

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

УДК 544.638+534.1

### О МЕТОДЕ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОСНОВАННОМ НА ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ

© 2020 г. Б. П. Шарфарец<sup>а, \*</sup>, В. Е. Курочкин<sup>а, \*\*</sup>, В. А. Сергеев<sup>б,</sup> Ю. В. Гуляев<sup>с</sup>

<sup>а</sup>Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,  
ул. Ивана Черных 31–33, Санкт-Петербург, 198095 Россия

<sup>б</sup>АО “АКВАМАРИН”, Баррикадная ул. 17, Санкт-Петербург, 198097 Россия

<sup>с</sup>Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской академии наук,  
ул. Моховая 11, стр. 7, Москва, 125009 Россия

\*e-mail: sharb@mail.ru

\*\*e-mail: lavrovas@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.09.2019 г.

После доработки 16.12.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Предложены в линейном и нелинейном приближении (ламинарный режим) физическая и математическая модели для описания механизма функционирования нового вида акустического преобразователя. Кратко даны сведения о таком электрокинетическом явлении, как электроосмос. Приведены необходимые уравнения для описания акустических полей, вызываемых электрокинетическими явлениями: наличием двойного электрического слоя и приложенного суммарного электрического поля, состоящего из постоянного поля и поля, несущего акустическую информацию. Уравнения рассматриваются для жидкости в круговом цилиндрическом капилляре применительно к расчету гидродинамики стационарного электроосмотического процесса и гармонического акустического процесса. Теоретически, на вычислительной модели и экспериментально показано, что учет нелинейности стационарного процесса приводит, в отличие от линейного стационарного процесса, к перекачке энергии постоянного электрического поля в акустическое поле, вызываемого переменным электрическим полем. Полученные результаты при некоторых ограничениях верны для широкого класса пористых структур. Экспериментально для бумажной мембраны в качестве капиллярно-пористой структуры с помощью накачки получено усиление первой гармоники акустического давления от 5.9 до 28 раз для различных значений амплитуды переменного электрического поля. Полученные в работе теоретические и экспериментальные результаты позволяют решить приоритетную научно-техническую проблему проектирования и создания акустических излучателей нового типа.

**Ключевые слова:** электроакустическое преобразование, линейный и нелинейный режим течения жидкости, электрокинетические явления, гидродинамика электроосмоса, акустика электроосмоса, накачка энергии

**DOI:** 10.31857/S0320791920030053

#### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложен оригинальный способ электроакустического преобразования, основанный на подходе, заключающемся в том, что к пористому телу, заполненному жидкостью или газом, подается сумма постоянного напряжения и переменного напряжения, связанного с амплитудой акустического сигнала. Этот подход отличается от стандартного электрокинетического преобразования, основанного на явлении электроосмоса и изложенного, например, в работе [2] или обзорах [3, 4] (см., также библиографию в этих работах), тем, что существенную роль в элек-

троакустическом преобразовании играет обязательное наличие наряду с переменной (акустической) составляющей прикладываемого к жидкости напряжения еще и постоянного напряжения (называемого в дальнейшем напряжением накачки). Причиной накачки, как будет показано в работе, является нелинейность возникающей гидродинамической части задачи. Аналогичные явления возникают при изучении нелинейных течений жидкости вблизи диэлектрических и идеально поляризованных частиц при воздействии на них внешнего электрического поля [5],

но в этом случае нелинейность возникает в электрической части физической модели проблемы.

Отметим, что отдаленно похожие процессы в смысле одновременного воздействия постоянных и переменных магнитных или электрических полей описаны в работах [6, 7]. Так, при создании магнитогидродинамического генератора псевдозвука, описанного в работе [6], показано, что при возбуждении в некотором объеме периодических движений проводящей жидкости, помещенной в постоянное магнитное поле, при прохождении через эту жидкость переменного тока возникают звуковые волны вследствие отражения от границ объема псевдозвуковых течений, возбуждаемых МГД генератором. Течение жидкости при этом рассмотрено в рамках линейной системы уравнений Эйлера. В работе [7] описан вибрационный преобразователь, вынуждающее усилие в котором создается системой катушек с переменным током, магнитное поле которых поляризуется полем постоянных магнитов и взаимодействует с индуцированными в системе токами.

Приведенное в [1] описание принципа действия преобразователя никак не увязано с электрогидродинамикой (ЭГД), предметом которой является данная проблематика. Кроме того, никак не учтено такое электрокинетическое явление, как электроосмос, неизбежно возникающий при подаче разности потенциалов к пористому телу, наполненному жидкостью, где на границе раздела фаз имманентно присутствует двойной электрический слой (ДЭС), в котором нарушается электронейтральность жидкости.

В настоящей работе подробно излагаются детали, предложенных кратко в [8] физической и математической моделей, описывающих принцип действия этого электроакустического преобразователя на примере одиночного цилиндрического капилляра, заполненного жидкостью. Уравнения движения жидкости здесь рассматриваются и на основе линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса, изложенной в [8], и на основе ее нелинейной версии применительно к ламинарному движению жидкости.

Учитывая пограничный характер научных явлений, лежащих в основе принципа действия рассматриваемого акустического преобразователя, целесообразно изложить основные положения такой неакустической дисциплины, как электроосмос.

## СТАЦИОНАРНЫЙ ЭЛЕКТРООСМОС

К настоящему времени теория стационарного электроосмоса устоялась и опубликована в солидном количестве источников, из которых упомянем работы [9–11]. Электроосмос является одним

из электрокинетических явлений, т.е. явлений, происходящих в системах, содержащих капилляры или пористые мембраны, размещенные в электролите при наложении электрического поля, и обратных им эффектов [12, с. 534]. Основную роль в электрокинетических явлениях играет ДЭС, формирующийся на границе раздела фаз, одна из которых должна обязательно быть жидкой или газообразной, и его поляризация. Таким образом, электроосмос – это движение жидкости (газа) через капилляры или пористые среды при наложении внешнего электрического поля. В силу различных причин безотносительно к тому, присутствует или нет внешний электрический потенциал, на поверхности раздела твердой и жидкой (газообразной) фаз образуется ДЭС (см., например, [9, глава 1; 10, глава 7]). На поверхности твердой фазы образуется слой потенциал-определяющих ионов одного знака, имеющий молекулярные размеры. Вследствие законов электростатики противоионы в жидкости при контакте с твердой фазой притягиваются к твердой границе; ионы жидкости, заряженные одноименно заряду границы, отталкиваются от границы. Часть противоионов (адсорбционная плотная, неподвижная часть ДЭС) остаются неподвижными даже при движении жидкости. Остальные противоионы и коионы остаются подвижными и образуют подвижную (диффузную) часть ДЭС. Область, где касаются адсорбционный и диффузный слои, называется поверхностью скольжения, которая получается несколько отодвинутой от реальной границы. Диффузный слой имеет толщину, равную дебаевской длине  $\lambda_D$ . Подвижная часть ДЭС за небольшое время переходного процесса приходит к стационарной концентрации. Концентрации противоионов и коионов в ДЭС и значение образовавшегося распределения электрического потенциала  $\phi$  в ДЭС связаны между собой распределением Больцмана [9, с. 15]. Потенциал  $\phi$  вектора электрической напряженности является электрической характеристикой ДЭС. Выделяют несколько характерных потенциалов, важнейшим из которых является электрокинетический потенциал (дзета-потенциал или  $\zeta$ -потенциал; во избежание путаницы в обозначениях с динамической вязкостью дзета-потенциал далее обозначаем  $\xi$ ), соответствующий поверхности скольжения. Часть диффузного слоя не является электронейтральной, что в конечном итоге и приводит к движению жидкости под воздействием стороннего электрического поля, т.е. к явлению электроосмоса.

В ДЭС формируется электростатическое поле, электрический потенциал  $\phi$  которого при задан-

ном распределении свободных зарядов удовлетворяет уравнению Пуассона [9, с. 16; 10, с. 220]

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{el}}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (\text{в СИ}), \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho_{el}}{\varepsilon} \quad (\text{в СГСЭ}). \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная;  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $\rho_{el}$  – объемная плотность электрического заряда. В случае, когда тепловая энергия превосходит электрическую энергию [10, с. 97; 11, с. 147]  $Ze\zeta \ll k_B T$  ( $Z$  – заряд иона в единицах заряда протона;  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура;  $e$  – элементарный электрический заряд (заряд протона)), уравнение (1) переходит в линейное уравнение Дебая–Хюккеля

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_D^2} \varphi(\mathbf{r}). \quad \text{Длина Дебая определяется выра-$$

жением [10, с. 97; 11, с. 147]  $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T}{2(Ze)^2 c_0}}$ , где  $c_0$  – равновесная концентрация ионов вне ДЭС. Решение  $\varphi(\mathbf{r})$ , полученное из уравнения Дебая–Хюккеля, позволяет рассчитать объемную плотность электрического заряда  $\rho_{el}$  из уравнения (1), например, в СИ в виде  $\rho_{el} = -\varepsilon\varepsilon_0 \Delta\varphi$ .

### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

Поскольку здесь рассматриваются акустические процессы, закон сохранения импульса принимаем в виде уравнения Навье–Стокса для движения вязкой сжимаемой однородной жидкости [13, с. 73]

$$\rho_\Sigma \left( \frac{\partial \mathbf{v}_\Sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}_\Sigma \nabla) \mathbf{v}_\Sigma \right) = -\nabla p_\Sigma + \eta \Delta \mathbf{v}_\Sigma + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \mathbf{v}_\Sigma + \rho_{el} \mathbf{E}_\Sigma. \quad (2)$$

В (2) учтено внешнее электрическое поле [10, с. 309; 11, с. 141] напряженностью  $\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}$ , где постоянное электрическое поле  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  модулируется коллинеарным ему электрическим вектором  $\mathbf{E}$ , зависящим от времени ( $\mathbf{E} \times \mathbf{E}_0 = 0$ ). В (2)  $\eta$ ,  $\zeta$  – динамическая и объемная вязкости соответственно;  $p_\Sigma$  – давление,  $\mathbf{v}_\Sigma$  – вектор скорости в среде;  $\rho_\Sigma$  – плотность среды. Величины, помеченные индексом  $\Sigma$ , обозначают поля, возбужденные полем  $\mathbf{E}_\Sigma$ . Пометим поля, вызванные электрическим полем  $\mathbf{E}_0$ , нижним индексом 0:  $p_0$ ,  $\mathbf{v}_0$ . Кроме того, обозначим через  $\rho_0$  невозмущенное значение плотности, имеющее место в том числе и при воздействии только стационарного

поля  $\mathbf{E}_0$ . Соответственно, акустические поля обозначим через  $\mathbf{v}$ ,  $p$ .

Если принять допущение о том, что скорости процессов  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}$  соответствуют малым значениям числа Рейнольдса  $Re \ll 1$ , то в (2) можно пренебречь конвективным членом [13, с. 89], что делает уравнение (2) линейным

$$\rho_\Sigma \frac{\partial \mathbf{v}_\Sigma}{\partial t} = -\nabla p_\Sigma + \eta \Delta \mathbf{v}_\Sigma + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \mathbf{v}_\Sigma + \rho_{el} \mathbf{E}_\Sigma. \quad (3)$$

Поскольку в этом случае справедлив принцип суперпозиции, то можно записать  $\rho_\Sigma = \rho_0 + \rho$ ,  $p_\Sigma = p_0 + p$ ,  $\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$ .

При описании стационарного электроосмоса пользуются усеченной версией уравнения (3) [9, с. 33; 10, с. 220]

$$\eta \Delta \mathbf{v}_0 + \rho_{el} \mathbf{E}_0 = 0, \quad (4)$$

которое формально следует из (3) при выполнении условий  $\nabla p_0 = 0$ ,  $\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = 0$ . Уравнение (4) описывает стационарное электроосмотическое течение под воздействием постоянного электрического поля  $\mathbf{E}_0$  при рассмотрении баланса электрических сил и сил трения.

Далее рассматриваем случай кругового цилиндрического капилляра. Отличным от нуля решением (4) при условии  $\mathbf{v}_0|_{r=a} = 0$  для капилляра с осью, совпадающей с  $Oz$ , и  $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$ , является составляющая  $v_{0z}(r)$  скорости  $\mathbf{v}_0$  [10, с. 220; 11, с. 161]

$$v_{0z}(r) = E_0 \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta} \zeta \left( 1 - \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} \right). \quad (5)$$

Здесь  $a$  – радиус поверхности скольжения;  $I_0$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Асимптотика (5) при  $r \rightarrow 0$  называется электроосмотической скоростью и равна  $U_0(r) = E_0 \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta} \zeta = \text{const}$ . Известно, что при выполнении соотношения  $\lambda_D \ll a$ , практически для всех  $r \in [0, a]$  будет справедливо соотношение  $v_{0z}(r) \approx U_{eo}$  [11, с. 162].

На долю возмущенного решения приходится остающаяся часть уравнения (3), которое с точностью до акустических величин второго порядка малости имеет следующий вид

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \mathbf{v} + \rho_{el} \mathbf{E}. \quad (6)$$

К уравнению движения (6) необходимо добавить линеаризованное уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (7)$$

Принимая среду баротропной, выписываем уравнение состояния в линеаризованном виде

$$p = \left( \frac{\partial p_\Sigma}{\partial \rho_\Sigma} \Big|_{\rho_\Sigma = \rho_0} \right) \rho = c^2 \rho, \quad (8)$$

где  $c$  – скорость звука в среде. Система (6)–(8) представляет собой замкнутую систему линейных уравнений акустики для однородной, вязкой, баротропной среды.

Принимая представление вектора скорости  $\mathbf{v}$  в виде суммы потенциальной  $\mathbf{v}_l$  и соленоидальной  $\mathbf{v}_t$  частей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{v}_l = \nabla \Phi, \quad \mathbf{v}_t = \nabla \times \Psi, \quad \nabla \Psi = 0, \quad (9)$$

где  $\Phi$  и  $\Psi$  – соответственно скалярный и векторный потенциалы поля скоростей  $\mathbf{v}$ , и подставляя (9) в уравнение (6), получаем

$$\left[ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial t} + \nabla p - \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \mathbf{v}_l - \rho_{el} \mathbf{E} \right] + \left[ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} - \eta \Delta \mathbf{v}_t \right] = 0. \quad (10)$$

В (10) учтено, что  $\mathbf{E} = -\nabla \psi$  – потенциальный вектор, где  $\psi$  – скалярный потенциал поля  $\mathbf{E}$ . Из (10) получаем для потенциального течения

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial t} = -\nabla p + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \mathbf{v}_l + \rho_{el} \mathbf{E} \quad (11)$$

и соленоидального течения

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{v}_t. \quad (12)$$

Подстановка в (11), (12) значений для  $\mathbf{v}_l$  и  $\mathbf{v}_t$  из (9) преобразует их к виду

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \Phi - \rho_{el} \psi, \quad (13)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \eta \Delta \Psi.$$

Далее при условии, что глубина проникновения вязких волн  $\delta$  мала, соленоидальным течением пренебрегаем (см., например, [14, с. 63]).

По предположению векторы  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{E}$  направлены вдоль оси  $Oz$  ( $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$ ,  $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ ) и вектор  $\mathbf{E}$ , вызывающий акустические колебания, имеет гармоническую зависимость от времени  $E = \bar{E} e^{-i\omega t}$ , где  $\bar{E} = \text{const}$  – амплитуда колебаний. Тогда потенциал  $\psi$  вектора  $\mathbf{E}$  определяется из соотношения  $\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\bar{E} e^{-i\omega t}$ . Интегрируя последнее равенство, имеем при условии  $\psi(0) = \psi(z)|_{z=0} = 0$

$$\psi = -z \bar{E} e^{-i\omega t}. \quad (14)$$

Преобразуем уравнение (13). Для этого воспользуемся условием непрерывности (7) и соотношением  $p = c^2 \rho$ . Получаем  $\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \nabla \mathbf{v}$  или через скалярный потенциал  $\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \Delta \Phi$ . В гармоническом случае, сохраняя те же обозначения для амплитуд, для амплитуды давления  $p$  получаем

$$p = \frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \Delta \Phi. \quad (15)$$

С учетом (14) и (15) выражение (13) для гармонического сигнала примет вид

$$-i\omega \rho_0 \Phi = -\frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \Delta \Phi + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \Phi + \rho_{el} z \bar{E}. \quad (16)$$

В круговом капилляре в дебаевском приближении справедливо выражение [11, с. 149]

$$\rho_{el}(r) = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 \zeta I_0(r/\lambda_D)}{\lambda_D^2 I_0(a/\lambda_D)}. \quad (16)$$

С учетом этого уравнение (16) преобразуется к виду

$$\left\{ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + k^2 \right\} \Phi = -\frac{ik^2 \varepsilon \varepsilon_0 \zeta I_0(r/\lambda_D)}{\omega \rho_0 \lambda_D^2 I_0(a/\lambda_D)} \bar{E} z. \quad (17)$$

Здесь  $k = \frac{\omega}{c} / \left( 1 - i\omega \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) / \rho_0 c^2 \right)^{1/2}$  – волновое число потенциальных волн.

Таким образом, для амплитуды скалярного потенциала скорости  $\Phi$  получено неоднородное уравнение Гельмгольца (17). Правая часть этого уравнения, как и скорость (5) в случае стационарного электроосмоса, пропорциональна амплитуде электрического потенциала  $\bar{E}$  и величине  $\zeta$ -потенциала и обратно пропорциональна величине динамической вязкости  $\eta$ , а также, в отличие от стационарного электроосмоса, еще и объемной вязкости  $\zeta$ . Кроме того,  $\Phi$ , как и в стационарном случае, пропорциональна произведению диэлектрической проницаемости среды и электрической постоянной  $\varepsilon \varepsilon_0$ . Разумеется, эти зависимости в силу линейности уравнения (17) сохраняются для скорости потока  $\mathbf{v}$ .

Формально при сделанных выше допущениях задача считается решенной, если определен скалярный потенциал  $\Phi$ . Скалярный потенциал определяется выражением (17). Вектор колебательной скорости  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_l$  определяется после этого

из (9). Поле давления определяется из (15). В случае пренебрежения вихревым течением на скалярный потенциал  $\Phi$  на поверхности скольжения можно наложить краевое условие  $v|_a \approx v_t|_a = \nabla\Phi|_a = 0$ . Краевые условия для стационарного электроосмоса приведены в [9, с. 34; 10, с. 218].

**УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ, ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ**

Далее снимается допущение о возможности линеаризации уравнения (2), но сохраняется допущение о ламинарности потоков жидкости в рассматриваемом процессе.

За основу вновь берется уравнение движения Навье–Стокса (2). Примем, что стационарное электрическое поле много больше переменного  $|\mathbf{E}_0| \gg |\mathbf{E}|$ . Число Рейнольдса  $Re_{v_0}$  для скорости  $\mathbf{v}_0$  уже не считаем пренебрежимо малым, и конвективным членом слева в (2) для скорости  $\mathbf{v}_0$  пренебрегать нельзя. Уравнение (4) в этом случае приводится к виду (как и выше, полагаем величину стационарного давления постоянной  $\nabla p_0 = 0$ )

$$\rho_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 = \eta \Delta \mathbf{v}_0 + \rho_{el} \mathbf{E}_0. \quad (18)$$

Вычтем из уравнения (2) для суммарных полей уравнение движения из (18) для стационарного потока. Получившееся уравнение для акустических полей линеаризуем. В результате получаем линеаризованную версию уравнения Навье–Стокса для акустических полей (см. также рассуждения в работе [13, § 26])

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}_0 \right) = \\ = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \mathbf{v} + \rho_{el} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (19)$$

К уравнению движения (19) следует добавить линеаризованное уравнение непрерывности (7).

Как и выше, рассматриваем безвихревое акустическое движение. Тогда, после подстановки выражения  $\mathbf{v} = \nabla\Phi$  в уравнение (19), получаем уравнение для потенциала  $\Phi$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \nabla \Phi + (\nabla \Phi \nabla) \mathbf{v}_0 \right) = \\ = -\nabla p + \eta \Delta \nabla \Phi + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \Delta \Phi - \rho_{el} \nabla \psi. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (20) после простых преобразований получаем

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2(\mathbf{v}_0 \nabla \Phi) \right) = -p + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \Phi - \rho_{el} \psi. \quad (21)$$

Выражение (21) следует из (20), если учесть, что скорость  $\mathbf{v}_0$  электроосмотического течения по-

тенциальна [9, с. 38] и в члене  $(\nabla\Phi\nabla)\mathbf{v}_0$  из (20) сделать замену  $\mathbf{v}_0 = \nabla\Phi_0$ , а затем опустить во всех членах (20) правый оператор градиента  $\nabla$ .

Рассматриваем далее гармонический процесс с множителем  $e^{-i\omega t}$  (амплитуды полей вновь обозначаем теми же буквами). Вектора  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{E}$  по прежнему являются коллинеарными и направлены вдоль оси  $Oz$  ( $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$ ,  $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ ), а модуль вектора  $\mathbf{E}$  имеет гармоническую зависимость от времени  $E = \bar{E}e^{-i\omega t}$ , где  $\bar{E} = \text{const}$ . Тогда амплитуда потенциала  $\psi$  вектора  $\mathbf{E}$  равна  $\psi = -\bar{E}z$ . После подстановки амплитуды давления и потенциала в (21) имеем в гармоническом случае

$$\begin{aligned} \rho_0 (-i\omega\Phi + 2(\mathbf{v}_0 \nabla \Phi)) = \\ = -\frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \Delta \Phi + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \Phi + \rho_{el} \bar{E}z, \end{aligned}$$

или, используя введенное в (17) волновое число,

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = \frac{2k^2}{i\omega} (\mathbf{v}_0 \nabla \Phi) - \frac{k^2}{i\omega \rho_0} \rho_{el} \bar{E}z. \quad (22)$$

Уравнение (22) представляет собой подобие неоднородного уравнения Гельмгольца относительно скалярного потенциала  $\Phi$  акустической составляющей осмотической скорости  $\mathbf{v}$ , однако, с тем отличием, что в правую часть уравнения (22) входит искомая величина  $\nabla\Phi$ . Решение таких уравнений сводится к линейному интегральному уравнению с ядром, представляющим собой функцию Грина соответствующего уравнения Гельмгольца, которое здесь подробно не рассматривается. Проделаем лишь качественное рассуждение, касающееся того, что справа в (22) стоит скалярное произведение  $(\mathbf{v}_0 \nabla \Phi)$  вектора стационарной осмотической скорости  $\mathbf{v}_0$  и вектора  $\nabla\Phi$ , а следовательно, искомое решение  $\Phi$  скалярного потенциала акустической составляющей осмотической скорости  $\mathbf{v}$  прямо пропорционально модулю  $|\mathbf{v}_0|$  скорости  $\mathbf{v}_0$  стационарного осмотического течения. Поскольку имеет место линейная связь между потенциалом  $\Phi$  и скоростью  $\mathbf{v}$ , а также давлением  $p$  (см. (9) и (15)), то при росте амплитуды  $|\mathbf{v}_0|$  будет расти и акустическое давление  $p$  и модуль  $|\mathbf{v}|$  акустической составляющей осмотической скорости, а следовательно, и интенсивность звука  $I \sim p|\mathbf{v}|$ .

Подставляя в (22) соответствующее значение для  $\rho_{el}(r)$ , получаем

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \Phi = \frac{k^2}{i\omega} \left( 2(\mathbf{v}_0 \nabla \Phi) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta} I_0(r/\lambda_D)}{\lambda_D^2 J_0(a/\lambda_D)} \bar{E} z \right). \quad (23)$$

Выражение (23) отличается от выражения (17)

только стоящим справа членом  $\frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0 \nabla \Phi)$ , появившимся в результате учета нелинейности в уравнении Навье–Стокса (2). Таким образом, с ростом числа Рейнольдса для скорости стационарного электроосмотического потока  $\mathbf{v}_0$  уравнения движения для стационарного потока и нестационарного акустического потока перестают быть несвязанными, как в линейном случае при получении уравнения (17). Это выражается в появлении в уравнениях (22), (23), описывающих акустический поток  $\mathbf{v}$ , члена  $\frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0 \nabla \Phi)$ , непосредственно связанного со скоростью  $\mathbf{v}_0$  стационарного электроосмотического потока. В этом и состоит возможность увеличения мощности акустического процесса за счет энергии стационарного процесса, т.е. возникает эффект накачки энергии из стационарного потока в энергию акустического процесса.

Остановимся на оценке члена  $\frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0 \nabla \Phi)$  в выражении (23). Стационарная электроосмотическая скорость  $\mathbf{v}_0$  является решением уравнения (18), которое отличается от уравнения, рассматриваемого в классическом электроосмосе (см., например в [9, с. 33, 34]

$$\eta \Delta \mathbf{v}_0 + \rho_{el} \mathbf{E}_0 = 0. \quad (24)$$

Уравнение (18) преобразуется в (24) при пренебрежении конвективным членом  $\rho_0(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0$ . Это возможно при условии  $|\rho_0(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0| \ll |\rho_{el} \mathbf{E}_0|$ . Если это условие справедливо, то можно воспользоваться оценкой для скорости  $\mathbf{v}_0$  при условии  $a \gg \lambda_D$  [11, с. 161, 162]:  $\mathbf{v}_0 \approx U_{eo} \mathbf{e}_z$ , где  $U_{eo}$  – электроосмотическая скорость;  $\mathbf{E}_0 = |\mathbf{E}_0| \mathbf{e}_z$  – единичный орт оси  $Oz$ , совпадающей с осью капилляра. С учетом приведенных рассуждений уравнение (23) переписывается в следующем виде

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \Phi = \frac{k^2}{i\omega} \varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta} E_0 \left( \frac{2}{\eta} (\mathbf{e}_z \nabla \Phi) + \frac{1}{\rho_0 \lambda_D^2 J_0(a/\lambda_D)} \frac{\bar{E}}{E_0} z \right), \quad (25)$$

из которого видна зависимость процесса от его основных физических параметров, т.е. величин  $\omega, c, \eta, \zeta, \varepsilon, \varepsilon_0, \tilde{\zeta}, E_0, \bar{E}, \rho_0, a$  и  $\lambda_D$ .

При решении задачи (25) следует наложить специфичные для электроосмотических задач краевые условия (см., например, [9, с. 33, 34; 10, с. 220]). После вычисления потенциала  $\Phi$  вектор колебательной скорости и давления определяются стандартно, как описано выше. Плотность определяется из условия баротропности жидкости  $\rho = \frac{p}{c^2}$ .

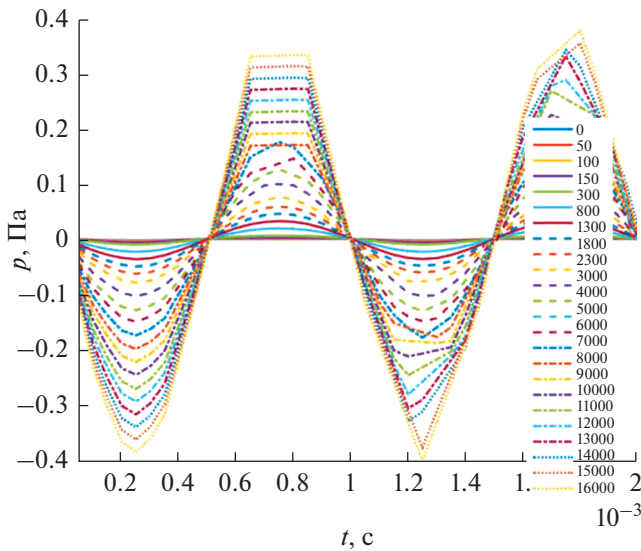
**Замечание 1.** Уравнения (3) и (10) описывают процессы линейной акустики. В случае, когда нельзя пренебречь нелинейным слагаемым  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ , опущенным слева в (19), уравнение (25) трансформируется к нелинейному, что, в частности, объясняет появление кратных гармоник, которые в процессе эксперимента и сигнализируют о возникновении нелинейности акустического процесса.

## МОДЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки рассмотренной теории был проведен модельный эксперимент в вычислительном пакете COMSOL. В качестве пористой структуры был выбран круговой стеклянный капилляр, заполненный воздухом с параметрами: радиус капилляра 10 мкм, длина капилляра 0.1 мм, амплитуда переменной разности потенциалов сохранялась в эксперименте постоянной  $U = 1000$  В (переменное напряжение  $u(t)$  определялось так  $u(t) = U \sin(2\pi 1000t)$ ), частота 1000 Гц, дзета-потенциал был принят равным 100 мВ.

На сетке фиксированных значений постоянного напряжения  $U_{0i}$ ,  $i = \overline{1, N}$  решалась задача расчета уровня акустического давления  $p = f(U_{0i}, U = \text{const})$  на торце капилляра в случае наиболее общего уравнения движения (2). На рис. 1 представлены зависимости  $p_i(t) = f(U_{0i}, U = \text{const})$  при дискретной вариации величины  $U_{0i}$  в интервале  $i \in \overline{1, N}$ . С правой стороны рисунка отдельно приведены дискретные значения  $U_{0i}$ . Из рис. 1 видно, что начиная с некоторых значений  $U_{0i}$ , функции давления  $p_i(t)$  становятся нелинейными вследствие нелинейности задачи (2), на что указывает отклонение их формы от синусоидальной. Кроме того, видна прямая зависимость амплитуд колебаний  $p_i(t)$  от величины амплитуды накачки  $U_{0i}$ .

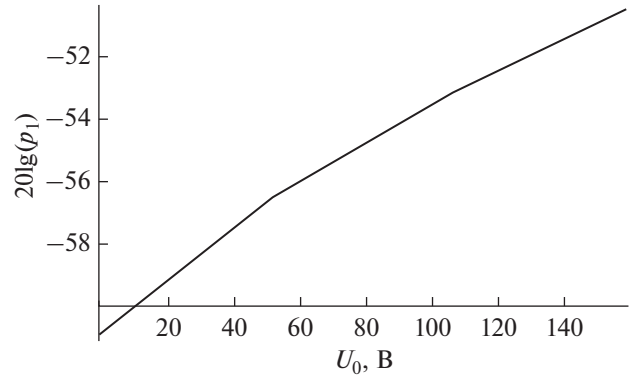
Далее с помощью разложений в ряд Фурье кривых  $p_i(t)$  были получены амплитуды  $p_{li}$  пер-



**Рис. 1.** Поведение результирующего акустического давления  $p$  на торце капилляра в зависимости от времени  $t$  при различных напряжениях накачки  $U_0$  при значении величины амплитуды переменного напряжения  $U = 1000$  В. Значения  $U_0$ , В приведены в правой стороне графика.

вых гармоник функций  $p_i(t)$ . На рис. 2, 3 приведены в режиме линейной интерполяции зависимости величины  $20\lg(p_1)$  от напряжения накачки  $U_0$  в интервале соответственно  $U_0 \in [0, 150]$  и  $U_0 \in [0, 16000]$  В при значении величины амплитуды переменного напряжения  $U = 1000$  В. Здесь  $p_1$  – первая гармоника давления  $p(t)$ .

**Замечание 2.** Полученный выше теоретически и на модельном эксперименте результат, заключающийся в том, что в нелинейном режиме при подаче постоянного и переменного электрических полей к электродам электроакустического преобразователя происходит перекачка энергии от постоянного электрического поля непосредственно к энергии акустического поля, был получен применительно к пористой структуре в виде кругового капилляра. Прежде чем переходить к описанию натуральных экспериментов, приведем условия, когда эти результаты можно экстраполировать на достаточно широкий класс пористых структур. В § 2.2 работы [9] показано подобие системы уравнений электроосмотического течения применительно к капиллярно-пористой среде со сколь угодно сложной геометрией внутренней поверхности системе уравнений для простейших случаев границ (плоскость, плоский слой, капилляр) при выполнении следующих условий:

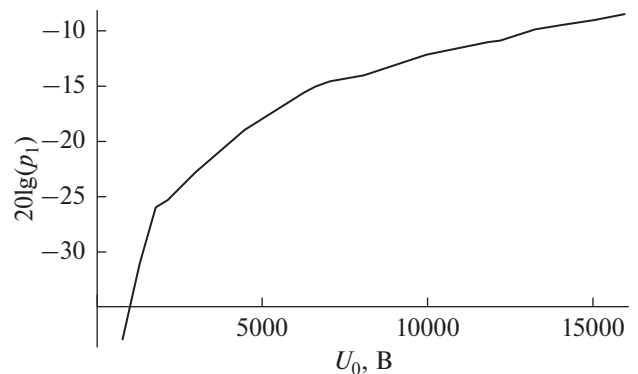


**Рис. 2.** Зависимость величины  $20\lg(p_1)$  от напряжения накачки  $U_0$  в интервале  $U_0 \in [0, 150]$  В при значении величины амплитуды переменного напряжения  $U = 1000$  В. Здесь  $p_1$  – первая гармоника давления  $p$  (см. рис. 1).

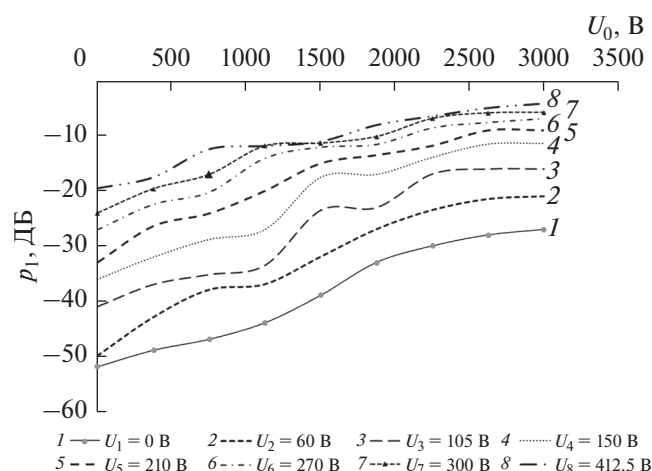
1. толщина двойного слоя достаточно мала, а радиусы кривизны внутренней поверхности пор больше некоторой величины, значительно превышающей длину Дебая  $\lambda_D$ , обычно принимаемую за толщину ДЭС;

2. минимальный линейный размер пор существенно превышает толщину двойного слоя.

В экспериментах, описанных ниже, в качестве капиллярно-пористой структуры используется писчая бумага. Согласно [15, с. 67], средний радиус пор бумаги составляет от 20–30 нм для мелованной бумаги, 270 нм для газетной бумаги и до 450 нм для фильтровальной бумаги. Для обычной писчей бумаги средний радиус пор лежит внутри интервала (30 нм, 270 нм). Порядок величины длины Дебая составляет  $\lambda_D \sim 10$  нм [11, с. 47]. Таким



**Рис. 3.** Зависимость величины  $20\lg(p_1)$  от напряжения накачки  $U_0$  в интервале  $U_0 \in [0, 16000]$  В при значении величины амплитуды переменного напряжения  $U = 1000$  В. Здесь  $p_1$  – первая гармоника давления  $p$  (см. рис. 1).



**Рис. 4.** Амплитуда давления первой гармоники  $p_1$  в некоторой фиксированной точке волновой зоны излучателя в зависимости от изменения напряжения накачки  $U_0$  при дискретных постоянных значениях  $U$  (кривые 1–8; маркеры на кривых 1 и 7 служат для идентификации кривых).

образом, для обычной писчей бумаги выполняются условия подобия, описанные в замечании 2.

### НАТУРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки описанной теории был проведен ряд экспериментов. В качестве излучающей системы использовалась расположенная в воздушной среде пачка писчей бумаги постоянной толщины  $\Delta$  (15 листов толщиной по  $\sim 0.1$  мм каждый) формата А4, помещенная между двумя соразмерными бумаге перфорированными алюминиевыми пластинами-электродами. К электродам подводились постоянное  $E_0$  и гармоническое  $E$  электрические поля, направленные по нормали к электродам. При постоянной величине  $\Delta$  далее вместо полей  $E_0$  и  $E$  оперируем соответствующими величинами приложенных к электродам разностей потенциалов  $U_0$  и  $Ue^{-i\omega t}$ . Частота колебаний переменного электрического поля в опытах составляла  $f = 3$  кГц. В волновой зоне описываемого преобразователя в точке на оси, проходящей нормально к его центру, был установлен микрофон, измерявший излучаемое давление, которое фиксировалось на анализаторе спектра в условных дБ<sup>1</sup>.

В процессе экспериментов был получен ряд зависимостей давления первой гармоники давления

<sup>1</sup> Отсутствие привязки к конкретной величине, относительно которой оценивалась измеряемая величина, не меняет, как известно, характера соответствующей зависимости, а приводит лишь к ее сдвигу по оси ординат.

$p_1$  на входе микрофона от напряжения накачки  $p_1 = f_i(U_0, U_i)$  при фиксированных значениях величины амплитуды гармонической составляющей электрического поля  $U = U_i$ ,  $i = \overline{1, 8}$ , равных соответственно  $U_1 = 30$  В;  $U_2 = 60$  В;  $U_3 = 105$  В;  $U_4 = 150$  В;  $U_5 = 210$  В;  $U_6 = 270$  В;  $U_7 = 300$  В;  $U_8 = 412.5$  В. Кривые зависимостей  $p_1 = f_i(U_0, U_i)$  представлены на рис. 4 под соответствующими номерами. На приведенных графиках значения уровня первой гармоники давления  $p_1$  в дБ являются относительными, показывающими только соотношение его амплитуд в процессе эксперимента при различных значениях амплитуд  $U$  и  $U_0$ . Напряжение накачки  $U_0$  при фиксированной величине  $U = U_i$ ,  $i = \overline{1, 8}$  варьировалось на дискретном множестве точек от 20 до 3000 В с переменным шагом: 30 В на интервале  $U_0 \in [20, 500]$  В и с шагом 100 В на интервале  $U_0 \in (500, 3000]$  В.

Из рис. 4 следует, что кривые  $p_1 = f_i(U_0, U_i = \text{const})$  имеют сходный характер поведения в зависимости от напряжения накачки  $U_0$  (т.е. от величины осмотической скорости  $v_0$ , пропорциональной величине  $U_0$ ): вначале все кривые достаточно монотонно возрастают с ростом величины  $U_0$ . В интервале значений  $U_0 \in [2600, 3000]$  В наступает режим насыщения.

Фаза нарастания давления  $p_1$  с ростом накачки  $U_0$  прогнозировалась выше в теоретической части работы. Фаза насыщения давления  $p_1$  с ростом напряжения накачки требует дополнительного пояснения. Участок насыщения кривых  $p_1 = f_i(U_0, U_i = \text{const})$  можно объяснить тремя факторами. Во-первых, суммарная энергия при входе в нелинейный режим излучения начинает перераспределяться от первой гармоники акустических колебаний к появляющимся кратным гармоникам. Это отчетливо проявилось и при проведении модельного эксперимента в вычислительном пакете, что выразилось во все большем отклонении формы акустического давления  $p$  от синусоидальной при росте напряжения накачки  $U_0$ . Во-вторых, как будет показано в следующей работе авторов, при некоторых значениях  $U_0$ , зависящих от размера пор, ламинарный режим течения жидкости (газа) в порах преобразователя переходит в турбулентный режим течения, который сопровождается появлением паразитных широкополосных пульсационных шумов, на что также идут затраты энергии. В-третьих, как показано в работе [16], с ростом  $U_0$  возрастают диссипативные поте-



ри в теле преобразователя. Этим и объясняется поведение представленных на рисунке кривых.

Из результатов эксперимента, представленных на рис. 4, следует, что величины давления без накачки  $p_1 = f_i(U_0, U_i)$  при  $U_0 = 0$  (т.е. соответствующие значения давления  $p_1$  на оси  $U_0 = 0$  для  $i = \overline{1,8}$ ) при фиксированных значениях  $U_i$  по мере увеличения накачки  $U_0$  возрастают по-разному. Рост составляет от 15.4 дБ при  $U_i = 412.5$  В (в 5.9 раза) до 29 дБ при  $U_i = 60$  В (в 28.2 раза). Эти результаты с учетом замечания 2 подтверждают теоретические прогнозы данной работы.

**Замечание 3.** Сравнение результатов модельного (рис. 2) и натурального (рис. 4) экспериментов в совпадающем интервале напряжения накачки  $U_0 \in [0, 150]$  В показывает, что при изменении напряжения накачки в этом интервале амплитуда давления растет на  $\sim 10.4$  дБ для модельного эксперимента и на 1-3 дБ для натурального эксперимента. Объяснить это можно следующим образом. При проведении модельного эксперимента задавалось возможное верхнее предельное значение электрокинетического потенциала  $\tilde{\zeta} = 0.1$  В (интервал принимаемых значений на практике составляет  $\tilde{\zeta} \in [0.001, 0.1]$  В [15, с. 320]). Как видно из выражения (25), снижение величины дзета-потенциала в 2 раза до  $\tilde{\zeta} = 0.05$  В по сравнению с принятым в модельном эксперименте влечет к уменьшению скалярного потенциала  $\Phi$  и связанного с ним линейно давления  $p$  на  $\sim 6$  дБ. Реально в натурном эксперименте дзета-потенциал вероятно был еще меньше, однако в настоящей работе он специально не измерялся.

**Замечание 4.** Получение идентичных результатов качественной зависимости величины первой гармоники давления  $p_1$ , получаемого в преобразователе, от величины напряжения накачки  $U_0$  при разных частотах переменного напряжения (соответственно 1000 и 3000 Гц для модельного и натурального экспериментов) лишь подчеркивает общий характер предложенной теоретической модели процесса.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены в линейном и нелинейном приближении (ламинарный режим движения жидкости) необходимые уравнения и краевые условия для описания акустических полей, вызываемых электрокинетическими явлениями: наличием двойного электрического слоя и приложенного электрического поля, являющегося суммой постоянного поля и электрического поля,

несущего акустическую информацию. Уравнения рассматриваются применительно к цилиндрическому капилляру.

В линейном режиме электроосмотических явлений наличие стационарного электроосмоса не оказывает влияния на протекание электроосмоса, вызванного переменным электрическим полем. В нелинейном ламинарном режиме происходит перекачка энергии постоянного электрического поля в энергию акустического поля. Результаты модельного эксперимента на капилляре качественно подтверждают верность проведенных теоретических исследований. Различие степени накачки в модельном и натурном экспериментах можно объяснить меньшим значением дзета-потенциала в натурном эксперименте.

Результаты натурального эксперимента на такой нетривиальной пористой структуре, как бумага, также подтверждают верность развитой в работе для кругового капилляра теории в части ее основного прогноза — возникновения процесса перекачки энергии постоянного электрического поля в акустическую энергию и демонстрируют правоту ее экстраполяции на сложные пористые структуры. В натурном эксперименте усиление первой гармоники давления с помощью накачки составляло для различных значений переменного давления от 5.9 до 28 раз. В модельном эксперименте, в отличие от натурального эксперимента не происходит режима насыщения даже при изменении напряжения накачки до величины 16000 В. Причины этого будут вскрыты в следующей публикации авторов.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и оптимизации преобразователей нового типа.

Авторы благодарны С.П. Дмитриеву и С.Г. Телятнику за содействие в проведении экспериментов.

Работа выполнена в ИАП РАН в рамках Государственного задания 075-00780-20-00 по теме № 0074-2019-0013 Министерства науки и высшего образования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shishov S.V., Andrianov S.A., Dmitriev S.P., Ruchkin D.V.* Method of converting electric signals into acoustics oscillations and an electric gas-kinetic transducer. United States Patent # US 8,085,957, B2. Dec. 27, 2011.
2. *Касимзаде М.С., Халилов Р.Ф., Балашов А.Н.* Электрокинетические преобразователи информации. М.: Энергия, 1973. 136 с.
3. *O'Brien R.W.* Electro-acoustic effects in a dilute suspension of spherical particles // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 190. P. 71–86.

4. *Hunter R.J.* Review. Recent developments in the electroacoustic characterization of colloidal suspensions and emulsions // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 1998. V. 14. P. 37–65.
5. *Муцовкин В.А.* Нелинейные течения вблизи поляризованных дисперсных частиц // *Коллоидн. журн.* 1996. Т. 58. № 3. С. 358–367.
6. *Данилян А.В., Дорофеев Д.Л., Наскидашвили В.И., Пахомов Г.В., Зон Б.А.* Магнитогидродинамический генератор псевдозвука // *Акуст. журн.* 2005. Т. 51. № 5. С. 694–696.
7. *Гладилин А.В., Пирогов В.А., Голямина И.П., Кулаев Ю.В.* Вибрационный преобразователь с магнитной левитацией // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 3. С. 409–415.
8. *Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Шарфарец Б.П., Гуляев Ю.В.* Теоретическое обоснование нового метода электроакустического преобразования. Линейное приближение // *Докл. Акад. наук.* 2018. Т. 483. № 3. С. 265–268.
9. *Духин С.С., Дерягин Б.В.* Электрофорез. М.: Наука, 1976. 332 с.
10. *Ньюмен Дж.* Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 464 с.
11. *Bruijs H.* Theoretical Microfluidics. Oxford University Press, 2008. 346 p.
12. *Физическая энциклопедия.* Т. 5. М.: БРЭ, 1998. 760 с.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
14. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
15. *Шахкельдян Б.Н., Загаринская Л.А.* Полиграфические материалы. М.: “Книга”, 1988. 328 с.
16. *Шарфарец Б.П.* О диссипации энергии в электроосмотическом процессе // *Научное приборостроение.* 2019. Т. 29. № 3. С. 30–40.
17. *Глинка Н.Л.* Общая химия. Л.: Химия. 702 с.