

## РЕКОНСТРУКЦИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ИСТОЧНИКА ЗВУКА В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЕГО ПОЛЯ В БАССЕЙНЕ

© 2020 г. А. Л. Вировлянский<sup>а</sup>, \*, А. Ю. Казарова<sup>а</sup>, Л. Я. Любавин<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт прикладной физики Российской Академии наук, ул. Ульянова 46, Н. Новгород, 603950 Россия

\*e-mail: viro@ipfran.ru

Поступила в редакцию 02.04.2020 г.

После доработки 27.04.2020 г.

Принята к публикации 28.04.2020 г.

Обсуждается реконструкция диаграммы направленности источника звука в свободном пространстве по измерениям поля, возбуждаемого этим источником в бассейне. Процедура реконструкции базируется на использовании эталонного акустического монополя. Поле калибруемого источника сопоставляется с полями, излученными монополю из нескольких специально выбранных точек бассейна. Сигналы источника и эталонного монополя регистрируются одними и теми же приемниками. На основе этих измерений поле источника в бассейне аппроксимируется суперпозицией полей акустических монополей. Сформулированы условия, при которых поле источника в свободном пространстве можно представить в виде суперпозиции полей тех же монополей. Это позволяет вычислить диаграмму направленности калибруемого источника в свободном пространстве. Работоспособность метода подтверждена результатами численного моделирования.

*Ключевые слова:* излучатель звука, калибровка, бассейн, метод эквивалентных источников

DOI: 10.31857/S0320791920050159

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Большинство методов калибровки акустических излучателей в бассейне с отражающими границами основаны на выделении прямого сигнала, приходящего в точки приема без отражения от границ. Чаще всего используется облицовка границ поглощающим покрытием для ослабления отраженных сигналов и/или селекция прямых сигналов по времени распространения [1, 2]. Эти подходы эффективны лишь на достаточно высоких частотах. При калибровке низкочастотных излучателей задача усложняется, и ее решение требует применения специальных методов обработки сигналов [3–5].

В недавней работе [6] развит альтернативный подход, позволяющий провести калибровку излучателя в бассейне без выделения прямого сигнала. Он базируется на использовании метода эквивалентных источников (ЭИ) [7–12]. Предполагается, что поля, возбуждаемые калибруемым излучателем и в бассейне, и в свободном пространстве могут быть представлены в виде суперпозиции полей одних и тех же акустических монополей, играющих роль ЭИ, с одними и теми же амплитудами. Амплитуды ЭИ восстанавливаются по данным измерений в бассейне. Необходимые для решения этой обратной задачи значения функции

Грина уравнения Гельмгольца измеряются с помощью процедуры, названной в [6] калибровкой бассейна. Она заключается в том, что эталонный акустический монополь поочередно помещается в точки расположения ЭИ и сигналы, излучаемые им из этих точек, регистрируются всеми приемниками. Искомое поле излучателя в свободном пространстве затем легко вычисляется с использованием найденных амплитуд ЭИ и известного выражения для функции Грина свободного пространства.

Возможности этого способа калибровки существенно ограничивает отсутствие обоснованных общих рекомендаций по выбору количества ЭИ и точек их размещения, гарантирующих эффективность моделирования поля произвольного источника звука суперпозицией полей ЭИ [8, 12]. Однако такие рекомендации можно сформулировать для низкочастотного излучателя с размерами меньше длины волны, поле которого в свободном пространстве можно представить в виде суперпозиции монополюльной, дипольных и квадрупольных компонент. В данной статье показано, что возможность пренебрежения вкладом высших мультиполей сильно упрощает анализ и позволяет сформулировать требования к расположению ЭИ и точек приема, достаточные для реконструк-

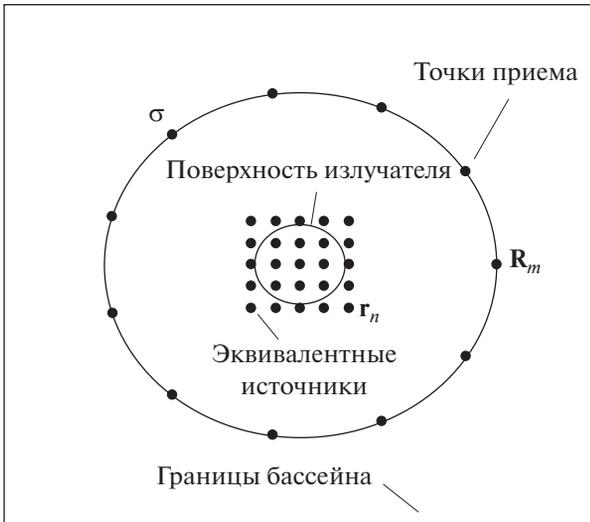


Рис. 1. Схема эксперимента.

ции поля калибруемого источника в свободном пространстве.

Материалы статьи расположены в следующем порядке. Для удобства читателя в разд. 2 кратко изложена основная идея метода из работы [6]. Требования к выбору координат ЭИ сформулированы в разд. 3. Анализ условий, при выполнении которых одни и те же ЭИ представляют поле излучателя и в бассейне, и в свободном пространстве, посвящен разд. 4. Критерий правильного выбора количества и позиций точек приема установлен в разд. 5. Эффективность найденных условий, обеспечивающих возможность решения обратной задачи, продемонстрирована на численном примере в разд. 6. Итоги работы подведены в разд. 7.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы кратко изложим идею подхода, предложенного в [6], и поставим вопросы, на которые нужно ответить для формулировки условий его применимости.

Процедура измерений схематически проиллюстрирована на рис. 1. Поле  $u$ , возбуждаемое на несущей частоте  $f$  в бассейне, заполненном водой с постоянной скоростью звука  $c$ , регистрируется в точках  $\mathbf{R}_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , расположенных на поверхности  $\sigma$ , охватывающей излучатель [7–12].

Обсуждаемый подход базируется на аппроксимации поля излучателя на поверхности  $\sigma$  суперпозицией полей ЭИ. Последние представляют собой акустические монополи, расположенные внутри  $\sigma$  в точках  $\mathbf{r}_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Их суммарное

поле в свободном пространстве с такой же скоростью звука, как в бассейне, равно

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{n=1}^N G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) A_n, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}$  – точка наблюдения,

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} e^{ik|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}, \quad (2)$$

– функция Грина уравнения Гельмгольца в свободном пространстве,  $k = 2\pi f/c$ ,  $A_n$  – комплексные амплитуды ЭИ [13]. Временной множитель  $e^{-2\pi ift}$  здесь и далее опускаем.

При применении метода ЭИ монополи нередко располагают внутри области, ограниченной поверхностью излучателя [8, 12]. Здесь мы не накладываем такого ограничения, что отражено на рис. 1.

Предполагается, что в бассейне с отражающими границами излучаемое поле  $\tilde{u}(\mathbf{R})$  может быть представлено в виде суперпозиции полей, возбужденных теми же ЭИ, т.е. акустическими монополями, размещенными в тех же точках  $\mathbf{r}_n$  и имеющими те же амплитуды  $A_n$ . Это значит, что

$$\tilde{u}(\mathbf{R}) = \sum_{n=1}^N \tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) A_n, \quad (3)$$

где  $\tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  – функция Грина в бассейне. Результаты измерения поля  $\tilde{u}$  образуют вектор  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}(\mathbf{R}_1), \dots, \tilde{u}(\mathbf{R}_M)]^T$ , где символ  $T$  обозначает транспонирование. Для отыскания неизвестных амплитуд ЭИ, мы получаем систему линейных уравнений, которая в матричных обозначениях принимает вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{A}, \quad (4)$$

где  $\tilde{\mathbf{G}}$  –  $M \times N$  матрица с элементами  $\tilde{G}_{mn} = \tilde{G}(\mathbf{R}_m, \mathbf{r}_n)$ ,  $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_N]^T$  – вектор искомых амплитуд. Матричные элементы  $\tilde{G}_{mn}$  измеряются с использованием эталонного монополя, который поочередно помещается во все точки  $\mathbf{r}_n$ , и сигналы, излученные из каждой точки, регистрируются всеми  $M$  приемниками. Эта процедура в [6] названа калибровкой бассейна.

Для решения системы уравнений (4) применим сингулярное разложение матрицы  $\tilde{\mathbf{G}}$  [14, 15]

$$\tilde{\mathbf{G}} = \sum_{l=1}^L \gamma_l \xi_l \eta_l^H, \quad (5)$$

где  $\gamma_l$  – сингулярные числа,  $\xi_l$  и  $\boldsymbol{\eta}_l$  – сингулярные векторы, символ  $H$  означает эрмитово сопряжение. Псевдообратная к  $\tilde{\mathbf{G}}$  матрица имеет вид суммы

$$\tilde{\mathbf{G}}^+ = \sum_{l=1}^{L_1} \frac{1}{\gamma_l} \boldsymbol{\eta}_l \xi_l^H, \quad (6)$$

в которой учитываются лишь  $L_1 \leq L$  первых (относительно больших) сингулярных чисел. Соотношение

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}}^+ \tilde{\mathbf{u}} \quad (7)$$

дает оценку вектора  $\mathbf{A}$ . Подставляя это решение в (1), находим искомое поле калибруемого излучателя в свободном пространстве.

Как отмечено во Введении, применение описанной процедуры далеко не всегда гарантирует правильную реконструкцию поля излучателя. Для формулировки условий применимости обсуждаемого подхода нужно ответить на следующие вопросы:

1. Как выбрать количество акустических монополей и их координаты, чтобы сумма (1) могла с высокой точностью аппроксимировать поле калибруемого излучателя в свободном пространстве?

2. Когда поле излучателя в бассейне может быть аппроксимировано суммой (3) с теми же амплитудами ЭИ  $A_n$ , что и в свободном пространстве?

3. При каких условиях амплитуды ЭИ  $A_n$  могут быть найдены с приемлемой точностью из системы линейных уравнений (4), связывающих их с измеренными амплитудами поля  $\tilde{u}(\mathbf{R}_m)$ ? Погрешность оценки (7) может быть велика из-за того, что система (4) недоопределена, а матрица  $\tilde{\mathbf{G}}$  плохо обусловлена. Кроме того, совпадение суперпозиции полей ЭИ с полем калибруемого излучателя в  $M$  точках измерительной поверхности  $\sigma$ , в особенности, если  $M$  невелико, еще не гарантирует близости этих полей в других точках  $\sigma$ .

В данной работе ответы на эти вопросы будут получены в предположении, что мультипольное разложение поля калибруемого излучателя полностью определяется вкладами монополя, диполей и квадруполей, а вклады мультиполей более высоких порядков можно пренебречь. Это условие обычно выполняется для излучателя с размерами меньше длины волны [16].

### 3. ВЫБОР ПОЗИЦИЙ ЭИ

Начнем с ответа на вопрос 1. Введем сферическую систему координат  $(R, \theta, \varphi)$ , где  $R = |\mathbf{R}|$ , а  $\theta$  и  $\varphi$  – полярный и азимутальный углы точки  $\mathbf{R}$ . Начало системы координат поместим в центре излу-

чателя. Вне излучателя звуковое поле можно представить в виде [17, 18]

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v C_v^\mu S_v^\mu(\mathbf{R}), \quad (8)$$

где  $C_v^\mu$  – коэффициенты разложения,

$$S_v^\mu(\mathbf{R}) = h_v^{(1)}(kr) Y_v^\mu(\theta, \varphi), \quad (9)$$

$$h_v^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{v+1/2}^{(1)}(x)$$

– сферические функции Ханкеля,

$$Y_v^\mu(\theta, \varphi) = (-1)^\mu \sqrt{\frac{2\mu+1(v-|\mu|)!}{4\pi(v+|\mu|)!}} P_v^{|\mu|}(\cos\theta) e^{i\mu\varphi}, \quad (10)$$

– сферические гармоники,  $P_v^\mu(x)$  – присоединенные полиномы Лежандра.

Далее нам понадобится разложение (8) поля  $n$ -го ЭИ

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v Q_{n,v}^\mu S_v^\mu(\mathbf{R}), \quad (11)$$

для коэффициентов которого имеется известное аналитическое выражение [17, 18]

$$Q_{n,v}^\mu = (-1)^\mu ik \sqrt{4\pi(2v+1)} \frac{(v-|\mu|)!}{(v+|\mu|)!} \times \quad (12)$$

$$\times j_v(kr_n) P_v^{|\mu|}(\cos\theta_n) e^{-i|\mu|\varphi_n},$$

где  $(r_n, \theta_n, \varphi_n)$  – сферические координаты точки  $\mathbf{r}_n$ ,  $j_v(x)$  – сферические функции Бесселя первого рода [19].

Переобозначим  $C_v^\mu$ ,  $Q_{n,v}^\mu$  и  $S_v^\mu(\mathbf{R})$ , заменив их соответственно на  $C_q$ ,  $Q_{nq}$  и  $S_q(\mathbf{R})$ , где

$$q = 1 + v + v^2 + \mu. \quad (13)$$

Правило (13) устанавливает взаимно однозначное соответствие между парами индексов  $(v, \mu)$  и индексами  $q$ , представленными натуральными числами. В новых обозначениях разложения (8) и (11) переходят соответственно в

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{q=1}^{\infty} C_q S_q(\mathbf{R}) \quad (14)$$

и

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n) = \sum_{q=1}^{\infty} Q_{nq} S_q(\mathbf{R}). \quad (15)$$

Вклады монопольной, дипольных и квадрупольных компонент поля  $u(\mathbf{R})$  формируются слагаемыми ряда (8) с  $v \leq 2$  [17, 18], которые образуют первые девять членов ряда (14). Наше предпо-

ложение о поле излучателя, сформулированное в конце предыдущего раздела, означает, что все слагаемые с  $q > 9$  в правой части (14) малы и их можно отбросить. Поэтому достаточным условием представления  $u(\mathbf{R})$  в виде суперпозиции полей ЭИ (1) является возможность приближенного представления каждой из функций  $S_q(\mathbf{R})$  с  $q \leq 9$  в виде

$$S_q(\mathbf{R}) \cong \sum_{n=1}^N P_{qn} G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n). \quad (16)$$

Коэффициенты  $P_{qn}$  нужно подобрать таким образом, чтобы левая и правая части были максимально близки в точках поверхности  $\sigma$ .

Для простоты будем рассматривать ситуацию, когда все ЭИ расположены так близко к началу координат, что

$$k|\mathbf{r}_n| \ll 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Принимая во внимание асимптотическую формулу для функции  $j_\nu(x)$  при малом значении аргумента [19]

$$j_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{(2\nu + 1)!!},$$

видим, что при условии (17) величина  $|C_\nu^u|$  быстро спадает с ростом  $\nu$  и, соответственно,  $|C_q|$  уменьшается с ростом  $q$ .

Полагаем, что для всех точек  $\mathbf{R}$  поверхности  $\sigma$  выполняется условие

$$k|\mathbf{R}| > 1. \quad (18)$$

Благодаря этому значения сферических функций Ханкеля  $h_\nu^{(1)}(k|\mathbf{R}|)$  в точках поверхности  $\sigma$  не растут неограниченно с ростом  $\nu$  и при выполнении (17) в бесконечной сумме в правой части (15) можно ограничиться учетом конечного числа слагаемых. Тогда в качестве коэффициентов  $P_{qn}$  в (16) можно взять элементы матрицы  $\mathbf{P}$ , которая псевдообратна к матрице  $\mathbf{Q}$  с коэффициентами  $Q_{nq}$ . Найденные таким образом аппроксимации сферических функций  $S_q(\mathbf{R})$  правыми частями (16) являются приближенными. Точность этого приближения для любого конкретного выбора точек  $\mathbf{r}_n$  легко оценить количественно. Полагая, что расстояния от центра излучателя до точек  $\sigma$  не сильно отличаются от некоторого среднего радиуса  $R_0$ , в качестве оценки точности аппроксимации примем

$$\varepsilon_q = \int_{\sigma_0} |b_q(\mathbf{R})|^2 ds \Big/ \int_{\sigma_0} |S_q(\mathbf{R})|^2 ds, \quad (19)$$

где интегрирование идет по  $\sigma_0$  — поверхности сферы радиуса  $R_0$ ,  $ds$  — элемент площади,

$$b_q(\mathbf{R}) = S_q(\mathbf{R}) - \sum_{n=1}^N P_{qn} G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n)$$

— невязка. Критерием правильности выбора позиций ЭИ является выполнение условий

$$\varepsilon_q \ll 1, \quad q = 1, \dots, 9. \quad (20)$$

#### 4. ПОЛЯ, СОЗДАНИЕ ОДНИМИ И ТЕМИ ЭИ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И В БАССЕЙНЕ

Перейдем к ответу на вопрос 2. Предполагается, что объемные скорости монополей, представляющих ЭИ, одинаковы и в свободном пространстве, и в бассейне. Кроме того, каждая точка поверхности калибруемого источника в бассейне и свободном пространстве осциллирует одинаково.

Поле  $\tilde{u}(\mathbf{R})$ , возбуждаемое ЭИ в бассейне, представим в виде  $\tilde{u}(\mathbf{R}) = u(\mathbf{R}) + v(\mathbf{R})$ , где  $u(\mathbf{R})$  — поле, возбужденное теми же источниками в свободном пространстве, а  $v(\mathbf{R})$  — компонента, формируемая отражениями от границ. Функция  $v(\mathbf{R})$  представляет решение уравнения Гельмгольца в бассейне с граничными условиями, которые задаются значениями поля  $u(\mathbf{R})$  и его производных вблизи стенок бассейна.

Поле, возбуждаемое в бассейне излучателем, обозначим  $\tilde{u}'(\mathbf{R})$  и представим его в аналогичном виде  $\tilde{u}'(\mathbf{R}) = u'(\mathbf{R}) + v'(\mathbf{R})$ , где  $u'(\mathbf{R})$  — поле в свободном пространстве, а  $v'(\mathbf{R})$  — вклад волн, отраженных от границ. Поля  $u(\mathbf{R})$  и  $u'(\mathbf{R})$  различаются вблизи излучателя и ЭИ, но на поверхности  $\sigma$  они совпадают. Следовательно, они совпадают во всей области  $\Gamma$  между  $\sigma$  и границей бассейна. Поэтому функции  $v(\mathbf{R})$  и  $v'(\mathbf{R})$  являются решениями уравнения Гельмгольца с одинаковыми граничными условиями.

Различие между  $v(\mathbf{R})$  и  $v'(\mathbf{R})$  обусловлено тем фактом, что  $v(\mathbf{R})$  представляет решение в пустом бассейне (рассеяния волн на точечных ЭИ не происходит), а  $v'(\mathbf{R})$  — решение в присутствии излучателя конечного размера. Если рассеяние на излучателе пренебрежимо мало, то компоненты полей  $v(\mathbf{R})$  и  $v'(\mathbf{R})$  всюду совпадают за исключением небольшой области вблизи излучателя. При этом на измерительной поверхности  $\sigma$  суммарные поля  $\tilde{u}(\mathbf{R})$  и  $\tilde{u}'(\mathbf{R})$  тоже совпадают.

Интуитивно понятно, что рассеянием на излучателе можно пренебречь, если его объем достаточно мал. Количественный критерий малости получен в работе [6] в предположении, что разме-

ры излучателя меньше длины волны и при оценке интенсивности рассеянного поля его можно заменить твердой сферой такого же объема. В этом случае интенсивность рассеянного поля у границы бассейна будет много меньше интенсивности падающего, если

$$V_s \ll \lambda^2 b / \pi, \quad (21)$$

где  $V_s$  – объем излучателя,  $b$  – характерный размер бассейна. При выполнении данного условия одни и те же ЭИ аппроксимируют поле излучателя и в свободном пространстве, и в бассейне.

Отметим, что представление акустического поля суперпозицией полей ЭИ, как правило, неоднозначно [13]. Даже при фиксированном выборе точек расположения монополей  $\mathbf{r}_n$  может существовать бесконечно много векторов  $\mathbf{A}$ , “обеспечивающих” выполнение равенств (1) и (3). Это происходит, если  $M < N$  и система (4) недоопределена. Такая ситуация часто возникает при использовании метода ЭИ, поскольку количество приемников обычно меньше количества ЭИ [13]. Однако неоднозначность выбора  $\mathbf{A}$  не противоречит получению однозначного решения нашей обратной задачи. Ведь любые два вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}'$ , которые определяют поля  $u$  и  $u'$  в свободном пространстве, совпадающие на поверхности  $\sigma$ , задают поля  $\tilde{u}$  и  $\tilde{u}'$  в бассейне, тоже совпадающие на  $\sigma$ . В этом легко убедиться с помощью рассуждения, аналогичного приведенному выше, при сравнении полей излучателя и моделирующих его ЭИ. Оба рассуждения фактически основаны на однозначности решения уравнения Гельмгольца с граничными условиями, заданными на замкнутой поверхности [20]. Точно также можно показать, что любой вектор  $\mathbf{A}$ , который задает поле (3), аппроксимирующее поле излучателя на поверхности  $\sigma$  в бассейне, одновременно задает поле (1), аппроксимирующее поле излучателя в свободном пространстве.

## 5. ВЫБОР КООРДИНАТ ПРИЕМНИКОВ

Принимая во внимание соотношения (14) и (16), поле в бассейне можно представить в виде

$$\tilde{u}(\mathbf{R}) = \sum_{q=1}^9 C_q \tilde{S}_q(\mathbf{R}), \quad (22)$$

где

$$\tilde{S}_q(\mathbf{R}) \equiv \sum_{n=1}^N P_{qn} \tilde{G}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_n). \quad (23)$$

Переход от (14) к (22) является аналогом перехода от (1) к (3). Использование априорной информации об излучателе (пренебрежение вкладом высших мультиполей) позволило свести задачу

отыскания  $N$  неизвестных коэффициентов  $A_n$  к отысканию девяти коэффициентов  $C_q$ . Связь между  $A_n$  и  $C_q$  выражается соотношением

$$A_n = \sum_{q=1}^9 P_{qn} C_q, \quad (24)$$

которое легко получить, подставляя (23) в (22) и сравнивая найденное выражение с (3).

Таким образом, от системы линейных уравнений (4) мы переходим к системе

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{C}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{C}$  – вектор размера  $9 \times 1$  с элементами  $C_q$ ,  $q = 1, \dots, 9$ , а  $\tilde{\mathbf{S}}$  – матрица размера  $M \times 9$ , столбцами которой служат векторы  $[\tilde{S}_q(\mathbf{R}_1), \dots, \tilde{S}_q(\mathbf{R}_M)]^T$ . Предполагается, что  $M \geq 9$ , т.е. поле в бассейне измеряется, как минимум, в девяти точках. В противном случае система (25) будет недоопределена, ее решение будет неоднозначным, и в отсутствие дополнительной априорной информации об источнике мы не сможем снять эту неопределенность. При  $M \geq 9$  решение (25) равно  $\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{S}}^+ \tilde{\mathbf{u}}$ , где  $\tilde{\mathbf{S}}^+$  – матрица, обратная или псевдообратная к  $\tilde{\mathbf{S}}$ . Для того чтобы решение было слабо чувствительно к влиянию шумов и погрешностей измерений, нужно, чтобы матрица  $\tilde{\mathbf{S}}$  была хорошо обусловлена. Это значит, что число обусловленности, которое в данном случае выражается отношением первого (наибольшего) сингулярного числа  $\tilde{\mathbf{S}}$  к девятому (наименьшему), должно быть не слишком велико. Точки приема  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_m$ , удовлетворяющие условию (18), должны быть выбраны таким образом, чтобы это требование выполнялось. В совокупности с условиями, выраженными неравенствами (17) и (20), данное требование дает ответ на вопрос 3 из разд. 2 о достаточном условии правильной реконструкции амплитуд ЭИ. После того, как коэффициенты  $C_q$  найдены, амплитуды ЭИ  $A_n$  находятся по формуле (24).

Искомое поле калибруемого источника в свободном пространстве затем вычисляется подстановкой найденных  $A_n$  в (1) или, что эквивалентно, подстановкой найденных  $C_q$  в первые девять слагаемых суммы в правой части (14) и отбрасыванием остальных слагаемых.

## 6. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Для иллюстрации описанной процедуры рассмотрим реконструкцию поля идеализированной модели излучателя, имеющего форму куба с длиной ребра  $a = 0.3$  м, две пары противоположных

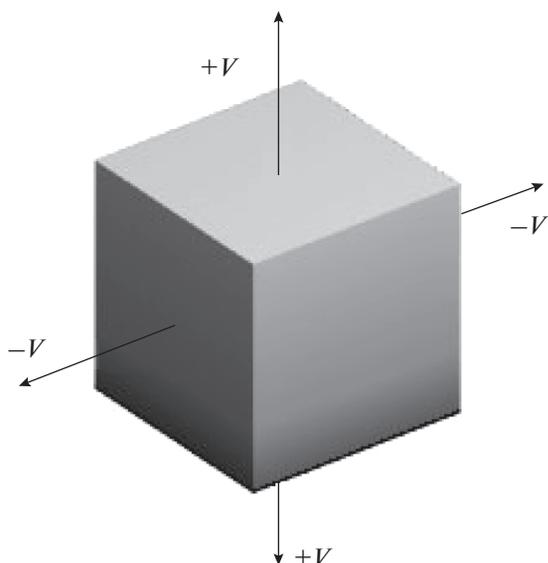


Рис. 2. Модель калибруемого излучателя.

граней которого осциллируют вдоль своих нормалей (рис. 2). Комплексные амплитуды скоростей у каждой пары одинаковы. Они равны  $V$  у одной пары и  $-V$  у другой. Две оставшиеся грани неподвижны.

Излучатель работает на частоте  $f = 1000$  Гц в бассейне, тоже имеющем форму куба с ребром длиной 3 м и твердыми границами. Бассейн заполнен водой со скоростью звука  $c = 1500$  м/с. Поскольку длина волны  $\lambda = 1.5$  м велика по сравнению с размером нашего источника, его поле в дальней зоне должно быть близко к полю квадруполья.

Поля, возбужденные в свободном пространстве и бассейне, рассчитывались методом конечных элементов. Грани излучателя располагались параллельно граням бассейна, а его центр был смещен на 0.5 м вдоль одного из ребер. При анализе поля использовалась сферическая система координат, центр которой совпадал с центром источника.

В качестве измерительной поверхности  $\sigma$ , на которой располагались точки приема, была взята сфера радиусом  $R = 1.4$  м. Она приблизительно равномерно была покрыта  $M = 150$  точками приема  $\mathbf{R}_m$ . ЭИ располагались в 27 точках, образующих куб размером  $3 \times 3 \times 3$  см с расстоянием между ближайшими точками (шагом кубической решетки) 0.015 м. Для выбранных точек расположения ЭИ и приемников условия (17) и (18) выполняются.

При вычислении матрицы  $\mathbf{P}$ , псевдообратной к  $\mathbf{Q}$ , использован тот же метод, базирующийся на сингулярном разложении, который применялся при вычислении псевдообратной матрицы  $\tilde{\mathbf{G}}^+$

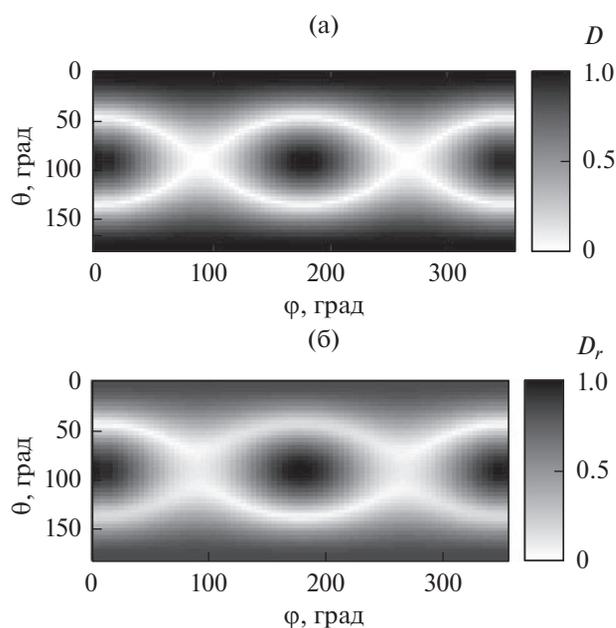


Рис. 3. Диаграмма направленности излучателя. (а) – Расчет в свободном пространстве. (б) – Результат реконструкции по измерениям в бассейне.

(см. (6)). Матрица  $\mathbf{Q}$  имеет размер  $N \times K$ , где  $K$  – количество слагаемых, удерживаемых в сумме (15). Величина  $K$  определяется тем, насколько быстро уменьшаются амплитуды коэффициентов  $|Q_{nq}|$  с ростом  $q$ . В нашем примере значения  $|Q_{nq}|$  резко спадают при  $q > 9$ , и поэтому мы выбрали  $K = 9$ . Результаты моделирования показывают, что увеличение  $K$  не повышает точности реконструкции.

Величины параметров  $\epsilon_q$ , заданные (19), в нашем примере не превышают 0.01, т.е. критерий правильности выбора позиций ЭИ (20) выполняется. Отношение наибольшего сингулярного числа матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}$  к наименьшему равно 60, что свидетельствует о хорошей обусловленности данной матрицы.

На рис. 3 показан результат реконструкции диаграммы направленности нашего источника в свободном пространстве

$$D(\varphi, \theta) = \frac{|u(R, \theta, \varphi)|}{\max(|u(R, \theta, \varphi)|)_{R \rightarrow \infty}}.$$

Поскольку амплитуда возбуждаемого поля прямо пропорциональна скорости пульсации граней  $V$ , диаграмма направленности от  $V$  не зависит. На рис. 3а показана диаграмма  $D(\theta, \varphi)$ , найденная путем прямого расчета поля в свободном пространстве, а на рис. 3б – диаграмма  $D_r(\theta, \varphi)$ , реконструированная по значениям  $\tilde{u}$  в

указанных выше точек  $\mathbf{R}_m$ . Точность реконструкции количественно характеризуется параметром

$$\mu = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta |D(\theta, \varphi) - D_r(\theta, \varphi)|}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta D(\theta, \varphi)},$$

который в нашем примере равен 0.13. Практически такой же результат получается, если из 150 точек приема  $\mathbf{R}_m$  оставить лишь 9. При этом нужно, чтобы эти точки были расположены достаточно далеко друг от друга, так как в противном случае у матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}$  могут оказаться близкие столбцы и она станет плохо обусловленной. Во всех рассмотренных нами примерах хорошо обусловленной матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}$  (с числом обусловленности менее 1000) параметр  $\mu$  принимал значения, не превышающие 0.25. Аналогичные результаты были получены при реконструкции поля другого модельного источника, представляющего собой твердый цилиндр с пульсирующими основаниями.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Условия применимости метода ЭИ, неизвестные в общем случае [8, 12], в данной работе сформулированы для источника, в мультипольном разложении поля которого в свободном пространстве все компоненты, кроме монопольной, дипольных и квадрупольных, пренебрежимо малы. В этом случае реконструируемое поле представлено суммой первых девяти членов ряда (14), и задача заключается в отыскании неизвестных амплитуд  $C_1, \dots, C_9$ . Для решения задачи ЭИ должны быть расположены таким образом, чтобы суперпозиции их полей могли аппроксимировать каждую из девяти функций  $S_q(\mathbf{R})$  (условие (20)). При этом поле в бассейне будет представлено в виде суперпозиции девяти функций  $\tilde{S}_q(\mathbf{R})$  с теми же амплитудами  $C_1, \dots, C_9$ , что и в свободном пространстве. Для восстановления этих амплитуд достаточно, чтобы система уравнений (25) состояла всего из девяти уравнений. Поэтому при регистрации излученного поля нет необходимости в том, чтобы точки приема  $\mathbf{R}_m$  плотно покрывали поверхность  $\sigma$ . Достаточно иметь всего 9 правильно (с учетом введенных требований) выбранных точек приема.

Основным результатом данной статьи является формулировка достаточных условий применимости метода калибровки акустического излучателя, идея которого предложена в [6]. Следует отметить, что необходимость найденных условий здесь не доказана. Предполагается, что точки  $\mathbf{r}_n$  и

$\mathbf{R}_m$  выбираются эмпирически с соблюдением неравенств (17) и (18). Правильность выбора затем проверяется с помощью критериев, установленных в разд. 3 и 5: должны выполняться неравенства (20) и матрица  $\tilde{\mathbf{S}}$  должна быть хорошо обусловлена. Еще одним условием применимости обсуждаемого подхода является малость объема источника, который должен удовлетворять критерию (21).

В данной работе мы не рассматривали влияния внешних шумов и неточности измерений, приводящих к тому, что вектор  $\tilde{\mathbf{u}}$  всегда известен с некоторой ошибкой. Этот вопрос требует специального изучения. Здесь мы отметим лишь, что вследствие хорошей обусловленности матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}$  малые изменения вектора  $\tilde{\mathbf{u}}$  вызывают малые изменения решения системы (25) и, соответственно, приводят к относительно небольшим ошибкам в реконструкции поля источника.

Результаты численного моделирования подтверждают эффективность введенных критериев. Вместе с тем вопрос оптимального выбора количества ЭИ и их позиций остается открытым.

Неисследованным пока остается и вопрос об условиях применимости сделанного в начале разд. 4 предположения том, что отражения волн от границ бассейна не приводят к заметному изменению скорости осцилляций поверхности излучателя по сравнению со случаем свободного пространства. Ответ на этот вопрос для каждого конкретного источника должен быть получен с использованием соответствующих уравнений электромеханического преобразования и оценок радиационного импеданса источника в бассейне [21, 22].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (проекты 0035-2019-0019 и 0035-2019-0006).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боббер Р.* Гидроакустические измерения. М.: Мир, 1974. 361 с.
2. *Robinson S.P.* Review of methods for low frequency transducer calibration in reverberant tanks. NPL Report CMAM 034. 1999.
3. *Robinson S.P., Hayman G., Harris P.M., Beamiss G.A.* Signal-modeling methods applied to the free-field calibration of hydrophones and projectors in laboratory test tanks // Meas. Sci. Technol. 2018. 29:085001.
4. *Исаев А.Е., Матвеев А.Н.* Градуировка гидрофонов по полю при непрерывном излучении в реверberирующем бассейне // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 727–736.
5. *Исаев А.Е., Николаенко А.С., Черников И.В.* Подавление реверберационных искажений сигнала приемника с использованием передаточной функции

- бассейна // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 2. С. 165–174.
6. *Virovlyansky A.L., Deryabin M.S.* On the use of the equivalent source method for free-field calibration of an radiator in a reverberant tank // *J. Sound. Vibr.* 2019. V. 455. P. 69–81.
  7. *Koormann G.H., Song L., Fahnlone J.B.* A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 86. № 6. P. 2433–2438.
  8. *Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М.* Общие свойства и принципиальные погрешности метода эквивалентных источников // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 5. С. 737–750.
  9. *Johnson M.E., Elliott S.J., Baek K.-H., Garcia-Bonito J.* An equivalent source technique for calculating the sound field inside an enclosure containing scattering objects // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104. № 3. P. 1221–1231.
  10. *Zhang Y.-B., Jacobsen F., Bi C.-X., Chen X.-Z.* Near field acoustic holography based on the equivalent source method and pressure-velocity transducers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2009. V. 126. № 3. P. 1257–1263.
  11. *Gounot Y.J.R., Musafir R.E.* Simulation of scattered fields: some guidelines for the equivalent source method // *J. Sound. Vibr.* 2011. V. 330. № 15. P. 3698–3709.
  12. *Lee S.* Review: the use of equivalent source method in computational acoustics // *J. Comput. Acoustics.* 2017. V. 25. № 1. 1630001.
  13. *Fernandez-Grande E., Xenaki A., Gerstoft P.* A sparse equivalent source method for near-field acoustic holography // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 1. P. 532–542.
  14. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
  15. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология: теория и методы. Т. 2. М.: Мир, 1983. 360 с.
  16. *Rossing T.D.* Springer Handbooks of Acoustics. New York: Springer, 2007. 1182 p.
  17. *Williams E.G.* Fourier Acoustic. Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography. San Diego: Academic Press, 1999. 306 p.
  18. *Gumerov N., Duraiswami R.* Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions. Oxford: Elsevier Ltd, 2004. 520 p.
  19. *Абрамовиц М., Стиган И. (ред).* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
  20. *Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З.* Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
  21. *Свердлин Г.М.* Прикладная гидроакустика. Ленинград: Судостроение, 1990. 320 с.
  22. *Butler J.L., Sherman C.H.* Transducers and Arrays for Underwater Sound. CA: Peninsula Press, Springer, 2016. 716 p.