
**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

УДК 539.3

**ЧИСЛЕННОЕ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОДА С КОЛЬЦЕВОЙ
ТРЕЩИНОЙ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ**

© 2020 г. А. О. Ватульян^{a, b, *}, В. О. Юров^{a, **}

^aЮжный федеральный университет, Большая Садовая ул. 105/42, Ростов-на-Дону, 344006 Россия

^bЮжный математический институт – филиал ВНИИ РАН, Маркуса ул. 22, Владикавказ, 362027 Россия

*e-mail: vatumyan@math.rsu.ru

**e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.01.2020 г.

После доработки 23.04.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Рассмотрена задача о волнах в неоднородном цилиндрическом волноводе с кольцевой трещиной. Получена система интегральных уравнений с гиперсингулярными ядрами для отыскания скачков радиальных и продольных перемещений на берегах трещины. Для решения использована схема, основанная на методе граничных элементов. Построено асимптотическое решение системы интегральных уравнений при стремлении ширины дефекта к нулю. Приведены результаты вычислительных экспериментов по сравнению решений, полученных двумя методами.

Ключевые слова: цилиндрический волновод, неоднородность, трещина, система интегральных уравнений, асимптотический анализ

DOI: 10.31857/S0320791920050147

ВВЕДЕНИЕ

Использование новых материалов влечет за собой активное развитие методов неразрушающего контроля для изготовленных из них конструктивных элементов. В этом процессе свою нишу занимает исследование распространения волн в неоднородных волноводах. При том, что однородные волноводы исследованы достаточно подробно [1] на основе аналитических методов, исследование волновых процессов в функционально-градиентных и кусочно-неоднородных волноводах осуществляется в основном численно. Для успешного решения обратной задачи по идентификации скрытых (внутренних) дефектов требуется развитие методик решения прямых задач о распространении волн в неоднородных волноводах с дефектами. Для исследования волновых процессов в однородных структурах с дефектами в основном используются методы, базирующиеся на закономерностях распространения волн Лэмба [2]. В [3] осуществляется идентификация размеров и глубины отслоения по изменению резонансных частот. Дальнейшее продвижение в исследовании волновых процессов в неоднородных структурах осуществляется обычно разбиением на кусочно-однородные области либо построением решений для неоднородностей простого вида.

Экспоненциальный закон использован в [4] для описания деформирования неоднородной плоскости с разрезом. В работе [5] найден способ построения приближенного решения задачи о дискообразной трещине в функционально-градиентном пространстве путем рассмотрения задачи, в которой произвольный закон неоднородности заменяется аппроксимацией некоторой системой функций.

Математический аппарат для решения задач о волнах в протяженных объектах с дефектами обычно основывается на применении метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) [6, 7] или применении метода конечных элементов (МКЭ) [8, 9], дополненного неотражающими граничными условиями. ГИУ возникают при решении задач с раскрытыми трещинами, причем интегральные уравнения формируются относительно скачков перемещений и являются гиперсингулярными. При использовании МКЭ основной проблемой является корректный переход от неограниченной структуры к ограниченной и выявление структуры решения в окрестности вершин трещин.

В рамках первого подхода можно выделить различные способы решения задачи. Так, в [6] методом разложения в ряд по параметру решена задача о трещине на границе полосы и полуплос-

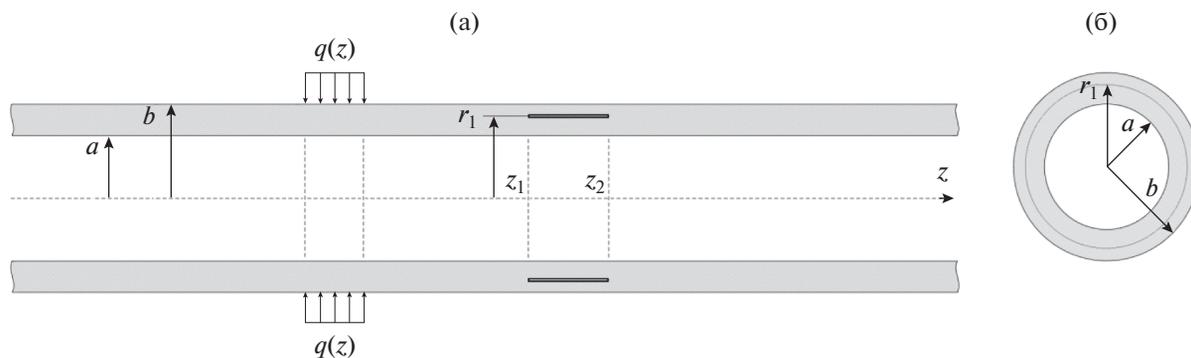


Рис. 1. Геометрия задачи: (а) – продольное сечение, (б) – поперечное сечение.

кости; решение зависит от соотношения упругих модулей на границе раздела сред. Составлена и решена на основе метода “больших λ ” система интегральных уравнений с гиперсингулярными ядрами. Другой способ нахождения решения основан на построении интерполяционных многочленов для функций раскрытия и сведения задачи к решению алгебраической системы. Таким методом в статье [10] решена задача для полосы с трещиной, заполненной клеевым составом. В [11] решена задача о полосовой трещине на границе двух полупространств. Для решения возникающего гиперсингулярного ГИУ применялся метод Бубнова–Галеркина с разложением по ортогональным полиномам Чебышева второго рода. Построены асимптотики ядер интегральных уравнений, предложена формула, уточняющая квазистатическое приближение. В работе [12] исследовано явление блокирования волн в полуплоскости и в слое с продольной трещиной. Для полуплоскости решение строится аналогично работе [11], а для полосы осуществляется разложение решения ГИУ по нормальным модам, и задача сведена к бесконечной алгебраической системе.

В рамках второго подхода возможно моделирование волновода практически любой формы, содержащего дефекты любой природы в ограниченной области. В работе [8] решение задачи строится путем сопряжения численного решения в конечной неоднородной области с аналитическими решениями в полубесконечных областях. В [9] для расчета полей в неограниченном теле с дефектом применен МКЭ совместно с масштабированными граничными условиями (разновидность граничных условий неотражающего типа).

В настоящем исследовании использован метод ГИУ. В силу переменности коэффициентов дифференциального оператора, возникающего во вспомогательной задаче для трансформант Фурье, не удастся применить методика учета трещины путем добавления в уравнение массовых сил [13]. Ядра системы интегральных уравнений относительно скачков перемещений построены на

основе решения вспомогательных задач Коши в пространстве трансформант [14], а само решение ГИУ построено на основе метода граничных элементов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим волны в неоднородном по радиальной координате цилиндрическом волноводе с кольцевым поперечным сечением ($a \leq r \leq b$), содержащем осесимметричную область с отслоением (замкнутая трещина конечной ширины, занимающая область $\{(r, \varphi, z): r = r_1, \varphi \in [0, 2\pi), z_1 \leq z \leq z_2\}$). Колебания волновода вызываются действием распределенной осесимметричной нагрузки на внешней границе волновода $q(z)$ (рис. 1). Внутренняя граница волновода и берега отслоения свободны от напряжений, т.е. трещина считается раскрытой. Осесимметричная форма уравнений установившихся колебаний с частотой ω в цилиндрической системе координат имеет вид [15]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \rho \omega^2 u_r = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho \omega^2 u_z = 0. \end{cases}$$

Компоненты тензора напряжений Коши для изотропного цилиндра выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_\varphi &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \sigma_z &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

где u_r, u_z – компоненты вектора перемещений, $\sigma_r, \sigma_{rz}, \sigma_{zr}, \sigma_\phi, \sigma_z$ – компоненты тензора напряжений Коши, λ, μ – параметры Ламе, которые также могут зависеть от радиальной координаты. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [16].

Введем следующие безразмерные параметры и переменные:

$$\begin{aligned} x &= rb^{-1}, \quad \xi_0 = ab^{-1}, \quad y = zb^{-1}, \quad \mu_0 = \mu(\xi_0), \\ u_r &= bX_1, \quad u_z = ibX_2, \\ \sigma_r &= \mu_0 X_3, \quad \sigma_{rz} = i\mu_0 X_4, \quad \kappa^2 \mu_0 = \rho \omega^2 b^2, \\ \lambda &= \mu_0 g_1, \quad \mu = \mu_0 g_2, \quad G = g_1 + 2g_2. \end{aligned}$$

Цилиндрическая поверхность отслоения в безразмерных координатах задается множеством $\{(x, y): x = \xi_1 \in (\xi_0, 1), y \in [-l_0, l_0]\}$. Здесь и далее в силу осевой симметрии задачи опущено условие на окружную координату $\phi \in [0, 2\pi)$. Будем считать, что внешняя нормальная нагрузка, вызывающая распространение волн в волноводе, приложена в области $\{(x, y): x = 1, y \in [l_1, l_2]\}$.

Выполним интегральное преобразование Фурье вдоль продольной координаты в областях $S_1 = \{(x, y): \xi_0 \leq x \leq \xi_1, -\infty < y < \infty\}$ и $S_2 = \{(x, y): \xi_1 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}$ при условии, что известно поле перемещений на условной границе $x = \xi_1$, базируясь на работе [14]. Введем следующее обозначение для трансформант

$$\tilde{\mathbf{X}}(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(x, y) e^{i\alpha y} dy. \quad (1)$$

С целью исследования произвольной неоднородности, связанной с переменностью упругих параметров, сформируем каноническую систему дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{X}}' = (\mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \alpha \mathbf{A}_1 + \alpha^2 \mathbf{A}_2) \tilde{\mathbf{X}}, \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4)^T$.

Приведем лишь ненулевые коэффициенты матриц:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 : a_{11}^0 &= -g_1 (xG)^{-1}, \quad a_{13}^0 = G^{-1}, \quad a_{24}^0 = g_2^{-1}, \\ a_{31}^0 &= (G^2 - g_1^2) (x^2 G)^{-1}, \quad a_{33}^0 = -2g_2 (xG)^{-1}, \\ a_{44}^0 &= -x^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{01} : a_{31}^{01} &= a_{42}^{01} = 1; \\ \mathbf{A}_1 : a_{12}^1 &= g_1 G^{-1}, \quad a_{21}^1 = -1, \\ a_{32}^1 &= a_{41}^1 = -2g_1 g_2 (xG)^{-1}, \quad a_{34}^1 = 1, \\ a_{43}^1 &= -a_{12}^1; \\ \mathbf{A}_2 : a_{42}^2 &= (G^2 - g_1^2) G^{-1}. \end{aligned}$$

Введенные в уравнении (2) матрицы имеют переменные коэффициенты, являющиеся рациональными функциями относительно $x, x^2, g_1(x), g_2(x)$ и ограниченными в силу условий $g_1(x), g_2(x) > 0, \xi_0 > 0$. Таким образом, решение уравнения (2) может быть построено численно как при непрерывных, так и при кусочно-непрерывных функциях $g_1(x), g_2(x)$ с разрывами первого рода.

Сформулируем ряд вспомогательных задач Коши для (2)

$$\tilde{X}_1^{(1)}(\xi_0) = 1, \quad \tilde{X}_2^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad (3)$$

$$\tilde{X}_3^{(1)}(\xi_0) = \tilde{X}_4^{(1)}(\xi_0) = 0,$$

$$\tilde{X}_1^{(2)}(\xi_0) = 0, \quad \tilde{X}_2^{(2)}(\xi_0) = 1, \quad (4)$$

$$\tilde{X}_3^{(2)}(\xi_0) = \tilde{X}_4^{(2)}(\xi_0) = 0,$$

$$\tilde{X}_1^{(3)}(1) = 1, \quad \tilde{X}_2^{(3)}(1) = 0, \quad (5)$$

$$\tilde{X}_3^{(3)}(1) = \tilde{X}_4^{(3)}(1) = 0,$$

$$\tilde{X}_1^{(4)}(1) = 0, \quad \tilde{X}_2^{(4)}(1) = 1, \quad (6)$$

$$\tilde{X}_3^{(4)}(1) = \tilde{X}_4^{(4)}(1) = 0.$$

Векторы $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(2)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(3)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(4)}$ являются решениями уравнения (2) с граничными условиями (3), (4), (5) и (6), соответственно. Для их численного нахождения использованы схемы Рунге–Кутты 4–5 порядка.

Пусть колебания волновода вызваны нагрузкой $q(z) = \delta(z)$, приложенной на его внешней границе, а внутренняя граница свободна от напряжений. Решение этой задачи в пространстве трансформант строится как линейная комбинация $\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)} = q_1 \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} + q_2 \tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$. Рассматриваемое $\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}$ автоматически удовлетворяет граничным условиям на границе $x = \xi_0$. Выбирая q_1, q_2 , обеспечим выполнение следующих условий $\tilde{Z}_3^{(0)}(1) = 1, \tilde{Z}_4^{(0)}(1) = 0$ на границе $x = 1$. Для этого решим систему

$$\begin{cases} q_1 \tilde{X}_3^{(1)}(1) + q_2 \tilde{X}_3^{(2)}(1) = 1, \\ q_1 \tilde{X}_4^{(1)}(1) + q_2 \tilde{X}_4^{(2)}(1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Теперь сконструируем решения, которые дают единичные скачки радиальных и продольных перемещений на трещине для задачи в трансформантах. Составим следующие линейные

комбинации $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)} = p_1\tilde{\mathbf{X}}^{(1)} + p_2\tilde{\mathbf{X}}^{(2)} + p_3\tilde{\mathbf{X}}^{(3)} + p_4\tilde{\mathbf{X}}^{(4)}$, $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)} = d_1\tilde{\mathbf{X}}^{(1)} + d_2\tilde{\mathbf{X}}^{(2)} + d_3\tilde{\mathbf{X}}^{(3)} + d_4\tilde{\mathbf{X}}^{(4)}$, причем будем считать, что $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{X}}^{(2)} \equiv 0$ в S_2/S_1 и $\tilde{\mathbf{X}}^{(3)} = \tilde{\mathbf{X}}^{(4)} \equiv 0$ в S_1/S_2 . Тогда $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}$ удовлетворяют граничным условиям отсутствия напряжений на границах $x = \xi_0$ и $x = 1$. Обеспечим единичный скачок радиальных перемещений $\tilde{Z}_1^{(1)}$ и непрерывность компонент $\tilde{Z}_2^{(1)}$, $\tilde{Z}_3^{(1)}$, $\tilde{Z}_4^{(1)}$ на границе $x = \xi_1$ для решения $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$, а также единичный скачок продольных перемещений $\tilde{Z}_2^{(2)}$ и непрерывность $\tilde{Z}_1^{(2)}$, $\tilde{Z}_3^{(2)}$, $\tilde{Z}_4^{(2)}$ для $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}$, соответственно. Для этого решим следующие алгебраические системы, записанные в сокращенной форме

$$p_1\tilde{X}_i^{(1)}(\xi_1) + p_2\tilde{X}_i^{(2)}(\xi_1) - p_3\tilde{X}_i^{(3)}(\xi_1) - p_4\tilde{X}_i^{(4)}(\xi_1) = -\delta_{1i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

$$d_1\tilde{X}_i^{(1)}(\xi_1) + d_2\tilde{X}_i^{(2)}(\xi_1) - d_3\tilde{X}_i^{(3)}(\xi_1) - d_4\tilde{X}_i^{(4)}(\xi_1) = -\delta_{2i}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (9)$$

Сформулированные выше линейные комбинации $\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(x, \alpha)$, $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(x, \alpha)$, $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(x, \alpha)$ позволяют составить решение задачи о колебаниях волновода с отслоением под действием внешней распределенной нагрузки в пространстве трансформант и тогда

$$\tilde{\mathbf{Z}}(x, \alpha) = Q(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(x, \alpha) + \tilde{\chi}_1(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(x, \alpha) + \tilde{\chi}_2(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(x, \alpha), \quad (10)$$

где $Q(\alpha) = \int_{l_1}^{l_2} q(y)e^{i\alpha y} dy$ – трансформанта внешней нагрузки, приложенной в радиальном направлении, причем при $q(y) = q_0 = \text{const}$, $Q(\alpha) = iq_0(\exp(i\alpha l_1) - \exp(i\alpha l_2))\alpha^{-1}$; $\tilde{\chi}_1(\alpha)$ и $\tilde{\chi}_2(\alpha)$ – трансформанты от неизвестных скачков радиальных и продольных перемещений на отслоении.

Далее для выполнения условия равенства нулю оригинала вектора напряжений на берегах отслоения необходимо найти оригиналы полей, осуществляя обратное преобразование Фурье по формуле

$$\mathbf{Z}(x, y) = \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{\mathbf{Z}}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha. \quad (11)$$

Здесь контур Γ совпадает с $[-\infty, \infty]$ всюду, за исключением полюсов подынтегральной функции, которые он огибает в соответствии с принципом предельного поглощения [16]. Подставляя решение (10) в формулу (11), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(x, y) &= \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int Q(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{\chi}_1(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{\chi}_2(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\tilde{\chi}_j(\alpha) = \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(y) e^{i\alpha y} dy, \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

В соответствии с граничными условиями компоненты Z_3, Z_4 решения (12) обращаются в нуль на берегах отслоения. Это условие будет использовано для нахождения неизвестных функций $\chi_1(y), \chi_2(y)$.

Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{f}(y) = -\frac{1}{2\pi_\Gamma} \int Q(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(\xi_1, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha$. Учитывая представление (13), изменим во втором и третьем слагаемом в (12) порядок интегрирования

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{\chi}_j(\alpha)\tilde{\mathbf{Z}}^{(j)}(\xi_1, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \left(\int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\eta) e^{i\alpha\eta} d\eta \right) \tilde{\mathbf{Z}}^{(j)}(\xi_1, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha = \\ &= \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\eta) \mathbf{k}_j(\eta - y) d\eta, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{k}_j(\eta - y) = \frac{1}{2\pi_\Gamma} \int \tilde{\mathbf{Z}}^{(j)}(\xi_1, \alpha) e^{i\alpha(\eta - y)} d\alpha, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Из (12) и (14) нетрудно получить следующую систему двух интегральных уравнений относительно скачков $\chi_1(\eta), \chi_2(\eta)$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\eta) k_{js}(\eta - y) d\eta &= f_s(y), \quad s = 3, 4, \\ y &\in [-l_0, l_0]. \end{aligned} \quad (15)$$

Решив систему (15), можно найти поле перемещений на внешней границе волновода по формуле

$$\begin{aligned} X_s(x, y) &= X_s^{\text{эГ}}(x, y) + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\eta) m_{js}(\eta - y) d\eta, \quad s = 1, 2, \end{aligned} \quad (16)$$

где для краткости введено обозначение

$$X_s^{\text{эгр}}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q(\alpha) Z_s^{(0)}(1, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha,$$

$$\mathbf{m}_j(\eta - y) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Gamma} \tilde{Z}^{(j)}(1, \alpha) e^{i\alpha(\eta - y)} d\alpha \right),$$

$$j = 1, 2.$$

При подсчете интегралов $k_{js}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_1, \alpha) e^{i\alpha t} d\alpha$ системы (15) учтем поведение подынтегральной функции на бесконечности. В силу того, что $\tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_1, \alpha)$, $j = 1, 2$, $s = 3, 4$ являются неубывающими функциями $\tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_1, \alpha) = K_{js}^+|\alpha| + K_{js}^-\alpha + O(1)$ при $\alpha \rightarrow \infty$, интегралы являются расходящимися и им надо придать смысл, используя теорию обобщенных функций [17]. Чтобы выделить главные составляющие, соответствующие предельным значениям функций на бесконечности, численно найдем следующие пределы $K_{js} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_1, \alpha)/\alpha)$. Воспользуемся двумя методами для решения задачи.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Система интегральных уравнений (15) для отыскания функций раскрытия может быть решена методом граничных элементов [18]. Разобьем интегралы по отрезку $[-l_0, l_0]$ на сумму интегралов по элементам $[-l_0, l_0] = \bigcup_{p=1}^N \Delta_p$, где $\Delta_p = [-l_0 + (p-1)h, -l_0 + ph]$, $h = 2l_0N^{-1}$; также введем координаты концов элементов $\eta_p = -l_0 + (p-1)h$ и точки коллокаций $y_q = -l_0 + (q-1/2)h$, полагая, что $p = 1..N$, $s = 1..N$. Будем считать, что функции $\chi_1(\xi)$, $\chi_2(\xi)$ постоянны на элементе $\chi_j|_{\Delta_p} = \chi_{jp}$. Считая, что уравнения (15) выполнены в наборе точек, придем к следующим соотношениям

$$\int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\xi) k_{js}(\eta - y_q) d\eta = \sum_{p=1}^N \chi_{jp} \int_{\Delta_p} k_{js}(\eta - y_q) d\eta = f_s(y_q),$$

(17)

которые можно трактовать, как алгебраическую систему

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{p=1}^N \chi_{jp} H_{pq}^{(js)} = f_{sq}, \quad s = 3, 4,$$

(18)

где введены следующие обозначения

$$H_{pq}^{(js)} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha)}{i\alpha} e^{i\alpha(\eta_p - y_q)} d\alpha \right)_{\eta_k}^{n_{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha)}{\alpha} E_{pq}(\alpha) d\alpha \right),$$

$$E_{pq}(\alpha) = \left[e^{i\alpha(\eta_{p+1} - y_q)} - e^{i\alpha(\eta_p - y_q)} \right],$$

$$j = 1, 2, \quad s = 3, 4.$$

(19)

Легко показать, что подынтегральные функции интегралов в (19) не имеют особенности при $\alpha = 0$, кроме того $\alpha^{-1} \tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha) \rightarrow \text{const}$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Способ вычисления коэффициентов согласно (19) зависит от четности подынтегральной функции. Несложный анализ показал, что $\tilde{Z}_3^{(1)}(\alpha)$, $\tilde{Z}_4^{(2)}(\alpha)$ четны по α , $\tilde{Z}_4^{(1)}(\alpha)$, $\tilde{Z}_3^{(2)}(\alpha)$ – нечетны. Разобьем каждый из рассматриваемых интегралов на расходящуюся и сходящуюся части $H_{pq}^{(js)} = K_{js} \text{SING}_{pq}^{(js)} + \text{REG}_{pq}^{(js)}$, $j = 1, 2$, $s = 3, 4$:

$$\text{SING}_{pq}^{(13)} = \text{SING}_{pq}^{(24)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \text{sign}(\alpha) E_{pq}(\alpha) d\alpha,$$

$$\text{SING}_{pq}^{(23)} = \text{SING}_{pq}^{(14)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_{pq}(\alpha) d\alpha,$$

$$\text{REG}_{pq}^{(js)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha) - K_{js}|\alpha|}{\alpha} E_{pq}(\alpha) d\alpha,$$

$$js = 13, 24,$$

$$\text{REG}_{pq}^{(js)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha) - K_{js}\alpha}{\alpha} E_{pq}(\alpha) d\alpha,$$

$$js = 23, 14.$$

(20)

Используем для вычисления (20) следующие формулы [17] (V_p означает главное значение в смысле Коши)

$$\int_0^{\infty} \sin(\alpha t) d\alpha = V_p \left(\frac{1}{t} \right),$$

$$\int_0^{\infty} \cos(\alpha t) d\alpha = \pi \delta(t).$$

(21)

Учитывая, что узловые значения η_p и точки коллокаций y_q не совпадают, получаем, что $\text{SING}_{pq}^{(23)} = \text{SING}_{pq}^{(14)} = 0$, $\text{SING}_{pq}^{(13)} = \text{SING}_{pq}^{(24)} = 2i \left(\frac{1}{\eta_{p+1} - y_q} - \frac{1}{\eta_p - y_q} \right)$.

Используя квадратурные формулы высоких порядков для подсчета сходящихся интегралов $\text{REG}_{pq}^{(js)}$, решим систему уравнений (18). Получим дискретное представление для функций раскры-

тия. Для расчета волновых полей на внешней границе волновода воспользуемся формулой (16), где интегралы по $[-l_0, l_0]$ могут быть посчитаны на основе квадратурных формул и полученных дискретных представлений для функций раскрытия, а интегралы $m_{js}(\eta - y)$, $j = 1, 2, s = 1, 2$ вычисляются аналогично $X_s^{\text{этр}}(x, y)$, $s = 1, 2$.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Используя следующие обобщенные значения интегралов [17]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha| e^{i\alpha t} d\alpha = -2Vp\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{i\alpha t} d\alpha = -2\pi i \delta'(t),$$
(22)

получим следующие представления ядер

$$k_{js}(t) = \begin{cases} -\frac{K_{js}}{\pi} Vp\left(\frac{1}{t^2}\right) + R_{js}(t), & js = 13, 24, \\ R_{js}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha) - K_{js} |\alpha|] e^{i\alpha t} d\alpha, \\ -iK_{js} \delta'(t) + R_{js}(t), & js = 23, 14, \\ R_{js}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha) - K_{js} \alpha] e^{i\alpha t} d\alpha. \end{cases} \quad (23)$$

Подставляя в (15) представление (23) и вводя замену переменных по формулам $\eta = l_0 t$, $y = l_0 \tau$ получим

$$\left\{ \begin{aligned} & -\int_{-1}^1 \frac{\tilde{\chi}_1(t) K_{13}}{\pi(t-\tau)^2} d\eta + l_0 i K_{23} \tilde{\chi}_2'(\tau) + \\ & + l_0^2 \int_{-1}^1 (\tilde{\chi}_1(t) \tilde{R}_{13}(t-\tau) + \tilde{\chi}_2(t) \tilde{R}_{23}(t-\tau)) d\eta = \\ & = f_3(l_0 \tau), \\ & -\int_{-1}^1 \frac{\tilde{\chi}_2(t) K_{24}}{\pi(t-\tau)^2} d\eta + l_0 i K_{14} \tilde{\chi}_1'(\tau) + \\ & + l_0^2 \int_{-1}^1 (\tilde{\chi}_1(t) \tilde{R}_{14}(t-\tau) + \tilde{\chi}_2(t) \tilde{R}_{24}(t-\tau)) d\eta = \\ & = f_4(l_0 \tau). \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Здесь собраны слагаемые при одинаковых степенях l_0 и введены обозначения $\tilde{\chi}_1(t) = \chi_1(l_0 t) l_0^{-1}$, $\tilde{\chi}_2(t) = \chi_2(l_0 t) l_0^{-1}$, $\tilde{R}_{js}(\tau) = R_{js}(l_0 \tau)$. Будем искать решение путем разложения по l_0 в ряд Тейлора в

окрестности нуля. В качестве первого приближения получим

$$\begin{cases} -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\chi}_1(t) K_{13}}{(t-\tau)^2} d\eta = f_3(0), \\ -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\chi}_2(t) K_{24}}{(t-\tau)^2} d\eta = f_4(0), \end{cases} \quad \text{где } \tau \in [-1, 1]. \quad (25)$$

Учитывая значение интеграла, существующего в смысле конечного значения по Адамару

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{(t-\tau)^2} dt = 1,$$

получим главные члены разложений: $\tilde{\chi}_1(t) = \frac{f_3(0)}{K_{13}} \sqrt{1-t^2}$, $\tilde{\chi}_2(t) = \frac{f_4(0)}{K_{24}} \sqrt{1-t^2}$ и, соответственно, функции раскрытия

$$\chi_1(\eta) = f_3(0) K_{13}^{-1} \sqrt{l_0^2 - \eta^2},$$

$$\chi_2(\eta) = f_4(0) K_{24}^{-1} \sqrt{l_0^2 - \eta^2}. \quad (26)$$

Используя формулу (16), посчитаем поле перемещений на внешней границе волновода. Контурные интегралы $m_{js}(t)$, $j, s = 1, 2$ могут быть посчитаны путем прямого численного интегрирования по квадратурным формулам, или с помощью теории вычетов с удержанием конечного числа слагаемых. Так как решение, полученное по теории вычетов, справедливо при больших значениях $|t|$, то решение строится при $y > l_0 + \delta$ или при $y < -(l_0 + \delta)$, где $\delta > 0$.

Подставляя (26) в (16), получим соотношения вида

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \int_{-l_0}^{l_0} \chi_j(\eta) k_{js}(\eta - y) d\eta = \\ & = l_0^2 \left(\frac{f_3(0)}{K_{13}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k_{1s}(l_0 t - y) dt + \right. \\ & \left. + \frac{f_4(0)}{K_{24}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k_{2s}(l_0 t - y) dt \right). \end{aligned}$$

Используя теорему о вычетах, получим, что $k_{js}(t) = i \sum_{n=1}^N \text{res}_{\alpha=\alpha_n} (\tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha)) e^{i\alpha t}$ при $t < 0$, где α_n — это все положительные полюса функции $\tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha)$, а также полюса, располагающиеся в верхней полуплоскости. Перейдем к пределу при $l_0 \rightarrow 0$ в интегралах вида $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \exp(i\alpha_n l_0 t) dt$ и получим две компоненты решения

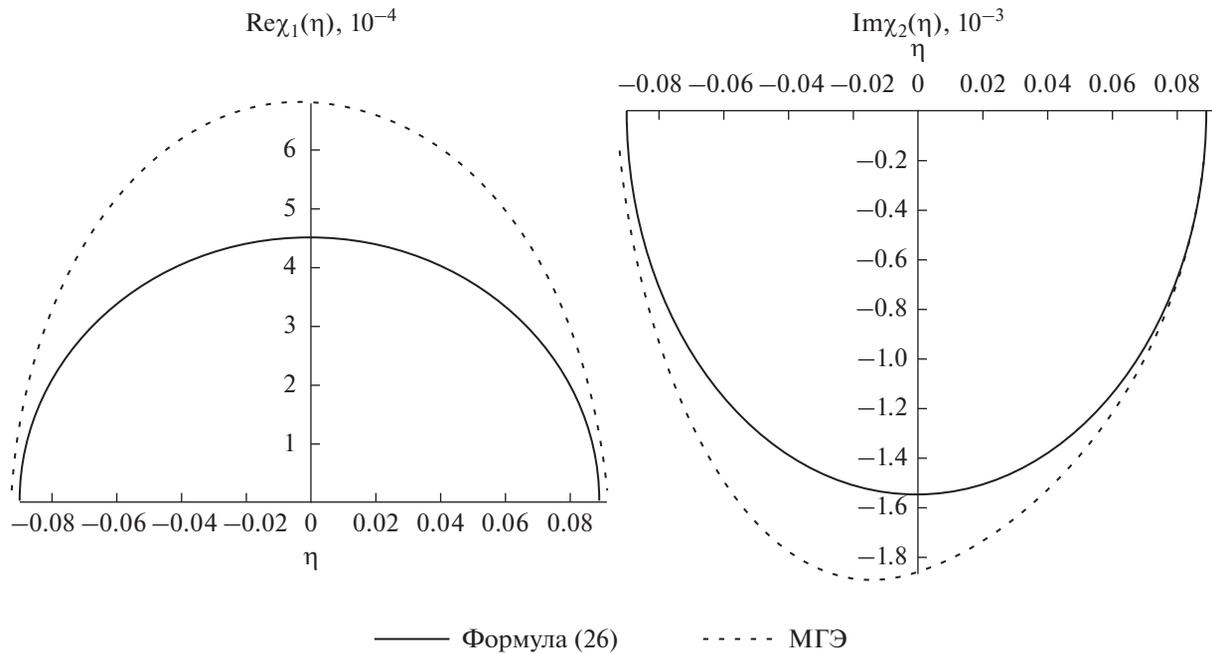


Рис. 2. Сравнение функций раскрытия, полученных по методу граничных элементов и асимптотически.

$$\begin{aligned}
 X_s(x, y) = & X_s^{эп}(x, y) - i \frac{l_0^2 \pi}{2} \times \\
 & \times \sum_{n=1}^N \left(\frac{f_3(0)}{K_{13}} \operatorname{res}_{\alpha=\alpha_n} \left(\tilde{Z}_s^{(1)}(1, \alpha) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{f_4(0)}{K_{24}} \operatorname{res}_{\alpha=\alpha_n} \left(\tilde{Z}_s^{(2)}(1, \alpha) \right) \right) \exp(-i\alpha_n y), \quad s = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{27}$$

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вспользуемся численным и асимптотическим методами для нахождения функций раскрытия. Для этого сравним решение системы (18) с асимптотическим решением (26) при следующем наборе параметров $\kappa = 0.9$,

$$\begin{aligned}
 l_0 &= 0.09, \quad l_1 = -2, \quad \xi_0 = 0.75, \\
 q(y) &= 1, \quad l_2 = -1, \quad \xi_1 = 0.9, \\
 g_1(x) &= \begin{cases} 1.5 - 0.1x, & x < \xi_1, \\ 14 + x^3, & x \geq \xi_1, \end{cases} \\
 g_2(x) &= \begin{cases} 1 + 0.1x, & x < \xi_1, \\ 11 - x^2, & x \geq \xi_1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

На рис. 2 изображены вещественная часть функции $\chi_1(\eta)$ и мнимая часть функции $\chi_2(\eta)$, полученные по методу граничных элементов (точки) и асимптотически (сплошная линия). Здесь для метода граничных элементов выбрано $N = 90$. Проведена серия расчетов, где осуществ-

лялось уменьшение размера l_0 . Расчеты показали, что уже при $l_0 = 0.009$ относительная разница в равномерной метрике между сравниваемыми решениями не превышает 2%. Также проведена серия расчетов по увеличению числа граничных элементов N . При $N = 450$ величины узловых значений на элементах, прилегающих к краям, в 10 раз меньше максимальных значений функций раскрытия. Отметим, что вне окрестностей точек $\eta = \pm l_0$ функции раскрытия, соответствующие $N = 90$ и $N = 450$, отличаются менее чем на 1%, что позволило при расчетах ограничиться числом граничных элементов $N = 90$.

Решения, полученные двумя методами, весьма близки. Это обусловлено тем, что поправка к эталонному решению много меньше самого эталонного решения. Поэтому на рис. 3 изображены поправки к эталонному полю радиальных перемещений на внешней границе волновода, найденные двумя методами. Расчеты выполнены также при $l_0 = 0.09$. Сплошным линиям на рисунке соответствуют вещественные части поправок, а пунктирным – мнимые, жирным выделены поправки к полю, полученные методом граничных элементов, а тонкими линиями изображены асимптотические поправки к решению, вычисленному по формуле (27). Как и в предыдущем случае, рассматриваемые поправки сближаются друг с другом при уменьшении размера l_0 и при $l_0 = 0.009$ максимальная относительная разница между сравниваемыми функциями не превышает 1%.

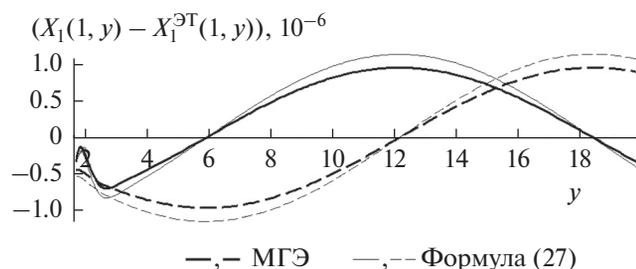


Рис. 3. Сравнение поправок к эталонному волновому полю на внешней границе, полученных по методу граничных элементов и асимптотически.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о вынужденных колебаниях неоднородного в радиальном направлении цилиндрического волновода с кольцевым отслоением. Методом граничных элементов решена возникающая система интегральных уравнений относительно скачков радиальных и продольных перемещений на отслоении. Построено асимптотическое решение системы при малых размерах дефекта и поля перемещений на внешней границе волновода для случая с отслоением и без него. Выполнено сравнение решений, получаемых двумя методами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90017.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. М.: Наука, 1981. 282 с.
2. Su Z., Ye L., Lu Y. Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review // J. Sound Vib. 2006. V. 295. № 3–5. P. 753–780.
3. Eremin A.A., Golub M.V., Glushkov E.V., Glushkova N.V. Identification of delamination based on the Lamb wave scattering resonance frequencies // NDT E Int. 2019. V. 103. P. 145–53.
4. Ma L., Wu L., Zhou Z., Guo L. Scattering of the harmonic anti-plane shear waves by a crack in functionally graded piezoelectric materials // Composite Structures. 2005. V. 69. № 4. P. 436–441.
5. Айзикович С.М., Александров В.М., Трубчик И.С., Крнев Л.И. Аналитическое решение задачи о дискообразной трещине в функционально-градиентном пространстве // Докл. Акад. наук. 2009. Т. 424. № 2. С. 185–189.
6. Александров В.М., Пожарский Д.А. К задаче о трещине раздела упругих полосы и полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 86–93.
7. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995. 520 с.
8. Евдокимов А.А., Глушкова Н.В., Глушков Е.В. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 3–12.
9. Gravenkamp H. Efficient simulation of elastic guided waves interacting with notches, adhesive joints, delaminations and inclined edges in plate structures // Ultrasonics. 2018 V. 82. P. 101–113.
10. Антоненко Н.Н. Задача о продольной трещине с наполнителем в полосе // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. № 3. С. 315–322.
11. Дорошенко О.В., Кириллова Е.В., Фоменко С.И. Асимптотическое решение гиперсингулярного граничного интегрального уравнения, моделирующего рассеяние плоских волн на интерфейсной полосовой трещине // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 2. С. 86–99.
12. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В. Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 314–325.
13. Ватульян А.О., Явруян О.В. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. № 4. С. 714–725.
14. Ватульян А.О., Юров В.О. Анализ вынужденных колебаний в функционально-градиентном цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 649–656.
15. Ватульян А.О., Юров В.О. О свойствах дисперсионного множества для неоднородного цилиндрического волновода // Владикавказ. мат. журн. 2018. Т. 20. № 1. С. 50–60.
16. Ворovich И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
17. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир. 1978. 518 с.
18. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.