

УДК 534.21

## ЗАКОНЫ ДИСПЕРСИИ, НЕЛИНЕЙНЫЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯДЕР ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯ В СРЕДАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА С СИЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

© 2020 г. А. В. Урсулов<sup>a, b, \*, \*\*</sup>

<sup>a</sup>Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Институт естественных наук и математики, Департамент фундаментальной и прикладной физики, ул. Мира 19, Екатеринбург, 620002 Россия

<sup>b</sup>Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Научно-исследовательский институт физики и прикладной математики, Отдел математического моделирования, ул. Мира 19, Екатеринбург, 620002 Россия

\*e-mail: AV.Ursulov@urfu.ru

\*\*e-mail: urandrey@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.12.2018 г.

После доработки 27.11.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение, моделирующее среды с сильной пространственной дисперсией и нелинейностями гидродинамического типа (уравнение Уизема). Предложен способ построения ядра интегрального члена, позволяющий качественно учитывать особенности законов дисперсии линейных волн в средах с пространственной дисперсией. Подробно рассматривается случай, когда ядро содержит два независимых параметра, характеризующих его амплитуду и ширину. Получены и проанализированы законы дисперсии линейных волн, а также решения в виде уединенных волн предельной и малой амплитуды. В частности, показано, что при соответствующем выборе параметров можно получить значение угла заострения на вершине уединенной волны предельной амплитуды на поверхности слоя жидкости, равное углу Стокса.

**Ключевые слова:** пространственная дисперсия, нелинейность, уравнение Уизема, закон дисперсии, волна предельной амплитуды, угол Стокса, уединенная волна, уравнение Кортвега–де Фриза

DOI: 10.31857/S0320791920040103

1. Одним из важных объектов исследования в теории волн (в том числе акустических) являются волны в различных диспергирующих средах [1–13]. В широком смысле среда называется диспергирующей (средой с дисперсией), если в такой среде отклик на воздействие зависит не только от возмущения в данный момент времени в данной точке пространства, но и от возмущения в предыдущие моменты времени (временная дисперсия) в некоторой области среды, окружающей данную точку (пространственная дисперсия). Временная дисперсия приводит к зависимости функций отклика (диэлектрической или/и магнитной проницаемости, проводимости и т.д.) от частоты, поэтому она также называется частотной дисперсией. Пространственная дисперсия при распространении линейных волн обычно проявляется на достаточно высоких частотах, поэтому ее иногда называют высокочастотной дисперсией.

Учет сильной дисперсии приводит к тому, что уравнения, описывающие распространение возмущений в среде, становятся интегро-дифференциальными [1–3, 10–23]. Вообще говоря, оба вида дисперсии могут присутствовать в каждой диспергирующей среде, однако довольно часто в рамках рассматриваемой задачи удается выделить наиболее существенную из них. Временная дисперсия существенна, когда частоты распространяющихся в среде волн близки к собственным частотам колебаний среды, а также когда в среде имеются процессы типа поглощения или релаксации. В акустике сильная временная дисперсия при распространении линейных и нелинейных волн возникает, например, в релаксирующих жидкостях и газах, полимерах, биологических тканях и других сложно устроенных средах [1–3, 6, 13–23]. Образующиеся здесь интегро-дифференциальные уравнения обладают тем свойством,

что содержащиеся в них интегралы ограничены сверху текущим моментом времени (либо сводятся к таковым). Последнее непосредственно следует из принципа причинности: реакция среды в текущий момент времени определяется воздействием на нее в прошлом и настоящем. Пространственная дисперсия обусловлена пространственной нелокальностью среды (влиянием всего окружения на каждую точку среды), что приводит в уравнениях к интегралам по всему объёму, занимаемому средой.

Одна из наиболее сложных проблем в анализе интегро-дифференциальных уравнений состоит в том, что часто точный вид ядра интегрального члена не известен. Точный вид ядра можно определить из микроскопического рассмотрения проблемы, что далеко не всегда возможно и выходит за рамки феноменологического подхода. С другой стороны, уравнения не могут быть решены без формального задания ядра. Поэтому возникает необходимость привлечь к моделированию ядра дополнительные физические или математические соображения. Во многих случаях про ядра интегральных членов уравнений заранее можно сказать следующее [1–5, 10–15]. В случае временной дисперсии в ядра наиболее существенный вклад дают времена, меньшие или сравнимые с характерным временем среды (например, со временем релаксации). В случае же пространственной дисперсии основной вклад в ядро вносят пространственные масштабы, меньшие или сравнимые с характерным для рассматриваемой среды размером (постоянной кристаллической решетки, длиной свободного пробега частиц, дебаевским радиусом, толщиной слоя жидкости, характерным размером зерен, диаметром поперечного сечения упругой или электропроводящей проволоки и т.д.). Дальнейшие предположения о структуре ядра могут быть получены, например, из свойств однородности и изотропности среды, однородности времени, соображений симметрии, поведения асимптотик, условий нормировки и т.д. В случае временной дисперсии важным фактором, позволяющим судить о структуре ядра, являются соотношения Крамерса–Кронига, которые являются следствием принципа причинности [1–6]. Соотношения Крамерса–Кронига давно и активно используются в акустике [24–27]. Другие методы, широко используемые в акустике, основаны на восстановлении ядер либо из экспериментальных данных, либо из модельных представлений о внутренней динамике молекулярных или надмолекулярных структур. Такие подходы широко практикуются, например, в медицинской акустике и эластографии [15–17]. Соответствующая математическая процедура восстановления ядра описана в работах [1, 28].

В данной работе на примере конкретного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с

пространственной дисперсией (так называемого уравнения Уизема) предложен подход к моделированию ядра, основанный на выделении из него “главной” и “поправочной” частей. “Главная” часть учитывает фундаментальные требования к ядру в пределах рассматриваемой задачи (симметрии, нормировки, особенности асимптот и т.д.). Поправки же предназначены для того, чтобы учесть некоторые более тонкие свойства распространяющихся волн (например, особенности законов дисперсии). В рамках данного подхода анализируются уединенные волны на поверхности жидкости. Показано, что для волн на поверхности мелкой воды с помощью подбора параметров можно получить правильное значение угла Стокса.

2. Одним из модельных уравнений, используемых для исследования нелинейных волн в системах гидродинамического типа с сильной пространственной дисперсией, является уравнение [10–12]

$$\eta_t + \eta \eta_x + c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(x-x') \eta_x dx' = 0, \quad (1)$$

где  $c_0$  – скорость звука. В теории распространения волн на поверхности воды и математической физике уравнение (1) получило название уравнения Уизема. Это уравнение достаточно универсально. Оно встречается в теории поверхностных и внутренних волн в жидкости, в физике бесстолкновительной плазмы, в нелинейной оптике и т.д. [10–12, 29–37]. Уравнение (1) является интересным объектом для математических исследований, не только как нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частых производных, но и как уравнение, из которого при соответствующем выборе ядра  $\kappa(x)$  следуют многие известные нелинейные уравнения: Бенджамин–Оно, Бюргерса, Кортевега–де Фриза (КдФ) и некоторые другие [11, 30, 37–41]. Отметим, что в уравнении (1) с формально математической точки зрения (отвлекаясь от смысла переменных  $x$  и  $t$ ) можно представить ядро  $\kappa$  в виде произведения  $\kappa(x) = \theta(x)K(x)$ , где  $\theta(x)$  –  $\theta$ -функция Хэвисайда, а  $K(x)$  – произвольная функция. Тогда в интегральном члене рассматриваемого уравнения верхний предел интегрирования становится переменным, равным  $x$ . В таком виде уравнение (1) становится подобным уравнениям, используемым для описания волн в средах с временной дисперсией. Заметим, что в этом случае уравнение (1) не совпадает с полученным в работе [14] и обобщенным в работе [15] интегро-дифференциальным уравнением (упрощенным за счет однородности и пренебрежения вязкостью): в (1) не достаёт дополнительной производной в интегральном слагаемом. Как уже отмечалось, наличие переменного верхнего предела (или, что экви-

валентно,  $\theta$ -функции в ядре) связано с действием принципа причинности, который обязан выполняться, если речь идет о времени  $t$ . В случае пространственной дисперсии наличие в ядре  $\theta$ -функции, зависящей от пространственной переменной  $x$ , соответствует ситуации, когда реакция среды в данной точке пространства  $x$  определяется областью, находящейся только с одной стороны от этой точки (например, слева), что представляется достаточно специфичным. Поэтому, когда речь идет о пространственной переменной  $x$ , будем предполагать, что интеграл в (1) берется по всей области пространства, занимаемого средой, в данном случае – в бесконечных пределах.

Для удобства анализа в (1) выбрана калибровка, когда коэффициент перед нелинейным слагаемым равен единице. В результате величина  $\eta$  в (1) имеет размерность скорости. Первое слагаемое в (1) ответственно за нестационарность процесса, второе – учитывает типичную для гидродинамических сред нелинейность, а последний (интегральный) член описывает пространственную дисперсию. Будем считать, что ядро  $\kappa(x)$  удовлетворяет следующим условиям: 1) в силу пространственной однородности среды зависит только от разности координат:  $\kappa(x - x')$ ; 2) в силу изотропии среды (эквивалентности прямого и обратного направлений распространения волны) является четной функцией:  $\kappa(-x) = \kappa(x)$ ; 3) спадает на бесконечности  $\kappa(\pm\infty) = 0$ ; 4) нормировано на единицу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(x) dx = 1. \tag{2}$$

В общем случае ядро  $\kappa(x)$  может быть получено из фазовой скорости линейной волны

$$c_f(k) = \frac{\omega(k)}{k}, \tag{3}$$

где  $\omega(k)$  – закон дисперсии волны, с помощью обратного преобразования Фурье [10–12]

$$c_0 \kappa(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_f(k) e^{ikx} dk. \tag{4}$$

При известном законе дисперсии выражение (4) определяет ядро  $\kappa(x)$ .

Часто ограничиваются случаем, когда закон дисперсии линейных волн имеет полиномиальный (степенной) характер

$$\omega(k) = c_0 k + \sum_{n=1}^N c_{2n} k^{2n+1}. \tag{5}$$

В частности, при  $N = 1$  в правой части выражения (5) получаем полином третьей степени. Соответствующий закон дисперсии имеют волны в средах со слабой пространственной дисперсией. Выражению (5) соответствует ядро

$$c_0 \kappa(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n c_{2n} \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \delta(x), \tag{6}$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака. В этом случае уравнение (1) сводится к виду

$$\partial_t \eta + c_0 \partial_x \eta + \sum_{n=1}^N (-1)^n c_{2n} \partial_x^{2n+1} \eta + \eta \partial_x \eta = 0. \tag{7}$$

Значение  $N = 1$  соответствует уравнению Кортевега–де Фриза, которое является уравнением третьего порядка. При  $N > 1$  возникают различные уравнения более высоких порядков [35, 42–45].

Если закон дисперсии не является полиномиальным, то в общем случае ядро  $\kappa(x)$  вычислить не удастся. Иногда ядро  $\kappa(x)$  удается аппроксимировать более простой функцией  $\gamma(x)$  и тем самым преобразовать интегро-дифференциальное уравнение (1) в дифференциальное. Однако при такой аппроксимации может потеряться часть важной информации, содержащейся в функции

$$r(x) = \kappa(x) - \gamma(x). \tag{8}$$

Последнее может приводить к искажению характеристик исследуемых нелинейных волн, а также, например, к тому, что законы дисперсии линейных волн, соответствующие  $\kappa(x)$  и  $\gamma(x)$ , могут существенно различаться.

Примером такой ситуации является применение уравнения (1) к исследованию слабо нелинейных волн на поверхности слоя жидкости [10–12]. В этом случае закон дисперсии линейных волн имеет вид

$$\omega = \sqrt{k \operatorname{th}(k)}, \tag{9}$$

где ускорение свободного падения  $g$ , глубина слоя  $h_0$  и скорость  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  приняты равными единице:  $g = h_0 = c_0 = 1$ , а частота  $\omega$  и волновое число  $k$  считаются безразмерными. График функции (9) приведен на рис. 1.

Ядро интегрального слагаемого в (1), соответствующее закону дисперсии (9), равно

$$\kappa(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{th}(k)}{k}} e^{ikx} dk. \tag{10}$$

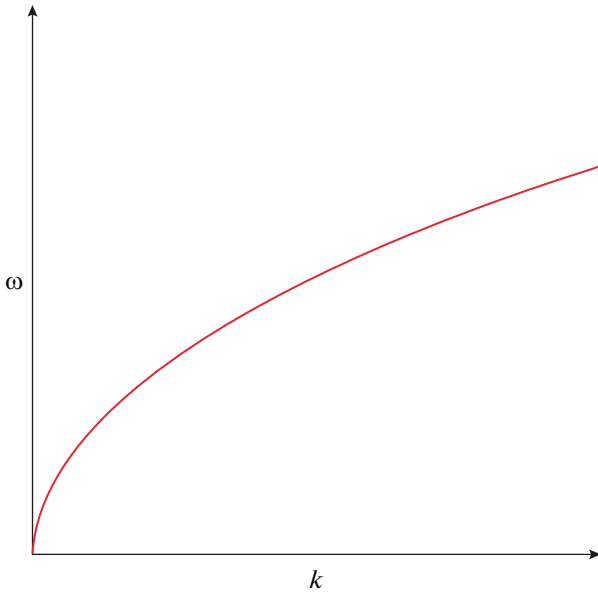
Функция (10) имеет асимптоты [10–12]

$$\kappa(x) \sim (2\pi x)^{-1/2}, \quad x \rightarrow 0, \tag{11}$$

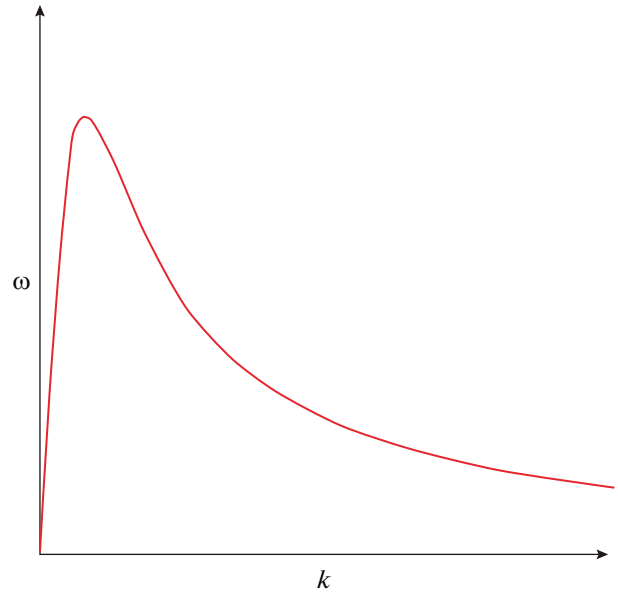
$$\kappa(x) \sim \left(\frac{\pi^2}{2} x\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\pi x}{2}\right), \quad x \rightarrow \infty. \tag{12}$$

Основываясь на (11) и (12), Уизем предложил аппроксимировать ядро  $\kappa(x)$  функцией

$$\gamma(x) = \frac{\pi}{4} \exp\left(-\frac{\pi|x|}{2}\right), \tag{13}$$



**Рис. 1.** График закона дисперсии гравитационных волн в слое жидкости (9). При увеличении волнового числа  $k$  частота  $\omega$  стремится к бесконечности.



**Рис. 2.** График закона дисперсии (16). При увеличении волнового числа  $k$  частота  $\omega$  стремится к нулю.

которая является фундаментальным решением уравнения

$$\left(\partial_x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\gamma(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \delta(x). \quad (14)$$

Подставляя в уравнение (1) вместо ядра  $\kappa(x)$  выражение (13) (т.е. считая, что  $\kappa(x) = \gamma(x)$ ) и действуя на обе части получившегося уравнения оператором  $\partial_x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ , получим дифференциальное уравнение

$$\left(\partial_x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)(\eta_t + \eta\eta_x) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \eta_x = 0. \quad (15)$$

Линеаризуя (15), получим закон дисперсии волн, соответствующих ядру (13)

$$\omega = \frac{k}{1 + \left(\frac{2k}{\pi}\right)^2}. \quad (16)$$

График функции (16) приведен на рис. 2.

Из рис. 1 и 2 видим, что кривые дисперсии, соответствующие исходному  $\kappa(x)$  (9) и аппроксимированному  $\gamma(x)$  (13) ядрам, качественно совпадают только при малых  $k$ , а при больших  $k$  существенно различаются: первая дисперсионная кривая неограниченно возрастает, а вторая — стремится к нулю. Другим недостатком указанной аппроксимации является невозможность получить значение угла заострения на вершине уединенной волны предельной амплитуды, равное

углу Стокса  $\vartheta_s = 2\pi/3$  [10–12]. Приведенный пример указывает на то, что необходима модификация подхода Уизема, лишенная указанных недостатков.

3. Подстановка  $\kappa(x) = \gamma(x) + r(x)$  в интегральный член в (1) приводит к появлению двух интегральных слагаемых. Считаем функции  $r(x)$  и  $\gamma(x)$  четными. Тогда слагаемое, обусловленное функцией  $r(x)$ , можно представить в виде следующего бесконечного ряда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} r(x-x')\eta_x dx' &= \partial_x \int_{-\infty}^{+\infty} r(\chi)\eta(x-\chi)d\chi = \\ &= \partial_x \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} \partial_x^{2n} \eta, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} r(\chi)\chi^{2n}d\chi. \quad (18)$$

В результате уравнение (1) сводится к интегродифференциальному уравнению бесконечного порядка, которое эквивалентно тому же уравнению Уизема с ядром

$$\kappa(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{2n} \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \delta(x) + \gamma(x). \quad (19)$$

При известном законе дисперсии из выражений (4) и (19) можно получить функцию  $\gamma(x)$ . В силу обращения в нуль интегралов, содержащих производные от дельта-функций, условие нормиров-

ки (2) после подстановки в него выражения (19) дает

$$\alpha_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) dx = 1. \quad (20)$$

Как видим, слагаемые с номерами  $n \geq 1$  не дают вкладов в условие нормировки.

В выражении (17) по порядку величины

$$\alpha_{2n} \partial_x^{2n} \eta \sim \left(\frac{\ell}{\Delta}\right)^{2n} \eta, \quad (21)$$

где  $\Delta$  – характерный масштаб изменения функции  $\eta(x)$ ,  $\ell$  – характерный масштаб, на котором спадает на бесконечность ядро  $r(x)$ . Когда функция  $\eta(x)$  является гладкой по сравнению с ядром  $r(x)$ , величина  $\Delta$  значительно превышает  $\ell$ :

$$\Delta \gg \ell, \quad (22)$$

соответственно, каждый последующий член ряда (17) будет по порядку величины меньше предыдущего члена в  $(\ell/\Delta)^2 \ll 1$  раз. В результате, отбрасывая члены, имеющие более высокий порядок малости, ряд (17) (и, соответственно, ряд в выражении (19)) с нужной степенью точности может быть оборван на каком-либо слагаемом с номером  $n = N$ . В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + c_0 \sum_{n=0}^N \alpha_{2n} \partial_x^{2n+1} \eta + \\ + c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x-x') \eta_{x'} dx' + \eta \partial_x \eta = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнению (23) отвечает закон дисперсии

$$\omega(k) = c_0 k \left( \tilde{\gamma}(k) + \sum_{n=1}^N (-1)^n \alpha_{2n} k^{2n} \right), \quad (24)$$

где  $\tilde{\gamma}(k)$  – Фурье-образ функции  $\gamma(x)$ . Выражение (24) кроме полинома степени  $2N$  содержит также неполиномиальный вклад, определяемый функцией  $\tilde{\gamma}(k)$ .

Выберем ядро  $\gamma(x)$  в уравнении (23) в виде

$$\gamma(x) = \beta \gamma_0(x), \quad (25)$$

где  $\beta$  – произвольная постоянная, а функция

$$\gamma_0(x) = \frac{q}{2} \exp(-q|x|) \quad (26)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial_x^2 - q^2\right) \gamma_0(x) = -q^2 \delta(x). \quad (27)$$

Величина, обратная  $q$ , определяет характерный размер, на котором происходит спадание функции  $\gamma_0(x)$ .

Используя условие нормировки (20) и обозначая  $\alpha_0 = -\alpha$ , из (25) и (26) получаем

$$\beta = 1 + \alpha. \quad (28)$$

Как видим, в рассматриваемом случае в силу условия нормировки константа  $\beta$  полностью определяется значением  $\alpha$ .

Подставляя выражения (25) и (26) в уравнение (23), действуя на обе части получившегося уравнения оператором  $(\partial_x^2 - q^2)$ , учитывая (27) и (28), получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\partial_x^2 - q^2\right) \left( \partial_t \eta + c_0 \sum_{n=1}^N \alpha_{2n} \partial_x^{2n+1} \eta + \eta \partial_x \eta \right) - \\ - \alpha c_0 \partial_x^3 \eta - c_0 q^2 \partial_x \eta = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Данное уравнение содержит производные высших порядков и нелинейности вида  $\eta \eta_x, \eta \eta_{xxx}, \eta_x \eta_{xx}$ . Различные варианты такого типа уравнений обсуждаются в литературе [35, 42–45].

4. Остановимся более подробно на случае, когда в (29) слагаемым, содержащим сумму по  $n$ , можно пренебречь. В этом случае уравнение (29) сводится к виду

$$\left(\partial_x^2 - q^2\right) (\partial_t \eta + \eta \partial_x \eta) - \alpha c_0 \partial_x^3 \eta - c_0 q^2 \partial_x \eta = 0. \quad (30)$$

Отметим, что уравнение (30) зависит от единственного параметра  $\alpha$ , который входит в него в качестве коэффициента перед третьей производной  $\partial_x^3 \eta$ .

Уравнение (30) соответствует выбору ядра  $\kappa(x)$  в виде

$$\kappa(x) = -\alpha \delta(x) + (1 + \alpha) \gamma_0(x). \quad (31)$$

Функция  $\kappa(x)$  (31) содержит два независимых параметра  $\alpha$  и  $q$ , которые, соответственно, характеризуют ее амплитуду и ширину. Частный случай ядра (31) рассматривался в работе [46] при исследовании нелинейных волн в упругих средах с сильной пространственной дисперсией. Рассмотренный Уиземом случай, когда ядро аппроксимируется функцией (13), соответствует  $\alpha = 0$  и

$$q = \frac{\pi}{2}.$$

Линеаризуя (30), получим закон дисперсии  $\omega(k)$ , который запишем в виде

$$\omega = c_0 k \frac{1 - \alpha \left(\frac{k}{q}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{q}\right)^2}. \quad (32)$$

Значение  $\alpha = -1$  соответствует акустическому закону дисперсии  $\omega = c_0 k$ . В этом случае в ядре (31) остается единственное слагаемое, равное дельта-

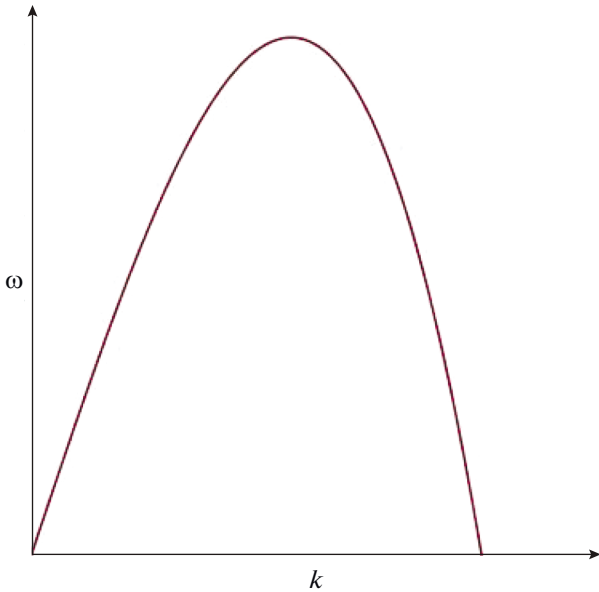


Рис. 3. График закона дисперсии (32) при  $\alpha \geq 1$ .

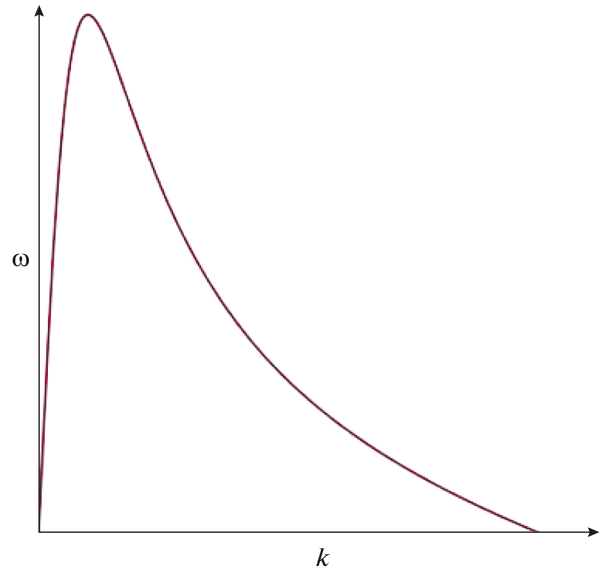


Рис. 4. График закона дисперсии (32) при  $0 < \alpha < 1$ .

функции Дирака. Экстремумы функции (32) находятся в точках, где обращается в нуль групповая скорость

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_0 \frac{1 - (1 + 3\alpha)\left(\frac{k}{q}\right)^2 + \left(\frac{k}{q}\right)^4}{\left(1 + \left(\frac{k}{q}\right)^2\right)^2}, \quad (33)$$

что достигается при значениях  $k$ , равных

$$k_{\pm} = q\sqrt{\frac{-(1 + 3\alpha) \pm \sqrt{(1 + 3\alpha)^2 + 4\alpha}}{2\alpha}}. \quad (34)$$

Корень  $k_-$  будет вещественным при  $-\frac{1}{9} \leq \alpha < 0$ , а  $k_+$  — при  $-\frac{1}{9} \leq \alpha$ . Таким образом, в области  $-\frac{1}{9} \leq \alpha < 0$  имеется два вещественных корня  $k_{\pm}$ , отвечающих максимуму и минимуму функции  $\omega(k)$ , а в области  $0 \leq \alpha$  — один вещественный корень, отвечающий максимуму  $\omega(k)$ .

Характерные графики законов дисперсии приведены на рис. 3–7 ( $c_0 = 1, q = 1$ ). Из приведенных графиков следует, что ядро (31) описывает достаточно широкий спектр законов дисперсии. График для случая  $\alpha = 0$  аналогичен графику на рис. 2. Если значение  $\alpha$  неотрицательно ( $\alpha \geq 0$ ), то, как видно из рис. 2–4, кривые дисперсии ограничены сверху. Для отрицательных значений параметра  $\alpha$  ( $\alpha < 0$ ) при больших значениях волнового числа  $k$  кривые дисперсии (32) асимптотически выходят на прямую линию

$$\omega = -\alpha c_0 k, \quad (35)$$

которая изображена на рис. 5–7 пунктирной линией.

Несмотря на наличие указанной асимптоты, закон дисперсии (32) при отрицательных значениях параметра  $\alpha < 0$  качественно отражает свойство функции (9) неограниченно возрастать при  $k \rightarrow \infty$ . Последнее позволяет сделать вывод о предпочтительности выбора ядра (31) по сравнению с ядром (13) при описании с помощью уравнения Уизема гравитационных волн в слое жидкости.

Отметим, что наличие асимптот в виде прямой линии на графике дисперсионных кривых при  $\alpha < 0$  является следствием выбранного приближения, согласно которому в уравнении (29) пренебрегли членами, содержащими все высшие производные, кроме третьей. Действительно, если взять уравнение (29) полностью, то после его линеаризации получим закон дисперсии

$$\omega = c_0 k \left( \frac{1 - \alpha \left(\frac{k}{q}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{q}\right)^2} + \sum_{n=1}^N (-1)^n \alpha_{2n} \left(\frac{k}{q}\right)^{2n} \right). \quad (36)$$

Поскольку выражение (36) является аппроксимацией точного закона дисперсии, то число  $N$  и коэффициенты  $\alpha_{2n}$  могут быть подобраны так, что (36) будет качественно правильно отражать особенности аппроксимируемого выражения при любых значениях  $k$ . При больших значениях волнового числа ( $k \gg q$ ) из (36) получаем

$$\omega \approx c_0 k \left( -\alpha + \sum_{n=1}^N (-1)^n \alpha_{2n} \left( \frac{k}{q} \right)^{2n} \right). \quad (37)$$

Как видим, при больших  $k$  закон дисперсии является полиномиальным и асимптоты в виде прямых (35) появляются только в случае, когда в выражении (37) мы пренебрегаем слагаемыми, содержащими все степени  $k$ , кроме первой.

5. Рассмотрим теперь стационарные нелинейные волны, удовлетворяющие уравнению (30). Считаем  $\eta = \eta(\xi)$ , где  $\xi = x - ct$ ,  $c$  – скорость возмущения. Тогда в целях удобства дальнейшего анализа уравнение (30) запишем для безразмерной функции  $y(\xi)$ :

$$\partial_\xi \left[ (\partial_\xi^2 - q^2) \left( \sigma y - \frac{y^2}{2} \right) - q^2 y \right] = 0, \quad (38)$$

где

$$y = \frac{\eta}{c_\alpha}, \quad c_\alpha = (1 + \alpha)c_0, \quad (39)$$

$$\sigma = 1 + \frac{\Delta c}{c_\alpha}, \quad \Delta c = c - c_0. \quad (40)$$

Рассматривая спадающие на бесконечности решения  $\partial_\xi^n y(\pm\infty) = 0$ ,  $n = 0, 1$ , преобразуем уравнение (38) к виду

$$(\sigma - y)^2 y'^2 = \frac{q^2 y^2}{4} (y - y_-)(y - y_+), \quad (41)$$

где штрих означает производную по  $\xi$ , а

$$y_\pm = 2 \left( \sigma - \frac{2}{3} \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sigma} \right). \quad (42)$$

Уравнение (41) имеет решение в виде волны предельной амплитуды [10–12], для которой

$$y_\pm = \sigma = \frac{4}{3}. \quad (43)$$

В этом случае уравнение (41) сводится к виду  $y' = \pm qy$ , а его решение запишется в форме

$$y = \frac{4}{3} e^{\frac{q}{2}|\xi - \xi_0|}, \quad (44)$$

где  $\xi_0$  – произвольная постоянная. Видим, что для волны предельной амплитуды  $0 \leq y \leq \frac{4}{3}$ , а сама волна имеет характерное заострение на гребне волны (в точке  $\xi = \xi_0$ ) [10–12]. Возвращаясь к исходной функции  $\eta(\xi)$ , получаем

$$\eta(\xi) = \eta_\pm e^{\frac{q}{2}|\xi - \xi_0|}, \quad (45)$$

где

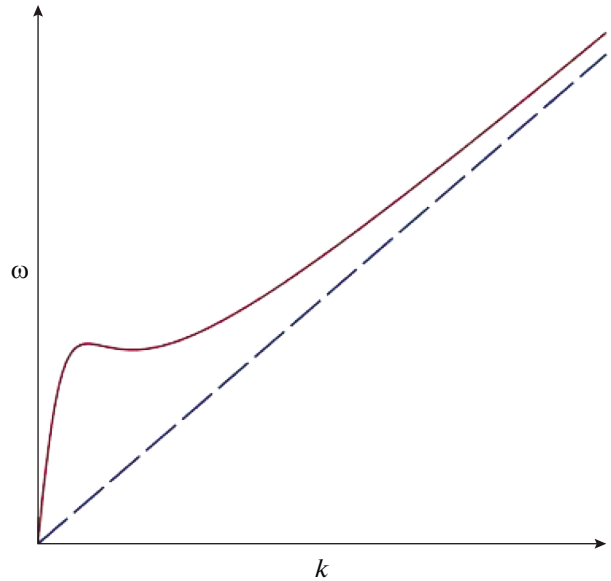


Рис. 5. График закона дисперсии (32) при  $-\frac{1}{9} \leq \alpha < 0$ .

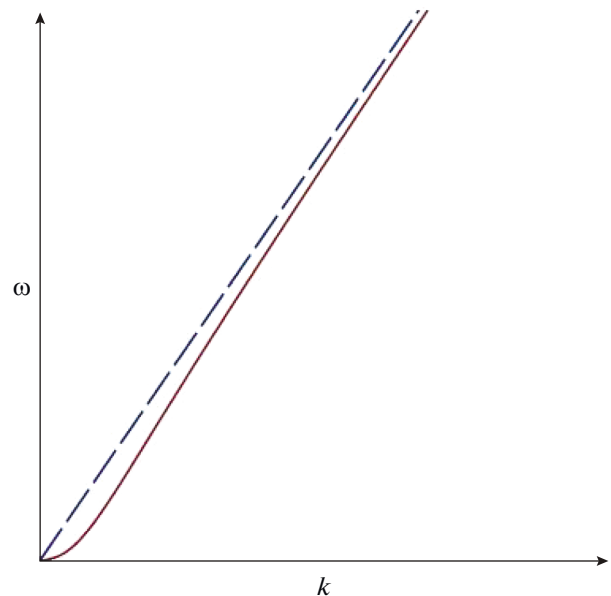


Рис. 6. График закона дисперсии (32) при  $-1 < \alpha < -\frac{1}{9}$ .

$$\eta_\pm = \frac{4}{3} c_\alpha. \quad (46)$$

Из условия  $\sigma = \frac{4}{3}$  и (40) находим, что скорость волны предельной амплитуды равна

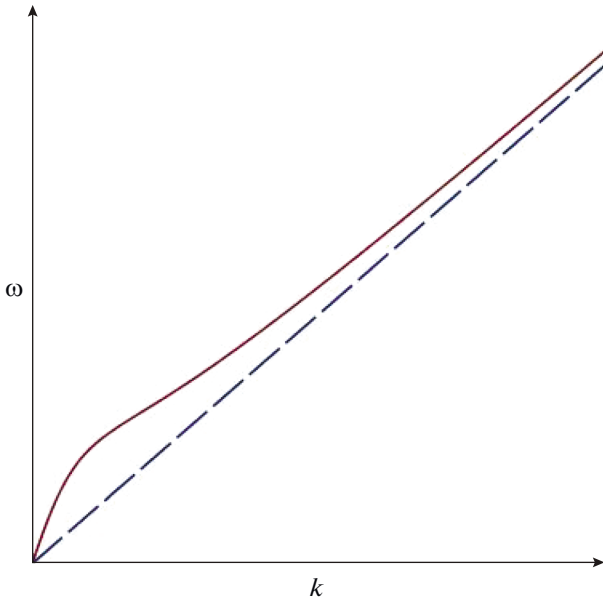


Рис. 7. График закона дисперсии (32) при  $\alpha < -1$ .

$$c = \frac{4 + \alpha}{3} c_0. \tag{47}$$

Из (46) и (47) следует, что амплитуда  $\eta_{\pm}$  и скорость  $c$  волны предельной амплитуды зависят от параметра  $\alpha$ . Так как  $c > 0$ , то волны предельной амплитуды существуют только при  $\alpha > -4$ . При  $-4 < \alpha < -1$  имеем дозвуковую волну ( $c < c_0$ ), отрицательная амплитуда которой ограничена снизу значением  $\eta_{\min} = -4c_0$ :  $\eta_{\min} < \eta_{\pm} < 0$ . Если же  $\alpha > -1$ , то волна будет сверхзвуковой ( $c > c_0$ ) и иметь положительную амплитуду ( $\eta_{\pm} > 0$ ).

Угол заострения на вершине волны предельной амплитуды  $\vartheta$  также определяется параметром  $\alpha$ :

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{3} q c_0 (1 + \alpha) \right). \tag{48}$$

Угол  $\vartheta$  отрицателен при  $-4 < \alpha < -1$ , т.е. для сверхзвуковых волн положительной амплитуды, и положителен при  $\alpha > -1$ , т.е. для дозвуковых волн отрицательной амплитуды. Из (48) видим, что при  $c_0 = 1$  и  $q = \frac{\pi}{2}$  для волн на поверхности воды угол Стокса  $\vartheta_S = 2\pi/3$  [10] соответствует значению  $\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1 \approx 0.65$ . Таким образом, с помощью подбора параметра  $\alpha$  можно получить значение угла заострения для волн предельной амплитуды на поверхности слоя воды, равное углу Стокса.

6. Вблизи  $\sigma = 1$  величина  $y_-$  мала

$$y_- \approx 3(\sigma - 1) \ll 1, \tag{49}$$

а  $y_+ \approx \frac{4}{3}$ . Вследствие этого при значениях  $\sigma$ , близких к 1, имеем  $|y| \leq y_- \ll \sigma < y_+$ , а уравнение (41) принимает вид

$$y^2 = \frac{1}{3} q^2 y^2 (y_- - y). \tag{50}$$

Это уравнение имеет решение с профилем, характерным для односолитонного решения уравнения Кортевега–де Фриза. В результате для исходной функции  $\eta(\xi)$  получаем

$$\eta(\xi) = \frac{\eta_-}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{\xi - \xi_0}{\Delta} \right)}, \tag{51}$$

где амплитуда  $\eta_-$  определяется выражениями (39), (49), а ширина  $\Delta$  равна

$$\Delta = \frac{2}{q\sqrt{\sigma - 1}}. \tag{52}$$

Из полученных выражений следует, что чем ближе  $\sigma$  к 1, тем меньше амплитуда солитона и больше его ширина. Учитывая (40), получаем, что ширина солитона

$$\Delta = \frac{2}{q} \sqrt{\frac{c_{\alpha}}{\Delta c}}, \tag{53}$$

а его амплитуда в исходных переменных согласно (39) и (49) равна

$$\eta_- = c_{\alpha} y_- = 3\Delta c. \tag{54}$$

Как видим из (53) и (54), амплитуда возмущения  $\eta_-$  не зависит от параметра  $\alpha$ , а определяется разностью  $\Delta c$  между скоростью возмущения  $c$  и скоростью звука  $c_0$ . Ширина  $\Delta$ , наоборот, зависит как от  $\Delta c$ , так и от параметра  $\alpha$ . В результате получаем, что при  $\alpha > -1$  мы имеем дело со сверхзвуковым солитоном ( $c > c_0$ ) положительной амплитуды  $\eta_- > 0$ , а при  $\alpha < -1$  — с дозвуковым солитоном отрицательной амплитуды  $\eta_- < 0$ .

7. Будем считать, что профиль волны медленно изменяется в пространстве, а уравнение (30) запишем в сопровождающей (сопутствующей) системе координат [1–3]. Для этого положим

$\eta = \eta(\tau, \varepsilon x)$ , где  $\tau = t - \frac{x}{c_0}$ , а  $\varepsilon$  — малый параметр.

В нулевом порядке по  $\varepsilon$  получаем

$$\partial_{\theta} \left( (\partial_{\theta}^2 - q^2) \frac{\eta^2}{2} - c_{\alpha} \partial_{\theta}^2 \eta \right) = 0, \tag{55}$$

где  $\theta = c_0 \tau$ . Для уединенных возмущений

$$\eta(\pm\infty) = \eta_0, \quad \partial_{\theta}^n \eta = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{56}$$



в результате чего уравнение (55) преобразуется к виду

$$\partial_{\theta}^2 \left( \frac{\eta^2}{2} - c_{\alpha} \eta \right) = \frac{q^2}{2} (\eta^2 - \eta_0^2). \quad (57)$$

Положим

$$\eta = \eta_0 + \eta_1, \quad z_0 = \frac{\eta_0}{c_{\alpha}}, \quad z = \frac{\eta_1}{c_{\alpha}}, \quad (58)$$

где функция  $z$  (соответственно  $\eta_1$ ) удовлетворяет условиям

$$z(\pm\infty) = 0, \quad \partial_{\theta}^n z = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (59)$$

После несложных преобразований уравнение (57) приводится к виду

$$(s - z)^2 z'^2 = \frac{q^2 z^2}{4} (z - z_-)(z - z_+), \quad (60)$$

где  $s = 1 - z_0$ , штрих означает производную по  $\theta$ , а

$$z_{\pm} = \frac{2}{3} (1 - 3z_0 \pm \sqrt{1 + 3z_0}). \quad (61)$$

Волнам предельной амплитуды соответствует

$$z_0 = -\frac{1}{3}, \quad z_{\pm} = \frac{4}{3}, \quad (62)$$

что приводит к решению

$$\eta(\theta) = \eta_0 + \eta_{\pm} e^{\frac{-q|\theta - \theta_0|}{2}}. \quad (63)$$

Волна малой амплитуды возникает вблизи  $z_0 = 0$ . В этом случае

$$z_- \approx -3z_0, \quad z_+ \approx \frac{4}{3}. \quad (64)$$

Считая, что  $|z| \leq z_- \ll 1 < z_+$ , получаем уравнение

$$z'^2 = \frac{1}{3} q^2 z^2 (z_- - z), \quad (65)$$

которое по форме совпадает с (50). Из (65) и (58) получаем

$$\eta(\theta) = \eta_0 - \frac{3\eta_0}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{\theta - \theta_0}{\Delta} \right)}, \quad (66)$$

где

$$\Delta = \frac{2}{q} \sqrt{\frac{c_{\alpha}}{-\eta_0}}. \quad (67)$$

Нетрудно видеть, что функции  $\eta(\xi)$  и  $\eta(\theta)$  связаны между собой преобразованием

$$\eta(\xi) = \eta(-\theta - \Delta ct) - \eta_0. \quad (68)$$

Для волн предельной амплитуды  $\eta_0 = -c_{\alpha}/3$ , а для волн малой амплитуды  $\eta_0 = -\Delta c$ .

Поскольку преобразование (68) не затрагивает параметров  $q$  и  $\alpha$ , то выводы, сделанные в координатах  $\xi$  о связи этих параметров со свойствами уединенных волн, остаются справедливыми также в координатах  $\theta$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн (2-е изд.). М.: Наука, 1990. 432 с.
2. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
3. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
4. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
5. *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1960. 376 с.
6. *Туров Е.А.* Материальные уравнения электродинамики. М.: Наука, 1983. 160 с.
7. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983. 136 с.
8. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
9. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 320 с.
10. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
11. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: ЛЕНАНД, 2017. 312 с.
12. *Габов С.А.* Введение в теорию нелинейных волн. М.: Изд.-во МГУ, 1988. 176 с.
13. *Кельберт М.Я., Сазонов И.А.* Распространение импульсов в жидкостях. М.: Наука, 1991. 158 с.
14. *Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В.* Проблемы теории нелинейной акустики // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 3. С. 449–457.
15. *Руденко О.В.* Нелинейные интегро-дифференциальные модели для интенсивных волн в средах типа биотканей и геоструктур со сложной внутренней динамикой релаксационного типа // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 368–375.
16. *Лобанова Е.Г., Лобанов С.В., Хохлова В.А.* Распространение встречных волн с разрывами в нелинейной среде типа биологической ткани // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 356–367.
17. *Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Svanson S.D., Fowlkes J.B., Emelianov S.Y.* Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics // Ultrasound Med. & Biol. 1998. V. 24. № 9. P. 1419–1435.
18. *Кащеева С.С., Сапожников О.А., Хохлова В.А., Аверкью М.А., Крам Л.А.* Нелинейное искажение и поглощение мощных акустических волн в среде со степенной зависимостью коэффициента поглощения от частоты // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 2. С. 211–219.

19. Васильева О.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В. Интенсивные импульсы в релаксирующих средах с ограниченным “временем памяти”, степенными и неаналитическими нелинейностями // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 1. С. 3–9.
20. Полякова А.Л., Солюян С.И., Хохлов Р.В. К вопросу о распространении конечных возмущений в релаксирующей среде // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 1. С. 107–112.
21. Солюян С.И., Хохлов Р.В. Акустические волны конечной амплитуды в среде с релаксацией // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 2. С. 220–227.
22. Руденко О.В., Солюян С.И. К вопросу о рассеянии звука на звуке // Акуст. журн. 1972. № 3. С. 421–425.
23. Кобелев Ю.А., Островский Л.А. Модели газожидкостной смеси, как диспергирующей среды // Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования. Горький, 1980. С. 143–160.
24. Гинзбург В.Л. Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 31–39.
25. O’Donnel M., Jaynes E.T., Miller J.G. General relationships between ultrasonic attenuation and dispersion // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. № 6. P. 1935–1937.
26. O’Donnel M., Jaynes E.T., Miller J.G. Kramers-Kronig relationships between ultrasonic attenuation and phase velocity // J. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 69. № 3. P. 696–701.
27. Карабутов А.А., Подымова Н.Б., Соколовская Ю.Г. Локальные соотношения Крамерса-Кронига для коэффициента затухания и фазовой скорости продольных ультразвуковых волн в полимерных композитах // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 2. С. 182–189.
28. Андреев В.Г., Руденко О.В., Сапожников О.А., Хохлова В.А. Подавление нелинейного затухания звуковой волны в среде, содержащей резонансный поглотитель с конечной шириной линии // Вестник Моск. Ун-та. Сер. 3: Физика. Астрономия. 1985. № 3. С. 58–62.
29. Габов С.А. Об уравнении Уизема // Доклады АН СССР. Сер. Математика. 1978. Т. 242. № 5. С. 993–996.
30. Томилина Н.О. О заострении волн, описываемых уравнением Уизема // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 3: Физика. Астрономия. 1991. Т. 32. № 2. С. 14–19.
31. Елеонский В.М., Королев В.Г., Кулагин Н.Е. О динамической системе, порожденной уравнением Уизема с осциллирующим ядром // Изв. Вузов “ПНД”. 1993. Т. 1. № 3. С. 72–85.
32. Moldabayev D., Kalisch H., Dutykh D. The Whitham equation as a model for surface water waves // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2015. V. 309. P. 99–107. arXiv:1410.8299v1
33. Naumkin P.I., Shishmarev I.A. Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves // Amer. Math. Soc. 1994. 304 p.
34. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М.: Наука, 1964. 282 с.
35. Hur V.M., Johnson M.A. Modulational instability in the Whitham equation for water waves // Studies in Applied Mathematics. 2015. V. 134. P. 120–143. arXiv:1312.1579v2
36. Johnson M.A., Wright J.D. Generalized solitary waves in the gravity-capillary Whitham equation // Stud Appl Math. 2020. V. 144. P. 102–130. arXiv:1807.11469
37. Stefanov A., Wright J.D. Small amplitude traveling waves in the full-dispersion Whitham equation // J. Dynamics and Differential Equations. 2020. V. 32. P. 85–99. arXiv:1802.10040v1
38. Hur V.M., Pandey A.K. Modulational instability in the full-dispersion Camassa-Holm equation // Proc. R. Soc. A. 2017. V. 473. 20170153. arXiv:1702.08708v1
39. Remonato F., Kalisch H. Numerical bifurcation for the capillary Whitham equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2017. V. 343. № 15. P. 51–62. arXiv:1604.08324v1
40. Ehrnström M., Wahlen E. On Whitham’s conjecture of a highest cusped wave for a nonlocal dispersive equation // Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. 2019. V. 36. № 6. P. 1603–1637. arXiv:1602.05384v1
41. Arnesen M.N. Non-uniform dependence on initial data for equations of Whitham type // arXiv:1602.00250v3
42. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
43. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.
44. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 256 с.
45. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. М.: МИФИ, 2008. 352 с.
46. Памятных Е.А., Урсулов А.В. Нелинейные уединенные волны в нелокально упругих твердых телах // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 2. С. 193–199.