

АКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДНА ОЗЕРА БАЙКАЛ

© 2020 г. В. А. Григорьев^{a, *}, К. М. Кучер^{b, **}, А. А. Луньков^{c, ***},
М. М. Макаров^{b, **}, В. Г. Петников^{c, ****}

^aВоронежский государственный университет, Университетская пл. 1, Воронеж, 394018 Россия

^bЛимнологический институт СО РАН, ул. Улан-Баторская 3, Иркутск, 664033 Россия

^cИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

*e-mail: grig4@yandex.ru

**e-mail: mmmsoft@hlserver.lin.irk.ru

***e-mail: lunkov@kapella.gpi.ru

****e-mail: petniko@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 01.04.2020 г.

После доработки 14.04.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Развита методика оценки эффективных акустических параметров дна в мелководных акваториях, покрытых льдом. В основе методики лежит сравнение экспериментальной и расчетной зависимостей амплитуды звукового поля от глубины на расстоянии от источника примерно на порядок больше, чем глубина акватории. В качестве эффективных параметров принимаются значения скорости звука в дне, плотности и коэффициента затухания акустических волн, обеспечивающие при расчетах максимальное соответствие экспериментальным данным. Методика апробирована в натурном эксперименте на озере Байкал и может быть рекомендована для разработки систем автономного акустического мониторинга.

Ключевые слова: акустический мониторинг покрытых льдом мелководных акваторий, эффективные акустические параметры дна

DOI: 10.31857/S0320791920050044

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время долговременный автономный акустический мониторинг мелководных акваторий становится все более востребованным инструментом для изучения окружающей среды. Например, при исследованиях причин глобальных изменений климата [1], при наблюдениях процессов мелкомасштабной и мезомасштабной гидродинамической изменчивости среды [2], при экологическом контроле за вариациями характеристик крупных внутренних водоемов [3], для измерения уровня антропогенных акустических шумов, влияющих на охраняемые виды млекопитающих, проводящих большую часть времени под водой [4]. В первую очередь, указанный мониторинг востребован для акваторий с ледовым покровом, где дистанционная диагностика, основанная на других физических принципах, практически невозможна. Здесь подобный мониторинг также позволяет вести “наблюдения” за животными, обитающими на океанском шельфе и в крупных озерах, по их вокализации. Регистрируя звуковые сигналы, издаваемые этими животными

[5], можно, как минимум, определять их местоположение и с помощью пассивной гидролокации фиксировать их перемещение.

Осуществимость акустического мониторинга можно спрогнозировать, лишь зная акустические параметры волновода, характерного для выбранной мелководной акватории. Среди этих параметров наиболее малоизвестными являются параметры дна (скорость звука, плотность и коэффициент затухания акустических волн в дне). В настоящей статье приведены результаты экспериментальных оценок этих параметров для озера Байкал. Измерения выполнены в зимний период времени при наличии ледового покрова для частот звука около одного килогерца. Эти частоты характерны для звуковых сигналов, излучаемых охраняемым видом млекопитающих, байкальской нерпой (*Pusa sibirica*). Указанные сигналы, зарегистрированные в ходе проведенных экспериментальных исследований, также приведены в настоящей статье.

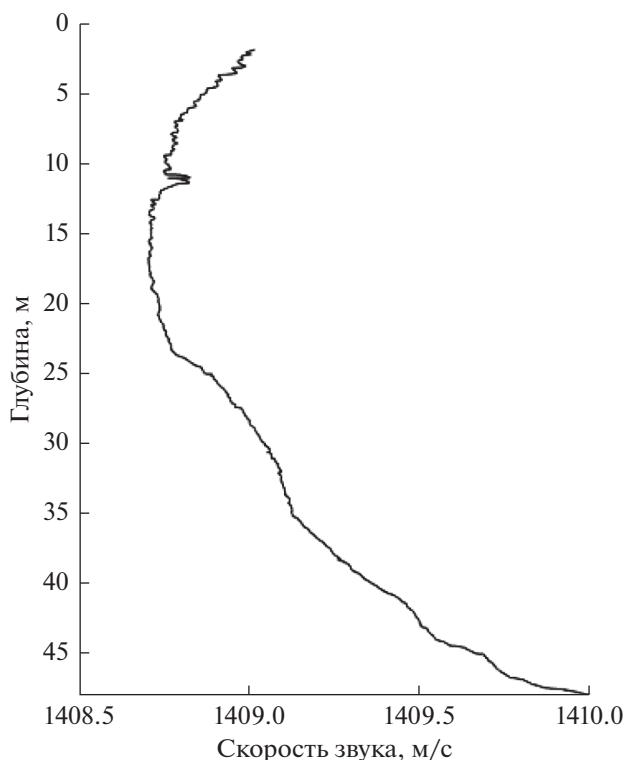


Рис. 1. Зависимость скорости звука в воде от глубины.

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В ВОДНОМ СЛОЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Вертикальная интерференционная структура тонального звукового поля в мелководных акваториях на расстояниях много больших, чем глубина, весьма чувствительна к параметрам нижней границы акустического волновода, который формируется в подобных акваториях [6]. Другими словами, она во многом определяется эффективными параметрами дна: скоростью звука c_1 , плотностью ρ_1 и коэффициентом затухания акустических волн, отнесенным к частоте, β_f . Предполагается, что дно является однородной средой и под эффективными параметрами понимаются средние значения этих величин по расстоянию r между источником и приемником звука и по глубине ΔH . Здесь под величиной ΔH подразумевается эффективная толщина верхнего слоя донных осадочных пород, сравнимая с длиной звуковой волны в дне. Например, в работах [7, 8] продемонстрировано, что интенсивность звукового поля в волноводе в основном зависит от параметров слоя указанной толщины на расстояниях $r > 10H$, где H — глубина волновода. Это свойство интерференционной структуры может быть использовано для решения обратной задачи по определению

эффективных параметров. Методика решения основана на согласовании амплитуды поля, измеренной неподвижной вертикальной цепочкой гидрофонов в эксперименте, с аналогичным расчетным вертикальным амплитудным распределением. Предполагается, что расчетные параметры, обеспечивающие наилучшее соответствие теории и эксперимента, и являются искомыми параметрами задачи [9].

Описанная методика была использована для мелководной прибрежной части озера Байкал, где на глубине $H(r) = 41$ м в марте 2019 года была установлена автономная вертикальная цепочка из $J = 10$ гидрофонов, перегораживающая весь водный слой (см. табл. 1). Цель постановки цепочки состояла в изучении возможностей акустического мониторинга и сопутствующих ему технологий в мелководных акваториях с ледовым покровом. Цепочка опускалась с припая, характерного для Байкала в это время года. Оцифровка и запись на флеш-память принимаемых сигналов осуществлялась с помощью блока обработки информации, расположенного в специальном герметичном контейнере вместе с аккумуляторами для питания предусилителей гидрофонов. Контейнер располагался сверху на льду. Несущий трос цепочки гидрофонов был натянут между донным якорем и якорем на поверхности льда, что обеспечивало стационарное местоположение приемных гидрофонов на соответствующих глубинах z_j :

$$z_j = 0.64 + (j - 1)3.46 \text{ м}, \quad (1)$$

где $j = 1, \dots, J$ — номер приемного гидрофона. Здесь для удобства сопоставления эксперимента и расчета глубины расположения гидрофонов отсчитываются от границы раздела вода–лед. Толщина ледового покрова составляла $h = 0.66$ м.

В районе постановки цепочки с помощью профилографа MiniCTD Valeport были проведены измерения вертикального профиля температуры $T(z)$, где z — глубина точки измерения, а затем по этим данным с помощью эмпирической формулы, адаптированной для озера Байкал [10], был вычислен вертикальный профиль скорости звука в воде $c(z)$:

$$c(z) = 1402.39 + 4.99 T(z) - 0.05 T^2(z) + 0.01564z. \quad (2)$$

Этот профиль приведен на рис. 1.

На рис. 2 приведен пример акустического сигнала, излучаемого байкальской нерпой. Сигнал зарегистрирован на один из гидрофонов цепочки. На этом же рисунке приведена и спектрограмма этого сигнала. Как видно на рисунке, нерпа излучает квазигармонический сигнал с обертонами в диапазоне частот $\Delta f \approx 100\text{--}1400$ Гц.

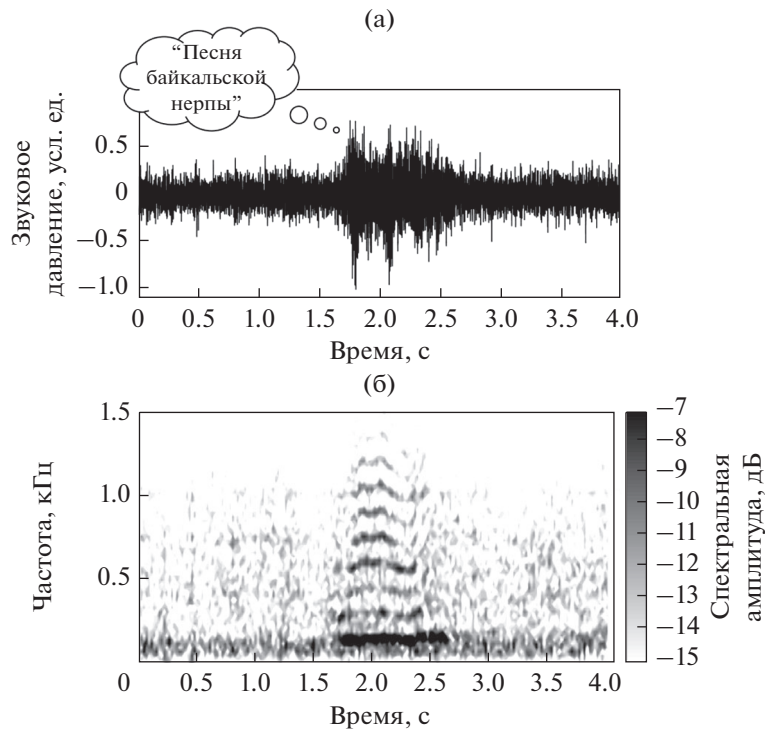


Рис. 2. (а) – Звуковой сигнал байкальской нерпы, зарегистрированный в эксперименте и (б) – его спектрограмма.

Для оценки эффективных параметров акустического волновода на озере Байкал, описанная выше методика определения эффективных акустических параметров дна была апробирована при приеме тональных сигналов частотой $f = 735.0138$ Гц от удаленного источника звука (см. табл. 1). Расстояние между источником и приемной цепочкой, измеренное с помощью GPS, составляло $r = 353$ м. Источник также был закреплен на растянутом между дном и ледовым покрытием несущем фале. Глубина источника от границы раздела вода–лед составляла $z_0 = 18.44$ м, а глубина места в точке установки излучателя равнялась $H(0) = 55$ м. Акустическая трасса источник–приемная цепочка была ориентирована примерно параллельно береговой линии (рис. 3а).

Экспериментальная зависимость амплитуды принимаемого сигнала от глубины, измеренная гидрофонами цепочки, показана на рис. 4а.

Расчет амплитуды тонального сигнала с той же, что и в эксперименте, частотой осуществлялся в

рамках модового описания звукового поля. При расчетах использовались следующие приближения:

- 1) Дно считалось жидкой однородной средой.
- 2) Глубина акватории меняется по линейному закону от точки постановки излучателя звука до точки, где была установлена приемная цепочка.
- 3) Скорость звука в воде считалась постоянной и равной $c = 1409$ м/с.
- 4) Межмодовое взаимодействие и горизонтальная рефракция акустических волн не учитывались.

В расчетах также предполагалось, что ледовое покрытие имеет следующие характеристики: скорость продольных волн $c_2 = 3500$ м/с, скорость поперечных волн $c_s = 1800$ м/с, плотность льда $\rho_2 = 917$ кг/м³, коэффициент затухания продольных волн $\beta_{2f} = 0.086$ дБ/км/Гц, коэффициент затухания поперечных волн $\beta_{sf} = 0.556$ дБ/км/Гц. Указанные типичные значения параметров льда взяты из работы [11]. Однако для этих значений в природных условиях характерна заметная времен-

Таблица 1. Координаты мест постановки гидроакустического оборудования

Использованное оборудование	Широта, северная	Долгота, восточная
Источник звука	52°00.509′	105°22.186′
Цепочка с гидрофонами	52°00.687′	105°22.295′

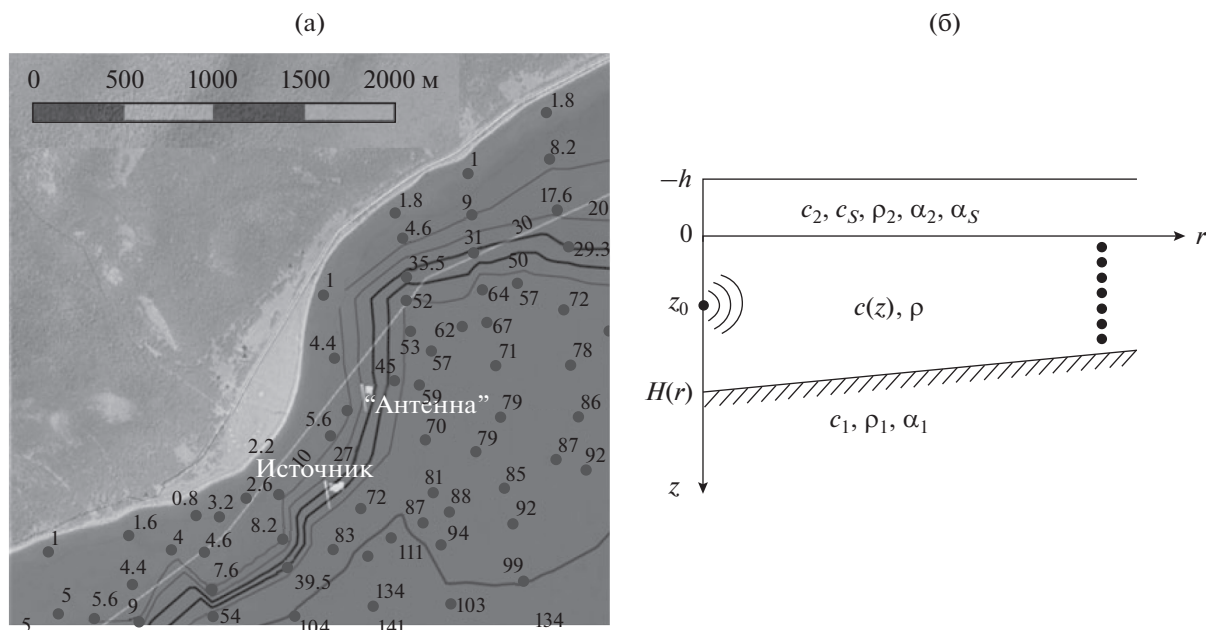


Рис. 3. (а) – Батиметрическая карта в районе работ с нанесенными на ней местоположениями источника звука и приемной цепочки с гидрофонами. (б) – Модель волновода.

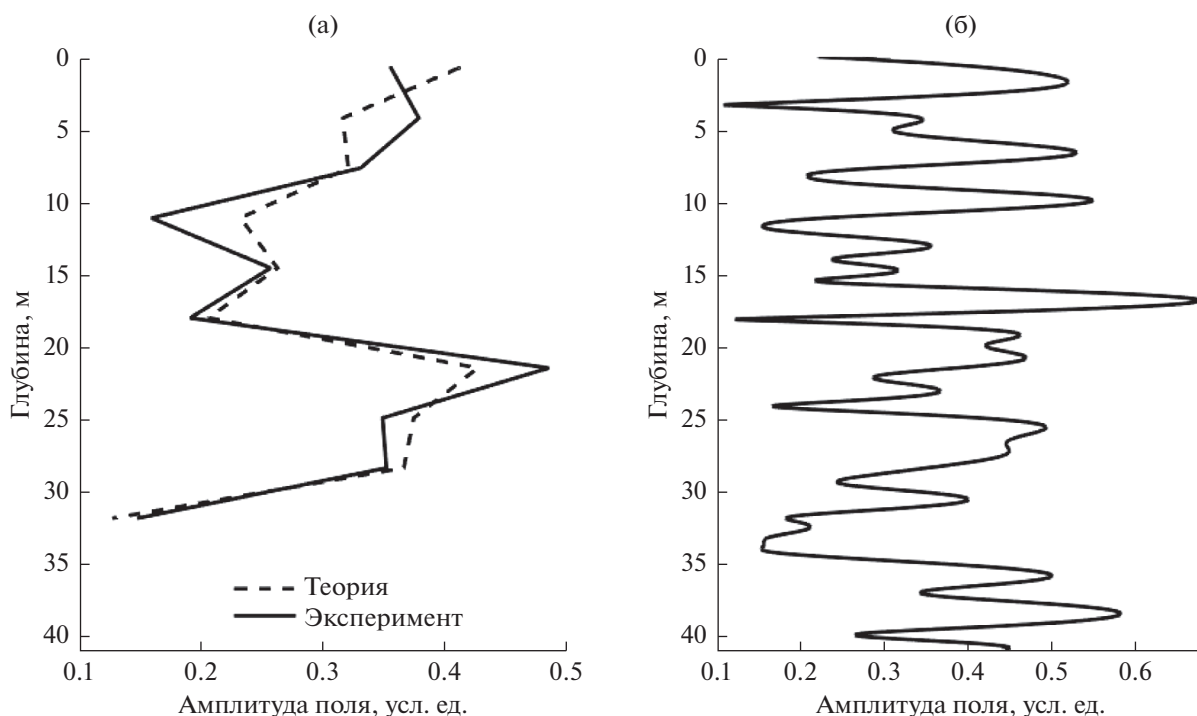


Рис. 4. (а) – Экспериментальная и теоретическая зависимость амплитуды поля от глубины на горизонтах установки гидрофонов (с шагом 3.46 м) при оптимальных параметрах дна: $c_1 = 1670$ м/с, $\rho_1 = 1500$ кг/м³, $\beta_f = 0.45$ дБ/км/Гц. (б) – Расчетная зависимость амплитуды от глубины с шагом по глубине 0.01 м при тех же параметрах дна.

ная и пространственная изменчивость, не учитываемая в настоящей работе. Такая изменчивость, в первую очередь, обусловлена многочисленны-

ми минитрещинами, возникающими и затягивающимися (замерзающими с течением времени) на ледовом покрове. Плотность воды полагалась

равной $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. (Оценки с использованием уравнения состояния воды в акватории при известной температуре [12] показали, что плотность воды изменяется от 999.92 кг/м^3 у поверхности воды до 1000.12 кг/м^3 на глубине 40 м.) Для наглядности модель волновода, использованная при расчетах, показана на рис. 3б. Методика расчетов описана в приложении А к настоящей статье. Заметим здесь только, что приближение постоянной скорости звука в воде позволило при нахождении дискретного спектра собственных значений и собственных функций использовать формулы (A14) и (A15) и, таким образом, существенно сократить время расчетов. Критерием близости теории и эксперимента являлась невязка

$$\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^J (|P_j| - |P_j^{\text{EX}}|)^2}, \quad (3)$$

где $|P_j|$ и $|P_j^{\text{EX}}|$ – теоретическая и экспериментальная амплитуды поля на j -м гидрофоне. При этом в (3) подставляются нормированные амплитуды: $\sum_{j=1}^J |P_j|^2 = \sum_{j=1}^J |P_j^{\text{EX}}|^2 = 1$, что физически означает уравнивание мощностей экспериментального и теоретического сигналов. Искомыми параметрами дна считаются параметры (c_1, ρ_1, β_f) , при которых достигается минимум невязки (в идеале ноль).

С целью сокращения объема расчетов на первом этапе было предложено использовать эмпирические формулы Эйкала [13] и Гамильтона [14] связи параметров (c_1, ρ_1, β_f) с пористостью грунта κ , являющиеся обобщением экспериментальных данных по всему Мировому океану:

$$c_1 = c(1.631 - 1.78\kappa + 1.2\kappa^2), \quad (4)$$

$$\rho_1 = \rho(2.604 - 1.606\kappa), \quad (5)$$

$$\beta_f \left[\frac{\text{дБ}}{\text{км Гц}} \right] = \begin{cases} 0.2747 + 0.527\kappa, & 0 \leq \kappa < 0.472, \\ 4.903\kappa - 1.7688, & 0.472 \leq \kappa < 0.52, \\ 3.3232 - 4.89\kappa, & 0.52 \leq \kappa < 0.65, \\ 0.7602 - 1.487\kappa + 0.78\kappa^2, & 0.65 \leq \kappa \leq 0.9. \end{cases} \quad (6)$$

Использование формул (4)–(6) позволяет не перебирать три параметра (c_1, ρ_1, β_f) , а менять только один параметр κ . По мере изменения κ происходит движение в трехмерном пространстве параметров (c_1, ρ_1, β_f) по определенной эмпирически обоснованной линии. Вычисления проводились при $\kappa = 0.1$ – 0.9 с шагом 0.01 . При каждом значении κ в соответствии с (4)–(6) вычислялся

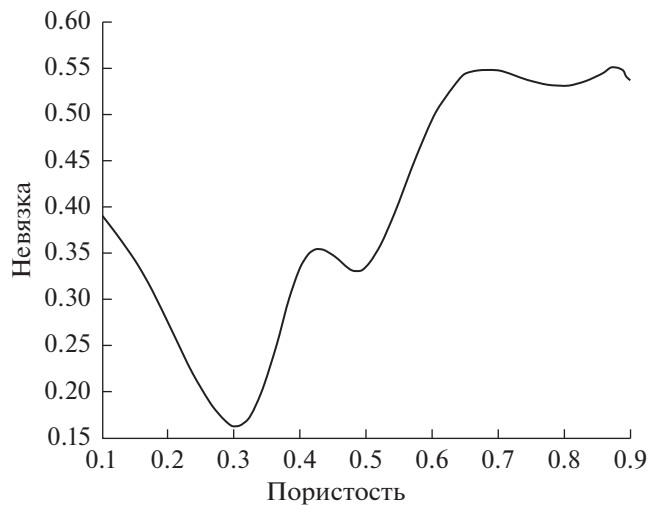


Рис. 5. Невязка как функция пористости.

набор (c_1, ρ_1, β_f) , а затем теоретическое поле (A17) и невязка (3), как функция пористости $\sigma(\kappa)$.

Полученная зависимость $\sigma(\kappa)$ приведена на рис. 5. Минимум невязки, равный $\sigma = 0.164$, наблюдается при $\kappa = 0.3$. Согласно (4)–(6) параметры дна в результате первого этапа расчетов равны: $c_1 = 1700 \text{ м/с}$, $\rho_1 = 2120 \text{ кг/м}^3$, $\beta_f = 0.45 \text{ дБ/км/Гц}$.

Заметим, что поиск минимума невязки проводился в очень широком диапазоне κ , охватывающем практически все возможные типы грунтов морского дна: каменные грунты, пески, алевролиты, глины, илы. Согласно формулам Эйкала (4) и (5), дно было жестким ($c_1 > c$) и мягким ($c_1 < c$). Соответственно, существенно менялись типы мод, учитываемые при вычислениях. Рассчитывались все моды, у которых мнимая часть собственных чисел была меньше 0.025 м^{-1} . Вклад остальных мод не приводил к изменению амплитуды поля на расстоянии 353 м. В табл. 2 приведены данные о числе и типах учитываемых мод. Как видно, рассматривались не только нормальные распространяющиеся моды, но также нормальные вытекающие моды и относящиеся к классу вытекающих – квазимоды. Подробнее о типах мод см. [15]. Отметим только, что вытекающие моды относительно глубоко проникают в дно, в отличие от распространяющихся мод.

На втором этапе расчетов параметры дна, полученные на первом этапе, рассматривались как начальное приближение, в окрестности которого простым перебором значений (c_1, ρ_1, β_f) был проведен поиск глобального минимума невязки в трехмерном пространстве. Расчеты показали, что при каждом фиксированном β_f минимум невязки $\sigma(c_1, \rho_1)$ хорошо локализуется, и его положение

Таблица 2. Число и типы учитываемых мод

Пористость	Полное число учитываемых мод M	Число нормальных распространяющихся мод	Число нормальных вытекающих мод	Число квазимод
0.1	43	32	11	—
0.2	42	28	14	—
0.3	41	24	17	—
0.4	40	19	21	—
0.5	37	12	25	—
0.6	35	—	35	—
0.7	33	—	8	25
0.8	29	—	7	22
0.9	27	2	5	20

на плоскости (c_1, ρ_1) практически не зависит от значения β_f . Вместе с этим, по оси β_f локализация минимума невязки не была обнаружена.

По этой причине искомым значением потерь в дне было выбрано значение, полученное с помощью формулы Гамильтона (6): $\beta_f = 0.45$ дБ/км/Гц. При данном β_f функция невязки $\sigma(c_1, \rho_1)$ приведена на рис. 6. Глобальный минимум невязки, равный $\sigma = 0.132$, достигается при оптимальных (адекватных истинным) параметрах дна $c_1 = 1670$ м/с, $\rho_1 = 1500$ кг/м³. При этом вычисления проводились с шагом по скорости звука 10 м/с, с шагом по плотности 100 кг/м³. Заметим, что при оптимальном наборе параметров дна число учитываемых мод было 37, из них 23 моды — распространяющиеся,

остальные 14 мод — нормальные вытекающие. Квазимод в числе учитываемых 37 мод не было.

На рис. 6 пунктиром изображена линия, параметрически описываемая формулами Эйкала (4) и (5). Точки на пунктирной линии соответствуют указанным значениям пористости, причем в приведенном диапазоне $\kappa = 0.3-0.33$ значение потерь в дне практически одинаково и равно $\beta_f \approx 0.45$ дБ/км/Гц. Заметим, что после первого этапа расчетов параметры дна соответствовали точке $\kappa = 0.3$.

На рис. 4а показаны зависимости амплитуд от глубины: экспериментальная и теоретическая, полученная при оптимальных параметрах дна после второго этапа расчетов. Для удобства восприятия точки с шагом 3.46 м, соответствующие расположению приемных гидрофонов, соединены прямыми линиями, хотя, как показывает подробный расчет теоретической зависимости с шагом 0.01 м, приведенный на рис. 4б, реальная изрезанность поля по глубине выражена гораздо сильнее.

Заметим, что вследствие этой изрезанности небольшие вариации в предполагаемом положении приемной цепочки по вертикали в целом приводят к заметному изменению расчетных значений поля в местах расположения приемных гидрофонов и, соответственно, к заметному изменению невязки с экспериментом. Расчеты показали, что минимум невязки наблюдается при положении цепочки, сдвинутом на 0.5 м вниз относительно первоначальных экспериментальных оценок¹. Это составляет 1.2% от глубины моря в месте установки цепочки. При этом возможный наклон цепочки не учитывался. Можно предположить, что скорректированное положение цепочки, приводящее к минимальной невязке, является её истинным положением. По этой причине

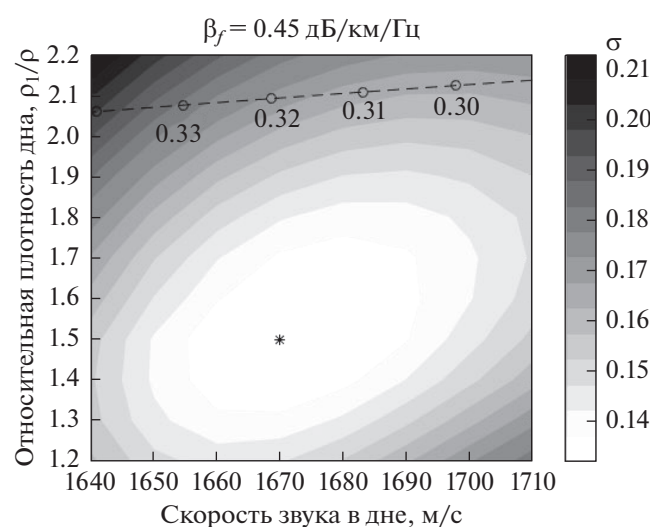


Рис. 6. Невязка как функция скорости звука в дне и относительной плотности дна. Минимум невязки показан звездочкой.

¹ Речь идет об оценках, полученных неакустическими методами при измерениях глубин погружения несущего фала и закрепленной на нем цепочки с гидрофонами.

не итоговые расчеты по определению параметров дна проводились для этого скорректированного положения цепочки, описываемого формулой (1), где учтен этот сдвиг. Результаты расчетов на рис. 4–6а также приведены для скорректированного положения цепочки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Очевидно, что полученные оценки эффективных акустических параметров дна на озере Байкал ($c_1 = 1670$ м/с, $\rho_1 = 1500$ кг/м³, $\beta_f = 0.45$ дБ/км/Гц) нельзя считать достоверными для всей акватории этого озера. Скорее всего, даже в мелководной ее части имеет место заметная изменчивость величин c_1 , ρ_1 , β_f , обусловленная выносом осадочных пород многочисленными реками. Однако развитая в настоящей работе методика демонстрирует принципиальную возможность оценки этих параметров, во-первых, на небольших (сотни метров) расстояниях от источника звука, когда акустическое поле формируется не только распространяющимися, но и вытекающими модами и, во-вторых, при наличии ледового покрова. Последнее, в том числе, возможно при использовании приближенных расчетных соотношений, приведенных в приложении к настоящей статье и позволяющих существенным образом увеличить скорость вычислений. Указанную методику можно рекомендовать для применения на мелководном арктическом шельфе России.

Заметим здесь также, что акустические методы оценки пространственного распределения скорости звука в верхнем слое донных осадочных хорошо разработаны [16, 17] и лежат в основе современной инженерной сейсморазведки. Они позволяют определять поле скорости звука с горизонтальным пространственным разрешением в несколько десятков метров. Однако такое разрешение для задач акустического мониторинга, упомянутых во введении, как правило, является избыточным, тогда как сама сейсморазведка является высоко затратной методикой. Она применима только в акваториях, где, по крайней мере, в некоторые сезоны года отсутствует ледовый покров. Кроме того, в этой методике не предусмотрена оценка плотности донных осадков, которая определяется при сопутствующем малоуглубинном бурении. Это еще многократно увеличивает стоимость исследований. Учет этих особенностей инженерной сейсморазведки служит дополнительным аргументом в пользу применения методов, развитых в настоящей работе.

Авторы выражают благодарность М.В. Волкову и А.В. Шатравину за помощь в проведении экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 19-02-00127.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

МОДОВОЕ ОПИСАНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В МЕЛКОВОДНОМ ВОЛНОВОДЕ С ЛЕДОВЫМ ПОКРОВОМ

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим модельный волновод, изображенный на рис. 3. Волновод представляет собой водный слой переменной толщины $H(r)$, ограниченный сверху однородным упругим слоем (льдом) постоянной толщины h , снизу – однородным жидким полупространством (дном). Начало цилиндрической системы координат (r, z, ϕ) выбрано на границе вода–лед, где r – горизонтальная ось, угол ϕ отсчитывается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси z . С целью исключения в модели горизонтальной рефракции акустических волн модельный волновод полагаем цилиндрически симметричным относительно оси z , на которой в точке с координатой z_0 в водном слое находится точечный источник звука частоты $\omega = 2\pi f$. При такой геометрии поле в волноводе не зависит от угла ϕ , а зависит только от координат (r, z) .

Обозначим параметры рассматриваемых сред: $c(z)$, c_1 , c_2 – скорости продольных волн в воде, дне и льду, соответственно; c_s – скорость поперечных волн во льду; ρ , ρ_1 , ρ_2 – плотности воды, дна и льда, соответственно; α_1 , α_2 – безразмерные коэффициенты потерь продольных волн для дна и льда, соответственно; α_s – безразмерный коэффициент потерь поперечных волн для льда. Коэффициенты потерь определяют мнимую часть

волновых чисел $k_{1,2,S} = \frac{\omega}{c_{1,2,S}} \left(1 + i \frac{\alpha_{1,2,S}}{2} \right) = \frac{\omega}{\dot{c}_{1,2,S}}$, где

обозначено $\dot{c}_{1,2,S} = \frac{c_{1,2,S}}{1 + i\alpha_{1,2,S}/2}$. Связь безразмерных

коэффициентов потерь (α_1 , α_2 , α_s) с коэффициентами затухания (β_f , β_{2f} , β_{sf}), используемыми при

расчетах, имеет вид $\beta_{f, 2f, sf} \left[\frac{\text{дБ}}{\text{км Гц}} \right] = \frac{27.3\alpha_{1,2,S}}{c_{1,2,S} [\text{км/с}]}$.

Прежде чем искать поле для горизонтально неоднородного волновода, у которого $H(r) \neq \text{const}$, решим задачу для горизонтально однородного волновода, у которого $H = \text{const}$.

Запишем звуковое давление в воде и дне в виде $p = \text{Re}\{P \exp(-i\omega t)\}$ и $p_1 = \text{Re}\{P_1 \exp(-i\omega t)\}$, где P и P_1 – комплексная амплитуда давления в соответствующих средах, t – время. В упругом слое льда аналогом давления является тензор напряжения $p_2 = \text{Re}\{P_2 \exp(-i\omega t)\}$, который в случае поля цилиндрической симметрии имеет вид

$$P_2 = \begin{pmatrix} P_{2rr} & P_{2rz} & 0 \\ P_{2zr} & P_{2zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A1})$$

Учитывая наличие упругой среды, нахождение поля в волноводе проводится с использованием понятия потенциалов. Пусть \mathbf{u} , \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 – вектора смещений частиц соответственно в воде, дне и льду. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \text{grad } \varphi, \\ \mathbf{u}_1 &= \text{grad } \varphi_1, \\ \mathbf{u}_2 &= \text{grad } \varphi_2 + \text{rot } \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

где φ , φ_1 , φ_2 – скалярные потенциалы, описывающие продольные волны в соответствующих средах, \mathbf{s} – векторный потенциал, описывающий поперечные волны во льду. Для поля цилиндрической симметрии все функции в (A2) зависят от координат (r, z) . При этом векторный потенциал имеет отличную от нуля только φ -компоненту и представляется в виде $\mathbf{s} = (0, 0, -\partial\theta/\partial r)$, где θ – скалярная функция векторного потенциала.

Для тонального источника после перехода к комплексным амплитудам

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,2}, \varphi, \varphi_{1,2}, \theta) &= \\ = \text{Re}\{(\mathbf{U}, \mathbf{U}_{1,2}, \Phi, \Phi_{1,2}, \Theta) \exp(-i\omega t)\} \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

справедливы уравнения Гельмгольца

$$\mathbf{L}\Phi = -\frac{A_0}{\rho\omega^2} \delta_0, \quad \mathbf{L}_{1,2}\Phi_{1,2} = 0, \quad \mathbf{L}_S\Theta = 0, \quad (\text{A4})$$

где $\mathbf{L} = \Delta + k^2$, $\mathbf{L}_{1,2,S} = \Delta + k_{1,2,S}^2$ – операторы Гельмгольца, $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа для

поля цилиндрической симметрии, $\delta_0 = \delta(z - z_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r}$,

$\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, $k = \frac{\omega}{c(z)}$, A_0 – коэффициент, характеризующий мощность и начальную фазу источника (при последующих расчетах A_0 не понадобится, т.к. исчезнет при нормировке поля).

Граничные условия на границах сред имеют вид

$$G\{\Phi, \Phi_{1,2}, \Theta\} = \begin{cases} z = -h: P_{2zr} = 0, & P_{2zz} = 0, \\ z = 0: U_z = U_{2z}, & P = -P_{2zz}, & P_{2zr} = 0, \\ z = H: U_z = U_{1z}, & P = P_1, \end{cases} \quad (\text{A5})$$

$$P = \rho\omega^2\Phi, \quad P_1 = \rho_1\omega^2\Phi_1,$$

$$U_z = \Phi', \quad U_{1z} = \Phi_1',$$

$$U_{2z} = \Phi_2' + \Theta'' + k_S^2\Theta, \quad (\text{A6})$$

$$P_{2zz} = -\hat{\lambda}_2 k_2^2 \Phi_2 + 2\hat{\mu}_2 U_{2z}',$$

$$P_{2zr} = 2\hat{\mu}_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\Phi_2' + \Theta'' + k_S^2 \Theta / 2 \right),$$

где U_z , $U_{1,2z}$ – z -компоненты векторов \mathbf{U} и $\mathbf{U}_{1,2}$, $\hat{\lambda}_2 = \rho_2 (\dot{c}_2^2 - 2\dot{c}_S^2)$, $\hat{\mu}_2 = \rho_2 \dot{c}_S^2$ – комплексные коэффициенты Ламэ, штрих в (A6) и далее означает производную по z .

Формулы (A4)–(A6) написаны на основе теории, изложенной в [18], но в отличие от [18] учтены потери во льду и дне. Аналогичные выражения приведены также в [8], но при другой конфигурации жидких и упругих сред.

Дополнительными условиями, выделяющими единственное решение уравнений (A4) с граничными условиями (A5), являются: 1) условие распространения волн в дне в направлении от источника, 2) условие излучения на бесконечности. Второе условие для дна в виде жидкого поглощающего полупространства сводится к ограниченности амплитуды волн на бесконечности [19]. Если через C_1 и C_2 обозначить классы функций, соответствующие первому и второму дополнительным условиям, то они запишутся в виде

$$\Phi_1 \in C_1, \quad \Phi_1 \in C_2. \quad (\text{A7})$$

4.2. Решение задачи

Задача (A4)–(A7) при $H = \text{const}$ имеет точное решение (вывод аналогичен [8, 11]). Для поля давления P в водном слое волновода ($0 \leq z \leq H$) точное решение имеет вид

$$P = \frac{A_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, z_0) V(\xi, z_0)}{W(\xi)} H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \quad (\text{A8})$$

где функции $U(\xi, z)$ и $V(\xi, z)$ являются решениями задач

$$\begin{aligned} U'' + \varepsilon^2 U &= 0, \quad [U + gU']_{z=H} = 0, \\ V'' + \varepsilon^2 V &= 0, \quad [V + g_2 V']_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

$\varepsilon = \sqrt{k^2 - \xi^2}$, $z_> = \max(z, z_0)$, $z_< = \min(z, z_0)$, $H_0^{(1)}(\cdot)$ – функция Ханкеля первого рода, $W(\xi) = UV' - VU'$ – определитель Вронского, который не зависит от z .

Функции $g = g(\xi)$ и $g_2 = g_2(\xi)$ определяются из граничных условий на нижней и верхней гра-

ницах водного слоя, соответственно, и могут быть представлены в виде

$$g = \frac{im_1}{\varepsilon_1}, \quad (A10)$$

$$g_2 = \frac{m_2}{k_S^4} \cdot \frac{a^2(A_{41} + A_{42}) + 2d(aA_{44} - D)}{2aA_{32} + 2dA_{34} - D}, \quad (A11)$$

где $m_{1,2} = \frac{\rho_{1,2}}{\rho}$, $\varepsilon_{1,2,S} = \sqrt{k_{1,2,S}^2 - \xi^2}$, $a = k_S^2 - 2\xi^2$, $d = 2i\varepsilon_S \xi^2$, $E_{2,S} = \exp(i\varepsilon_{2,S}h)$, $D = \det A$ – определитель матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} -2i\varepsilon_2 E_2^{-1} & 2i\varepsilon_2 E_2 & aE_S^{-1} & aE_S \\ aE_2^{-1} & aE_2 & -dE_S^{-1} & dE_S \\ a & a & -d & d \\ i\varepsilon_2 & -i\varepsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы A (первый индекс – строка, второй индекс – столбец, M_{ij} – минор матрицы A , равный определителю оставшейся матрицы при вычеркивании i -й строки и j -го столбца).

Все радикалы $\sqrt{\cdot}$ в приведенных выше формулах и далее по тексту понимаются однозначно – как главное значение² комплексного квадратного корня, у которого $\text{Re} \sqrt{\cdot} > 0$. Если $\text{Re} \sqrt{\cdot} = 0$, то выбирается значение, у которого $\text{Im} \sqrt{\cdot} > 0$.

Интеграл (A8) может быть преобразован согласно теории вычетов в сумму дискретного спектра (сумма вычетов в полюсах ξ_m , удовлетворяющих равенству $W(\xi_m) = 0$ на множестве комплексных ξ при $\text{Im} \xi > 0$) и непрерывного спектра (интеграл по берегам разреза от точки ветвления k_1). Пренебрегая непрерывным спектром, запишем приближенное решение задачи (A4)–(A7) при $H = \text{const}$ в виде дискретного спектра:

$$P = \frac{iA_0}{4} \sum_{m=1}^M \psi_m(z_0) \psi_m(z) H_0^{(1)}(\xi_m r), \quad (A12)$$

где M – учитываемое число мод дискретного спектра, $\psi_m(z)$ и ξ_m – нормированные собственные функции и собственные значения (полюса) задачи Штурма–Лиувилля для области $0 \leq z \leq H$:

² Второе неглавное значение комплексного квадратного корня отличается от главного значения знаком.

$$\psi_m'' + \varepsilon_m^2 \psi_m = 0, \quad \psi_m(0) + g_{2m} \psi_m'(0) = 0,$$

$$\psi_m(H) + g_m \psi_m'(H) = 0, \quad (A13)$$

$$\int_0^H \psi_m^2(z) dz + b_m \psi_m^2(H) = 1,$$

где ε_m , g_{2m} , g_m , b_m – значения функций $\varepsilon(\xi)$, $g_2(\xi)$, $g(\xi)$, $b(\xi) = \frac{i}{2m_1 \varepsilon_1}$ в точке $\xi = \xi_m$.

В частном случае при $c = \text{const}$ собственные значения ξ_m определяются как корни уравнения:

$$(1 + g_{2m} g_m \varepsilon_m^2) \sin(\varepsilon_m H) + (g_m - g_{2m}) \varepsilon_m \cos(\varepsilon_m H) = 0. \quad (A14)$$

При этом собственные функции равны:

$$\psi_m(z) = N_m [\sin(\varepsilon_m z) - g_{2m} \varepsilon_m \cos(\varepsilon_m z)], \quad (A15)$$

где N_m – коэффициент нормировки, определяемый из условия нормировки (последнее равенство в (A13)):

$$N_m = \left[\int_0^H (\sin(\varepsilon_m z) - g_{2m} \varepsilon_m \cos(\varepsilon_m z))^2 dz + b_m (\sin(\varepsilon_m H) - g_{2m} \varepsilon_m \cos(\varepsilon_m H))^2 \right]^{-1/2}. \quad (A16)$$

Заметим, что формулы для волновода безо льда получаются при $g_2 = g_{2m} = 0$.

Определенное выше правило понимания радикала $\sqrt{\cdot}$, как главного значения корня для действительных и комплексных ξ , приводит к бесконечному количеству полюсов ξ_m , а значит и числу мод M . Данное правило соответствует M -разрезу на комплексной плоскости, идущему от точки ветвления k_1 по гиперболе $\text{Im} \xi = \text{Re} k_1 \text{Im} k_1 / \text{Re} \xi$ при $\text{Re} \xi \geq \text{Re} k_1$ [15]. На практике M -разрез эквивалентен разрезу Пекериса, идущему от точки k_1 вертикально вверх, поскольку дает такие же полюса и моды. Среди бесконечного числа мод, как правило, имеется конечное число нормальных мод и бесконечное число квазимод. Как показано в [15], учет квазимод дает хорошее приближение к точному решению на коротких расстояниях $r \sim (1 \dots 10) H$.

В данной работе расстояние от источника $r \sim 7H$, поэтому необходимо учитывать моды всех типов: нормальные (распространяющиеся и вытекающие) и квазимоды, принадлежащие к классу вытекающих мод. Общее количество учитываемых мод M необходимо выбирать таким, чтобы прибавление новых мод практически не влияло на результат расчета дискретного спектра поля.

Для волновода с плавным изменением толщины водного слоя $H(r)$, решение для поля при $0 \leq z \leq H$ может быть записано в адиабатическом приближении [6]:

$$P = \frac{A_0 \exp(-i\pi/4)}{\sqrt{8\pi}} \times \sum_{m=1}^M \Psi_m(0, z) \frac{\Psi_m(r, z)}{\sqrt{q_m(r)} r} \exp\left(i \int_0^r \xi_m(r') dr'\right), \quad (\text{A17})$$

где $\Psi_m(r, z)$ и $\xi_m(r)$ – собственные функции и собственные значения, вычисленные согласно (A13)–(A16), при каждом поперечном сечении волновода для фиксированного значения r , $q_m(r) = \text{Re } \xi_m(r)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Worcester P.F., Dzieciuch M.A., Sagen H. Ocean acoustics in the rapidly changing arctic // *Acoustics Today*. 2020. V. 16. № 1. P. 55–64.
2. Lynch J.F., Lin Y.T., Duda T.F., Newhall A.F. Acoustic ducting, reflection, refraction, and dispersion by curved nonlinear internal waves in shallow water // *IEEE J. Oceanic Eng.* 2010. V. 35. № 1. P. 12–27.
3. Katsnelson B., Katsman R., Lunkov A., Ostrovsky I. Acoustical methodology for determination of gas content in aquatic sediments, with application to Lake Kinneret, Israel, as a case study // *Limnology and Oceanography: Methods*. 2017. T. 15. № 6. С. 531–541.
4. Рутенко А.Н., Гаврилевский А.В., Путов В.Ф., Соловьев А.А., Манульчев Д.С. Мониторинг антропогенных шумов на шельфе о. Сахалин во время сейсморазведочных исследований // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 3. С. 348–362.
5. Григорьев В.А., Луньков А.А., Петников В.Г., Шатравин А.В. Оценка возможностей идентификации гренландских китов на арктическом шельфе // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 5. С. 596–607.
6. Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J. *Fundamentals of Shallow Water Acoustics*. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2012.
7. Григорьев В.А., Петников В.Г., Росляков А.Г., Терехина Я.Е. Распространение звука в мелком море с неоднородным газонасыщенным дном // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 3. С. 342–358.
8. Григорьев В.А., Петников В.Г., Шатравин А.В. Звуковое поле в мелководном волноводе арктического типа с дном, содержащим газонасыщенный осадочный слой // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 4. С. 389–405.
9. Кацнельсон Б.Г., Кулапин Л.Г., Мигулин А.А., Петников В.Г. Влияние гидродинамической изменчивости на вертикальную интерференционную структуру звукового поля в волноводе // *Акуст. журн.* 1992. Т. 38. № 2. С. 308–316.
10. Шерстянкин П.П., Колотило Л.Г., Тарасюк Ю.Ф., Куимова Л.Н., Иванов В.Г., Блинов В.В. О скорости звука в Байкале // *Докл. Акад. наук.* 2002. Т. 386. № 1. С. 103–107.
11. Collis J.M., Frank S.D., Metzler A.M., Preston K.S. Elastic parabolic equation and normal mode solutions for seismo-acoustic propagation in underwater environments with ice covers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 139. № 5. P. 2672–2682.
12. Millero F.J., Chen C.T., Bradshaw A., Schleicher K. A new high pressure equation of state for seawater // *Deep-Sea Research*. 1980. V. 27A. P. 255–264.
13. Akal T. The relationship between the physical properties of underwater sediments that affect bottom reflection // *Marine Geology*. 1972. V. 13. № 4. P. 251–266.
14. Hamilton E.L. Compressional-wave attenuation in marine sediments // *Geophysics*. 1972. V. 37. № 4. P. 620–646.
15. Григорьев В.А., Петников В.Г. О возможности представления акустического поля в мелком море в виде суммы нормальных мод и квазимод // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 6. С. 681–698.
16. Боганик Г.Н., Гурвич И.И. Сейсморазведка. Тверь: Изд-во АИС, 2006.
17. Степанов А.В. Обработка сейсмических данных. Казань: Казанский университет, 2013.
18. Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F. *Elastic Waves in Layered Media*. N.Y.: McGraw-Hill, 1957.
19. Алексеев Г.В. Метод нормальных волн в подводной акустике. Владивосток: Дальнаука, 2006.