с длиной звуковой волны сжатия в резине, чтобы резонатор можно было считать сосредоточенным. Для удобства расчетов примем полость 1 сферической радиуса  $R$ , горло 3 – цилиндрическим радиуса  $a$  и заполненным жидкостью 4 на высоту  $h$ . Воздушная камера 5 произвольной формы имеет объем  $V_0$ .

По принципу действия РЖР похож на воздушный резонатор Гельмгольца [1, с. 370], а также на водно-воздушный резонатор, предложенный В.С. Григорьевым и исследованный В.И. Сорокиным [2]. Общее у всех этих резонаторов – использование инерционных свойств жидкости в узком горле. Отличием РЖР является его выполнение в вязкоупругой “водоподобной” [1, с. 482] среде (резина, мягкие пластмассы, смолы, битумы и т.п.), в которой сосредоточены его упругость и основные потери. Таким образом, прототипами РЖР служат полость в резине и резонатор Гельмгольца.

### ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕЗОНАТОРА

Теория сферической полости в резине была разработана М.А. Исаковичем, а затем Д.В. Сивухиным [3]. Здесь принят (по совету Ю.М. Сухаревского) иной подход, основанный на применении принципа наименьшего действия Гамильтона–Остроградского [4, с. 10].

Из него следует уравнение движения системы в виде уравнения Лагранжа, которое в случае единственной обобщенной координаты  $x(t)$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F(t), \quad (1)$$

где  $L = T - E$  – функция Лагранжа;  $T$  и  $E$  – кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно;  $F(t)$  – внешняя обобщенная сила, действующая на систему.

Будем считать резину 2 однородной, изотропной, упругой средой, имеющей первый коэффициент Ламе  $\lambda$ , модуль сдвига  $\mu$  и плотность  $\rho$ , а жидкость 4 в резонаторе – несжимаемой, вязкой, с плотностью  $\rho_1$  и кинематической вязкостью  $\nu_1$ . Стенки горла 3 и камеры 5 полагаем жесткими.

Когда длина волны падающего звука много больше размеров резонатора, он испытывает в основном переменное давление всестороннего сжатия, его полость совершает сферически-симмет-

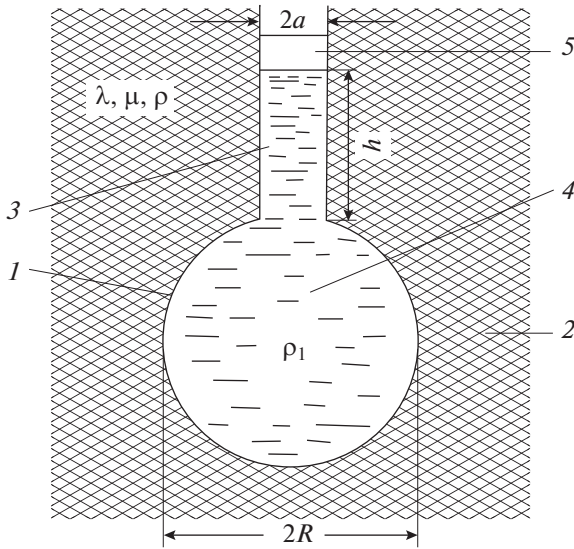


Рис. 1. Резино-жидкостный резонатор: 1 – полость; 2 – резина; 3 – горло; 4 – жидкость; 5 – воздушная камера.

ричные пульсационные колебания и излучает сферическую волну. Мы примем, что узкое горло и малая воздушная камера практически не нарушают сферической симметрии деформаций полости (к тому же, в ней они могут быть и размещены). Ниже учтены только объемные пульсации полости.

Вектор смещения в сферической волне чисто радиальный:

$$\mathbf{U} = U(r, t) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Он определяется волновым уравнением [5, с. 126]

$$\Delta \mathbf{U} = \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2},$$

решение которого для расходящейся волны при гармонических колебаниях  $U(r, t) = U(r)e^{-i\omega t}$  имеет вид:

$$U(r) = \frac{(1 - ik_l r)e^{ik_l r}}{(1 - ik_l R)e^{ik_l R}} \frac{R^2}{r^2} U(R), \quad (2)$$

где  $U(R)$  – комплексная амплитуда смещения стенки полости  $I$ ;  $k_l = \frac{\omega}{c_l}$  – волновое число;  $c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  – скорость распространения в резине продольной звуковой волны.

Формула (2) при  $k_l r \ll 1$  дает для произвольных радиальных смещений зависимость

$$U(r, t) \approx \frac{R^2}{r^2} U(R, t), \quad (3)$$

т.е. резина с любым модулем сдвига здесь подобна несжимаемой жидкости.

Полная кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий резины и жидкости, заполняющей полость резонатора объемом  $V$  и его горло:

$$T(t) = 2\pi\rho \int_R^\infty \dot{U}(r, t)^2 r^2 dr + \frac{\rho_1}{2} \int_{V-V'} \dot{U}_1(r, t)^2 dV + T' + \frac{\pi a^2 h \rho_1}{2} \dot{\xi}^2(t). \quad (4)$$

Здесь  $U_1$  – смещение в жидкости;  $V'$  – малый объем жидкости, примыкающий к устью горла, где формируется присоединенная масса с кинетической энергией  $T'$ , учет которой эквивалентен увеличению высоты  $h$  столбика жидкости в горле на некоторую величину  $\Delta h$ . Последнее слагаемое в (4) – это кинетическая энергия столбика жидкости, где, в силу несжимаемости жидкости,

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{4R^2}{a^2} \dot{U}(R, t) \quad (5)$$

– смещение столбика. Используя (3), (5) и пренебрегая вторым слагаемым в (4) (если считать  $12hR \gg a^2$ ), найдем:

$$T(t) \approx 2\pi\rho R^3 (1 + \alpha) \dot{U}(R, t)^2, \quad (6)$$

где введено обозначение:

$$\alpha = \frac{4R\tilde{h}\rho_1}{a^2\rho}. \quad (7)$$

Эффективное значение высоты жидкости в горле можно оценить:

$$\tilde{h} = h + \Delta h = h + \frac{\pi a}{4\Phi\left(\frac{a}{R}\right)}, \quad (8)$$

где

$$\Phi\left(\frac{a}{R}\right) = \left[ 1 - 1.41 \frac{a}{R} + 0.34 \left(\frac{a}{R}\right)^3 + \dots \right]^{-1} -$$

функция Фока [6, с. 155].

Потенциальная энергия  $E$  системы складывается из упругой сдвиговой энергии  $E_\mu$  резины 2 вблизи полости  $I$  и упругой энергии  $E_g$  воздуха, заключенного в камере 5 (см. рис. 1). Упругая энергия сдвига единицы объема резины равна [5, § 4]

$$\epsilon_\mu = \mu(u_{rr}^2 + u_{\phi\phi}^2 + u_{\theta\theta}^2), \quad (9)$$

где при радиальной деформации резины в сферических координатах [5, с. 12]

$$u_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad u_{\phi\phi} = u_{\theta\theta} = \frac{U}{r}. \quad (10)$$

Учитывая (3), (9), (10), найдем:

$$E_{\mu}(t) = 8\pi\mu R U^2(R, t). \quad (11)$$

Потенциальная энергия воздуха, заключенного в объеме  $V_0$ , равна

$$E_g(t) = \pi a^2 \int_0^{\xi(t)} P_g(t) d\xi, \quad (12)$$

где  $P_g(t)$  — звуковое давления в газе,  $\xi(t)$  — смещение (5) жидкости в горле (положительное значение соответствует смещению внутрь воздушного объема).

Колебания газа в воздушной камере 5 представляют собой политропический процесс, близкий к адиабатическому, а состояние газа приближенно описывается уравнением  $PV^q = \text{const}$ , где  $q \leq \gamma$ ,  $\gamma = c_p/c_v$  — отношение теплоемкостей газа. Поэтому

$$P_g(t) = \frac{qP_0}{V_0} \pi a^2 \xi^2(t),$$

где  $P_0$  — статическое давление в газе. Подставив давление  $P_g(t)$  в (12), получим:

$$E_g(t) = 8\pi R \frac{3qP_0V}{4V_0} U^2(R, t), \quad (13)$$

где  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  — объем полости  $I$ . Объединяя (11) и (13), найдем полную потенциальную энергию системы:

$$E(t) = 8\pi\mu R(1 + \beta)U^2(R, t), \quad (14)$$

где введено обозначение

$$\beta = \frac{3qP_0V}{4\mu V_0}. \quad (15)$$

Используя найденные значения кинетической  $T(t)$  (6) и потенциальной  $E(t)$  (14) энергий, составим функцию Лагранжа системы:

$$L = T - E = 2\pi R^3(1 + \alpha)\dot{U}(R, t)^2 - 8\pi\mu R(1 + \beta)U(R, t)^2, \quad (16)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  представлены формулами (7) и (15). Обобщенной координатой в (16) служит смещение  $U(R, t)$  стенки полости  $I$  резонатора. Подставим функцию  $L$  в уравнение Лагранжа (1), где обобщенной силой следует считать  $-4\pi R^2 P(t)$ ,  $P(t)$  — звуковое давление на резонатор. В результате получим уравнение движения системы:

$$\rho R^2(1 + \alpha) \frac{\ddot{U}(R, t)}{R} + 4\mu(1 + \beta) \frac{U(R, t)}{R} = -P(t). \quad (17)$$

## ДИССИПАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В РЕЗОНАТОРЕ

Потери в резине 2 и в вязкой жидкости 4 обусловлены поглощением энергии в этих материалах за счет внутреннего трения. Поглощение энергии в воздушной камере 5 происходит из-за неполной адиабатичности процесса колебаний газа. Имеются еще потери на излучение сферической волны, рассеянной пульсирующей полостью  $I$  резонатора. Так как окружающую резонатор резину и заполняющую его жидкость можно считать несжимаемыми, то пренебрежем поглощением энергии в этих средах за счет их теплопроводностей и вторых вязкостей.

Для описания потерь используем обобщенную диссипативную функцию Рэлея [4, с. 102]. В нашем случае она имеет вид:

$$\Psi(t) = \frac{X}{2} \dot{U}^2(R, t), \quad (18)$$

где величина  $X = \text{const}$  обусловлена характером преобладающих механических потерь. Функция  $\Psi(t)$  определяет интенсивность диссипации энергии в системе:

$$\frac{d(T + E)}{dt} = -2\Psi(t). \quad (19)$$

Обобщенная диссипативная сила по определению равна

$$F_{\Psi}(t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{U}} = -X\dot{U}(R, t).$$

Ее следует добавить в правую часть уравнения (1). Тогда уравнение движения (17) примет вид:

$$\rho R^2(1 + \alpha) \frac{\ddot{U}(R, t)}{R} + \frac{X}{4\pi R} \frac{\dot{U}(R, t)}{R} + 4\mu(1 + \beta) \frac{U(R, t)}{R} = -P(t). \quad (20)$$

Будем интересоваться гармоническими вынужденными пульсациями резонатора, когда смещение стенки полости  $I$  можно представить в виде  $U(R, t) = U(R)e^{-i\omega t}$ , а звуковое давление на резонатор как  $P(t) = Pe^{-i\omega t}$ , где  $U(R) = U$  и  $P$  — комплексные амплитуды величин. Для этого случая из уравнения (20), учитывая (7) и (15), найдем:

$$\frac{U}{R} = \frac{-P}{4\mu \left(1 + \frac{3qP_0V}{4\mu V_0}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - i\delta\right)}, \quad (21)$$

где

$$\omega_p = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{\mu \left(1 + \frac{3qP_0V}{4\mu V_0}\right)}{\rho \left(1 + \frac{4R\tilde{h}\rho_1}{a^2\rho}\right)}} \quad (22)$$

– собственная круговая частота резонатора;

$$\delta = \frac{\omega X}{16\pi\mu(1 + \beta)R} \quad (23)$$

– затухание резонатора – величина, обратная его добротности  $Q = \frac{1}{\delta}$ . Значение  $\delta$  будет найдено при рассмотрении механизмов диссипации звуковой энергии в резонаторе.

Для вычисления параметра, определяющего поглощение  $X$ , далее используются известные выражения для комплексных упругих параметров резины, плотности жидкости в горле, показателя политропы газа [1, с. 405]. В формуле (21) следует заменить материальные параметры  $\mu$ ,  $\rho_1$ ,  $q$  их комплексными значениями, мнимые части которых содержат информацию о соответствующих механизмах поглощения звуковой энергии. Результат такой замены будет тот же, что и при использовании диссипативной функции (18).

Основные потери в резонаторе – это вязкое поглощение энергии в резине, окружающей полость  $l$ . Модули упругости резины при гармонических колебаниях являются принципиально комплексными и частотно-зависимыми величинами. Более того, их вещественные и мнимые части взаимозависимы, поскольку связаны дисперсионными соотношениями, отражающими принцип причинности [7, §123, 8, §77]. Важнейшим для резины является комплексный динамический модуль сдвига

$$\mu^*(\omega) = \mu(\omega)[1 - i\eta(\omega)], \quad (24)$$

где  $\mu(\omega)$  – модуль сдвига,  $\eta(\omega)$  – коэффициент сдвиговых потерь, причем

$$|\mu^*(\omega)| \ll K, \quad (25)$$

где  $K$  – модуль всестороннего сжатия. Модули сдвига разных резин отличаются друг от друга в десятки и сотни раз и лежат в пределах  $\mu(\omega) = 10^5 \dots 10^8$  Па. Коэффициенты сдвиговых потерь резин обычно порядка  $\eta(\omega) = 0.1 \dots 1.0$ . Модули всестороннего сжатия резин примерно такие же, как у воды, и в диапазоне звуковых и ультразвуковых частот практически от частоты не зависят, т.е. они вещественны. Соотношения (24) и (25), по существу, служат определением вязкоупругих “практически несжимаемых”, “водоподобных” веществ [1, с. 446].

Усредненный по сечению удельный импеданс вязкой жидкости в трубе радиуса  $a$  и длины  $h$  был найден Крендаллом [9, с. 155], [6, с. 166]:

$$Z_h = i\omega\rho_1 h \frac{J_0(\kappa a)}{J_2(\kappa a)}, \quad (26)$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu_1}} \quad (27)$$

– волновое число вязкой волны в жидкости;  $\nu_1$  – кинематическая вязкость жидкости;  $J_0$ ,  $J_2$  – бесселевы функции. В случае идеальной жидкости  $Z_h = -i\omega\rho_1 h$ . Сравнивая это с (26), найдем комплексную плотность вязкой жидкости в горле  $Z$ :

$$\rho_1^*(\omega) = \rho_1'(\omega)[1 + i\delta_1(\omega)] = -\rho_1 \frac{J_0(\kappa a)}{J_2(\kappa a)}. \quad (28)$$

В частных случаях малых и больших длин вязких волн по сравнению с шириной горла выражение (28) упрощается. Так, при  $|\kappa a| > 10$

$$\rho_1^*(\omega) \approx \rho_1 \left( 1 + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\nu_1}{\omega}} + \frac{i}{a} \sqrt{\frac{2\nu_1}{\omega}} \right). \quad (29)$$

Видим, что значение комплексной плотности вязкой жидкости здесь мало отличается от ее значения для идеальной жидкости. Поглощение энергии в этом случае происходит в тонком слое у стенок горла. При  $|\kappa a| < 2$  из выражения (28) следует:

$$\rho_1^*(\omega) \approx \rho_1 \left( \frac{4}{3} + i \frac{8\nu_1}{a^2 \omega} \right).$$

Теперь энергия поглощается по всему сечению горла (как в течении Пуазейля), а величина эффективной плотности за счет вязкости на  $1/3$  больше, чем в случае идеальной жидкости.

Тепловые потери в газе возможны лишь в случае, когда соседние участки газа имеют разную температуру и могут обмениваться теплом. Уравнение переноса тепла в идеальном (подчиняющемся уравнению Менделеева–Клапейрона) невязком газе отличается от случая несжимаемой жидкости [10, с. 277, (50,1)] дополнительным слагаемым:

$$\rho_g c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} = \kappa_g \Delta T, \quad (30)$$

где параметры газа – плотность  $\rho_g$ , удельную теплоемкость  $c_p$ , коэффициент теплопроводности  $\kappa_g$  – можно считать постоянными;  $T$  – температура в газе.

Наиболее интересен случай, когда длина тепловой волны много меньше линейных размеров камеры. Тогда каждый элемент  $dS$  поверхности камеры  $S$  можно считать плоским и рассматривать независимо от других, что позволяет рассчитать потери в камере произвольной формы. Положим  $T = T_0 + dT = T_0 + T(x)e^{-i\omega t}$ ,  $P = P_0 + dP = P_0 + P_g e^{-i\omega t}$ ,

где  $x$  – расстояние от  $dS$  вглубь камеры. Из (30) найдем:

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{i\omega}{\chi_g} \left[ T(x) - \frac{P_g}{\rho_g c_p} \right] = 0, \quad (31)$$

где  $\chi_g = \frac{\kappa_g}{\rho_g c_p}$  – коэффициент температуропроводности газа. Считая стенки камеры абсолютно теплопроводящими, когда  $T(0) = 0$ , получим решение уравнения (31):

$$T(x) = \frac{P_g}{\rho_g c_p} \left( 1 - e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}x} \right).$$

Выделим малый объем  $v$  газа у стенки на расстоянии  $x$  от нее. Пусть  $dv(x,t)$  – изменение этого объема при изменении давления на  $dP$  и температуры на  $dT$ . Дифференцируя уравнение состояния, получим:  $dPv + P_0 dv = m_g(c_p - c_v)dT$ , где  $m_g$  – масса газа. Подставив сюда  $dT$ , найдем:

$$\frac{dv}{dP} = -\frac{v}{\gamma P_0} \left[ 1 + (\gamma - 1)e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}x} \right].$$

Интегрируя по всему объему  $V_0$  камеры, получим дифференциальное уравнение состояния газа при наличии тепловых потерь:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dP} &= -\frac{V_0}{\gamma P_0} - \frac{(\gamma - 1)S}{\gamma P_0} \int_0^\infty e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}x} dx = \\ &= -\frac{V_0}{\gamma P_0} \left[ 1 + \frac{(\gamma - 1)S}{2V_0\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}} + i \frac{(\gamma - 1)S}{2V_0\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} z &= \frac{6V_0}{S} \sqrt{\frac{\omega}{2\chi_g}}, \quad q(z) = \frac{\gamma}{1 + \frac{3(\gamma - 1)}{z}}, \\ \delta_T(z) &= \frac{1}{1 + \frac{z}{3(\gamma - 1)}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда (32) примет вид:

$$\frac{dV}{dP} = -\frac{V_0}{qP_0} (1 + i\delta_T). \quad (34)$$

Из уравнения (34) следует, что для учета тепловых потерь в камере  $S$  резонатора надо в формуле (21) заменить показатель политропы  $q$  его комплексным значением

$$q^*(z) = \frac{q(z)}{1 + i\delta_T(z)} \approx q(z)[1 - i\delta_T(z)]. \quad (35)$$

Потери на излучение найдем, положив в (21), (23)  $\delta = \delta_{\text{rad}}$ ,  $X = X_{\text{rad}}$ , где

$$\delta_{\text{rad}} = \frac{\omega X_{\text{rad}}}{16\pi\mu(1 + \beta)R}. \quad (36)$$

Согласно [1, с. 480] и (18), (19) мощность сферической волны, излучаемая резонатором в окружающую среду, равна:

$$J = 2\bar{\Psi}_{\text{rad}} = \frac{\omega^2 X_{\text{rad}}}{2} |U(R)|^2 = 2\pi\rho k_l R (\omega R)^3 |U(R)|^2.$$

Найденное отсюда значение  $X_{\text{rad}}$  подставим в (36) и получим:

$$\delta_{\text{rad}} = \frac{\omega^2 k_l R}{\omega_p^2 (1 + \alpha)}. \quad (37)$$

Из формул (21), (22) с учетом (37) следует:

$$\begin{aligned} \frac{U}{R} &= \\ &= \frac{-P}{4\mu + \frac{3P_0 V}{V_0} q - \omega^2 \rho R^2 - \frac{4\omega^2 R^3 \tilde{h}}{a^2} \rho_1 - i\omega^2 \rho R^2 k_l R}. \end{aligned} \quad (38)$$

Заменим в (38)  $\mu$ ,  $q$ ,  $\rho_1$  их комплексными выражениями (24), (35), (28), в формуле (22) используем только вещественные части этих выражений. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{U}{R} &= \\ &= \frac{-P}{4\mu(\omega)[1 + \beta(\omega)] \left\{ 1 - \frac{\omega^2 \rho R^2 [1 + \alpha'(\omega)]}{4\mu(\omega)[1 + \beta(\omega)]} - i\delta(\omega) \right\}}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

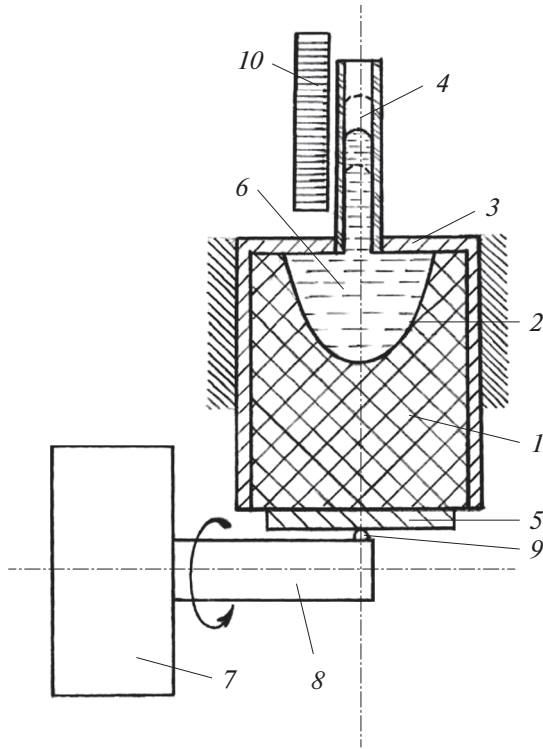
$$\beta(\omega) = \frac{3P_0 V q(\omega)}{4\mu(\omega)V_0}, \quad \alpha'(\omega) = \frac{4R\tilde{h}\rho_1'(\omega)}{\rho a^2}; \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \delta(\omega) &= \frac{1}{1 + \beta(\omega)} \times \\ &\times \left\{ \eta(\omega) + \beta(\omega)\delta_T(\omega) + \frac{\omega^2 \rho R^2 \alpha'(\omega)}{4\mu(\omega)} \times \right. \\ &\left. \times \delta_1(\omega) + \frac{\omega^2 \rho R^2}{4\mu(\omega)} k_l R \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

– затухание резонатора, включающее четыре вида потерь механической энергии. Собственная частота резонатора

$$\omega_p = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)(1 + \beta(\omega_p))}{\rho(1 + \alpha'(\omega_p))}}. \quad (42)$$

Здесь учтена инерция вязкой жидкости в горле, несколько изменяющая ее эффективную плот-



**Рис. 2.** Схема опыта: 1 – резина, Ø 55 мм, высота 50 мм; 2 – полость, эффективный радиус 12 мм; 3 – стакан-держатель, сталь, стенки 5 мм; 4 – горло, стекло,  $2a = 4.5$  мм; 5 – шайба, эбонит, Ø 50 мм, толщина 5 мм; 6 – ртуть; 7 – патрон; 8 – стержень; 9 – выступ; 10 – шкала.

ность [10, с. 127]. Поскольку  $\delta(\omega)$  играет роль лишь вблизи резонанса, в (41) можно считать  $\omega = \omega_p$ .

Жидкость в горле резонатора можно заменить твердым, например, металлическим поршнем с плотностью  $\rho_m$ , как предложено в книге [14, с. 326, рис. 81]. В этом случае в формулах (39)–(42) следует сделать замены:  $\rho_1'(\omega) \rightarrow \rho_m$ ,

$$\delta_1(\omega) \rightarrow \delta_m(\omega) = \frac{2\eta_1}{\omega \rho_m a d},$$

где  $\eta_1 = \rho_1 \nu_1$  – динамическая вязкость жидкости,  $d$  – ширина узкой щели между поршнем и стенками горла. Поршень может быть продолжен вглубь полости 1 для увеличения эффективного значения  $\rho_m$  и дополнительного снижения частоты  $\omega_p$ .

Для РЖР можно пренебречь тепловыми потерями в камере и потерями на излучение по сравнению с вязкими потерями в резине и в жидкости горла. Поэтому формула (41) упростится. Так, при  $|ka| > 10$  согласно (29), (27), (7)

$$\delta(\omega_p) \approx \frac{\eta(\omega_p)}{1 + \beta(\omega_p)} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{(1 + \alpha)|k(\omega_p)a|}.$$

Задачу можно расширить, приняв, что полость 1 резонатора окружена слоем резины 2 конечной толщины  $s$  и помещена в другую вязкоупругую водоподобную среду с плотностью  $\rho_0$  и модулем сдвига  $\mu_0$ . Изменения энергий системы  $T(t)$  (6) и  $E(t)$  (14) сведутся к заменам в формулах (6) и (14):

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \rho_s = \frac{\rho_s + \rho_0 R}{R + s}, \\ \mu &\rightarrow \mu_s = \mu + \frac{R^3}{(R + s)^3} (\mu_0 - \mu). \end{aligned} \quad (43)$$

Это приведет к таким же заменам в формуле (38), где, однако, в последнем слагаемом знаменателя (поскольку теперь излучение происходит во внешнюю среду с плотностью  $\rho_0$  и волновым числом  $k_{10}$ ) нужны другие замены:  $\rho \rightarrow \rho_0$ ,  $k_l \rightarrow k_{10}$ . Все указанные замены следует выполнить в итоговых формулах (39)–(42), при этом (41) примет вид:

$$\begin{aligned} \delta_s(\omega) &= \frac{1}{1 + \beta_s(\omega)} \times \\ &\times \left\{ \eta_s(\omega) + \beta_s(\omega) \delta_T(\omega) + \frac{\omega^2 \rho_s R^2 \alpha'(\omega)}{4\mu_s(\omega)} \times \right. \\ &\times \left. \delta_1(\omega) + \frac{\omega^2 \rho_0 R^2}{4\mu_s(\omega)} k_{10} R \right\}, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_s(\omega) &= \\ &= \frac{\mu(\omega)\eta(\omega) + \frac{R^3}{(R + s)^3} [\mu_0(\omega)\eta_0(\omega) - \mu(\omega)\eta(\omega)]}{\mu_s(\omega)}. \end{aligned} \quad (45)$$

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА

Как следует из формулы (42), собственная частота РЖР может быть в десятки и сотни раз меньше, чем у пустой полости в резине. Это подтверждает демонстрационный опыт, схема которого показана на рис. 2.

Резиновый цилиндр 1 с полостью 2 плотно вдавлен до упора в стакан 3, в центре которого над полостью 2 имеется отверстие, куда плотно вставлена стеклянная трубка 4, выполняющая роль горла резонатора. Снизу к резине приклеена эбонитовая шайба 5. Полость 2 и частично горло 4 заполнены ртутью 6 (при 20°C  $\rho_1 = 13.6 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_1 = 1.15 \times 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с). Ртуть выбрана исключительно из-за стремления получить при заданных размерах возможно большее снижение частоты  $\omega_p$ . К тому же, малая кинематическая вязкость ртути позволяет пренебречь вязкими потерями в горле 4.

В патроне 7 токарного станка зажат стержень 8 с небольшим (~2 мм) боковым выступом 9 на

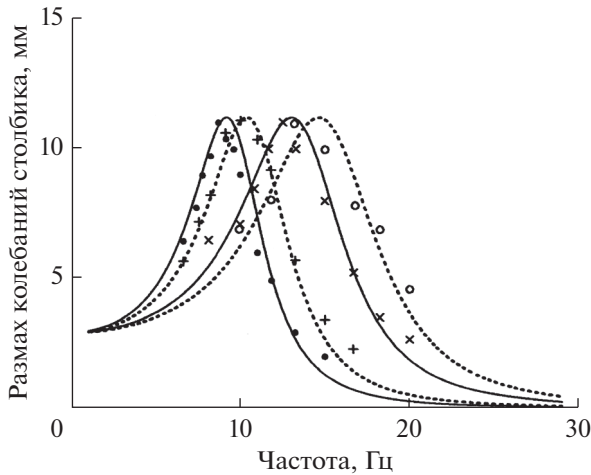


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики РЖР при разных значениях высоты столбика ртути в горле: ● —  $h = 58.5$ ; + —  $h = 43$ ; × —  $h = 28$ ; ○ —  $h = 19$  мм.

конце. Стакан—держатель 3 жестко закреплен в резцедержателе суппорта станка так, что оси стакана и стержня пересекаются. При вращении патрона 7 выступ 9 периодически бьет по центру шайбы 5 и возбуждает резонатор. При этом полость 2 РЖР пульсирует с частотой оборотов, на что указывают колебания столбика ртути в горле 4. Размах этих колебаний измерялся визуально по миллиметровой шкале 10 с точностью  $\sim \pm 0.5$  мм. Обороты патрона устанавливались либо дискретно, либо плавно путем торможения патрона куском пенопласта. Контролировались обороты стробоскопом.

На рис. 3 приведены измеренные амплитудно-частотные характеристики РЖР при следующих значениях высоты столбика ртути в горле:  $h = 58.5, 43, 28, 19$  мм. По формуле (8) найдем:  $\Delta h = 1.3$  мм. При заданных параметрах формула (42) принимает вид:

$$\omega_p = \frac{a}{R} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho_1 R h}}. \quad (46)$$

где  $\tilde{\mu}(\omega) = \mu(\omega)[1 + \beta(\omega)]$ ,

$$\omega_p = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4\mu(\omega_p) + 3P_0 q(\omega_p)}{\rho}}. \quad (47)$$

Эти формулы впервые получены в работе [15]. При малых значениях  $\mu$ , на глубинах более 200 м  $3P_0 q \gg 4\mu$ . Выражение (47) для резонансной ча-

стоты радиальных адиабатических ( $q \rightarrow \gamma$ ) колебаний газового пузырька в упругой среде получено также в работе [16].

Модуль сдвига резины неизвестен, но может быть оценен с помощью формулы (46) по измерениям. Результаты вполне правдоподобны:  $(0.820, 0.809, 0.838, 0.804) \times 10^6$  Па, разброс небольшой. Среднее значение  $\mu_{cp} = 0.818 \times 10^6$  Па. Значение собственной частоты пустой полости при таком модуле сдвига и  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup> составляет

$f_p = \frac{1}{\pi R} \sqrt{\frac{\mu_{cp}}{\rho}} = 692$  Гц. Таким образом, частота резонатора снижена от 47 до 80 раз. Фактически это снижение еще большее, поскольку с частотой зависимость  $\mu(\omega)$  возрастает. Так как согласно (46)  $f_p \sim a$ , то уменьшением диаметра горла можно получить дальнейшее снижение собственной частоты РЖР.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В РЖР объединены свойства нескольких акустических резонаторов: полости в резине, газового пузырька в вязкоупругой среде и в оболочке, пузырька в жидкости, резонаторов Гельмгольца и водно-воздушного. Поэтому известные основные соотношения для этих резонаторов можно получить из общих выражений (39)–(45) для РЖР путем предельных переходов. Так, положив  $\rho_1 \rightarrow 0$ ,  $v_1 \rightarrow 0$ ,  $P_0 \rightarrow 0$ , получим для пустой полости в безграничной резине:

$$\frac{U}{R} = \frac{-P}{4\mu(\omega) \left[ 1 - \frac{\omega^2 \mu(\omega_p)}{\omega_p^2 \mu(\omega)} - i\eta(\omega) \right]}, \quad \omega_p = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{\mu(\omega_p)}{\rho}}.$$

Потерями на излучение здесь можно пренебречь, поскольку

$$k_l(\omega_p)R = \frac{\omega_p R}{c_l} = 2 \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \ll \eta.$$

Если полость в вязкоупругой среде заполнена газом (например, плавательный пузырек рыбы), то, считая в общих формулах  $\rho_1 = 0$ ,  $V_0 = V$ , найдем:

$$\frac{U}{R} = \frac{-P}{4\tilde{\mu}(\omega) \left\{ 1 - \frac{\omega^2 \tilde{\mu}(\omega_p)}{\omega_p^2 \tilde{\mu}(\omega)} - i \left[ \frac{\eta(\omega) + \beta(\omega)\delta_T(\omega)}{1 + \beta(\omega)} + \frac{\omega^2 \tilde{\mu}(\omega_p)}{\omega_p^2 \tilde{\mu}(\omega)} k_l R \right] \right\}},$$

Значение резонансной частоты объемных колебаний газового пузырька в вязкоупругой оболочке, помещенного в другую вязкоупругую среду, легко найдем из формулы (47) с помощью замен (43):

$$\omega_p = \frac{1}{R} \sqrt{\left\{ 4\mu(\omega_p) + 3P_0q(\omega_p) + 4[\mu_0(\omega_p) - \mu(\omega_p)] \frac{R^3}{(R+s)^3} \right\} \frac{R+s}{\rho s + \rho_0 R}} \quad (48)$$

Для рассматриваемого случая эта формула (дополненная учетом поверхностных натяжений на границах сред) впервые получена в работе [17, (14)].

Собственную частоту резинового “мячика” в воде найдем из (48), положив  $\mu_0 = 0$ :

$$\omega_p = \frac{1}{R} \times \sqrt{\left\{ 4\mu(\omega_p) \left[ 1 - \frac{R^3}{(R+s)^3} \right] + 3P_0q(\omega_p) \right\} \frac{R+s}{\rho s + \rho_0 R}}$$

откуда при  $P_0 = 0$ ,  $s = \infty$  следует резонансная частота пустой полости в резине, а при  $s = 0$  – известная формула Минаэрта для газового пузырька в воде. Газовый пузырек в воде соответствует случаю:  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\rho_1 \rightarrow 0$ ,  $V_0 = V$ ,  $\rho \rightarrow \rho_0$ ,  $c_l \rightarrow c_0$ . Для него имеем:

$$\frac{U}{R} = \frac{-P}{3qP_0 \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - i \left( \delta_T(\omega) + \frac{\omega^2}{\omega_p^2} k_0 R \right) \right]},$$

$$\omega_p = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3qP_0}{\rho_0}}$$

– формула Минаэрта, где  $k_0 = \omega/c_0$ ;  $c_0$  – скорость звука в воде;  $\rho_0$  – плотность воды. В общем случае для  $q$  и  $\delta_T$  здесь следует использовать формулы Девина [11], [12], [13, с. 146].

Для резонаторов Гельмгольца и водно-воздушного, положив в формулах (39)–(42)  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\rho_1 = \rho = \rho_0$ ,  $c_l = c_0$ ,  $\alpha \gg 1$ , где  $\rho_0$  – плотность воздуха (воды),  $c_0$  – скорость звука в воздухе (в воде), и учитывая (5), найдем:

$$\xi_{\text{ср}} = \frac{P}{\rho_0 \tilde{h} \omega_p^2 \left\{ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - i \left[ \delta_T(\omega) + \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \left( \delta_1(\omega) + \frac{k_0 a^2}{4\tilde{h}} \right) \right] \right\}}$$

– комплексная амплитуда среднего по сечению горла смещения жидкости;

$$\omega_p = a \sqrt{\frac{\pi q P_0}{\rho_0 \tilde{h} V_0}}$$

Согласно Л.Я. Гутину для открытого в среду конца горла без фланца (поршень без экрана) можно считать  $\tilde{h} = h + \frac{2a}{\pi}$  [6, с. 154].

Резино-жидкостные акустические резонаторы могут найти применение в низкочастотных звукогасящих устройствах. Например, с их помощью можно изготовить широкополосное звукопоглощающее покрытие для измерительных гидроаку-

стических бассейнов со звукопроницаемыми либо имеющими инерционный импеданс стенками. Оно может состоять из совокупности одиночных, настроенных на разные частоты резонаторов в оболочках, точно размещенных на защищаемой поверхности и разделенных водными промежутками. Последние устраняют упругое взаимодействие резонаторов, что дает возможность увеличить их объемное содержание в поглотителе. Такая конструкция позволит полнее использовать резину или экономить ее расход.

Для резонаторов покрытия оптимальное значение затухания  $\delta(\omega_p) \approx 1$ . Регулировать величину  $\delta(\omega_p)$  можно подбором вязкости жидкости. Наиболее предпочтительны для РЖР полиметилсилоксановые жидкости (ПМС) с огромным диапазоном вязкостей. Они обладают для данного применения спектром уникальных свойств: не воздействуют на резины; практически не испаряются; имеют аномально низкую (сравнительно с другими маслами) температурную зависимость вязкости; допускают получение жидкости с необходимой вязкостью путем простого смешивания ПМС разных сортов. Возможно также использование РЖР в одиночных избирательных поглотителях звука и вибраций. Малые волновые размеры РЖР этому способствуют.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исакович М.А.* Общая акустика. Учебное пособие. М.: Наука, 1973. 495 с.
2. *Сорокин В.И.* Исследование водно-воздушных резонаторов // Акуст. журн. 1958. Т. 4. № 2. С. 187–195.
3. *Сивухин Д.В.* Дифракция плоской звуковой волны на сферической полости // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 78–88.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. 4-е изд., исправл. М.: Наука, 1988. 216 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. 4-е изд., исправл. и дополн. М.: Наука, 1987. 248 с.
6. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960. 336 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. 3-е изд., дополн. М.: Наука, 1976. 584 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., перераб. и дополн. М.: Наука, 1982. 623 с.
9. *Крендалл И.* Акустика. М.: КУБУЧ, 1934.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1986. 736 с.



11. *Pfriem H.* Zur thermischen Dämpfung in kugelsymmetrisch schwingen den Gasblasen // *Akustische Zeitschrift*. 1940. J. 5. S. 202–212.
12. *Devin Ch., Jr.* Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water // *J. Acoust. Soc. Am.* 1959. V. 31. № 12. P. 1654–1667.
13. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
14. *Лэмб Г.* Динамическая теория звука / Пер. с англ. под ред. Исаковича М.А. М.: ГИФМЛ, 1960. 372 с.
15. *Андреева И.Б.* О рассеянии звука газовыми пузырями рыб в глубоководных звукорассеивающих слоях океана // *Акуст. журн.* 1964. Т. 10. № 1. С. 20–24.
16. *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* Особенности поведения газовых пузырьков в биологической ткани под действием звука // *Акуст. журн.* 1998. Т. 44. № 3. С. 293–298.
17. *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* Колебания газовых пузырьков в упругих средах // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45. № 5. С. 603–609.