

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23;537.874.6

ДВА ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА СФЕРЕ ЯНУСА

© 2021 г. Д. В. Крысанов^a, А. Г. Кюркчан^{a, b, c}, С. А. Маненков^{a, *}

^aМосковский технический университет связи и информатики,
ул. Авиамоторная 8а, Москва, 111024 Россия

^bФрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского 1, Фрязино, Московской обл., 141190 Россия

^cФГУП Центральный научно-исследовательский институт связи,
1-й проезд Перова поля 8, Москва, 111141 Россия

*e-mail: mail44471@mail.ru

Поступила в редакцию 14.11.2020 г.

После доработки 12.12.2020 г.

Принята к публикации 22.12.2020 г.

На основе метода продолженных граничных условий разработаны два алгоритма численного решения задачи дифракции плоской волны на сфере Януса в виде пронизаемого шара, частично покрытого абсолютно мягким или абсолютно жестким сферическим экраном. Выполнено сравнение результатов расчета интенсивности рассеянного поля, полученных с использованием предложенных методов, с результатами, найденными методом Т-матриц. Проведена проверка точности выполнения оптической теоремы и невязки краевого условия в случае условий Дирихле и Неймана на экране. Построены угловые зависимости интенсивности рассеянного поля для различных углов раскрытия отражающего экрана.

Ключевые слова: дифракция на сферических объектах, сфера Януса, метод продолженных граничных условий

DOI: 10.31857/S0320791921020027

ВВЕДЕНИЕ

Частицы, покрытые тонкими экранами (в частности, частицы Януса), представляют большой интерес в антенной технике, медицине и биологии. Например, частицы Януса используются в качестве нано- или микропловцов, управляемых бегущими акустическими волнами, для точного позиционирования лекарств. Их также можно использовать как микрозонды или сенсоры в силу того, что разные части частиц Януса дают различные отклики на внешнее воздействие. Асимметрия частиц Януса позволяет частицам легко перемещаться, что открывает возможности для создания микромоторов [1–3]. Несмотря на прикладную значимость частиц Януса, рассеяние волн на таких структурах исследовано достаточно слабо. В литературе имеется ряд работ, посвященных как акустической, так и электромагнитной задаче дифракции на сфере Януса [3–7]. Для решения данной задачи дифракции использовались, например, метод моментов, основанный на решении переопределенных алгебраических систем [3], метод интегральных уравнений [4], методы, основанные на теории сумматорных уравнений [5] и метод Т-матриц [6, 7].

В настоящей работе рассмотрена акустическая задача дифракции плоской волны на пронизаемом шаре, частично покрытом бесконечно тонким абсолютно мягким или абсолютно жестким сферическим экраном. Задача рассеяния на покрытом шаре решалась методом продолженных граничных условий (МПГУ), который успешно применялся ранее к решению широкого круга двумерных и трехмерных задач теории дифракции [8–11]. Основная идея метода состоит в том, что граничное условие краевой задачи “переносится” на вспомогательную поверхность, расположенную на небольшом расстоянии от исходной поверхности экрана в области, где ищется поле. Возможность такого подхода обусловлена вещественной аналитичностью дифракционного поля. Таким образом, например, если граничное условие выполняется на поверхности экрана, то оно приближенно выполняется и в некоторой “окрестности” этой поверхности.

Решение рассматриваемой задачи дифракции при помощи МПГУ основано на использовании функции Грина (ФГ) пронизаемого шара. При этом исходная краевая задача сводится к интегральному уравнению первого рода относительно поля или его нормальной производной на по-

верхности экрана с ядром, выражающимся через ФГ шара. Для решения интегрального уравнения использовались две методики. Первая основана на кусочно-постоянной аппроксимации неизвестной функции по двум угловым координатам (в сферической системе координат). С целью алгебраизации задачи использовался метод Крылова–Боголюбова. При этом осевая симметрия задачи не учитывалась. Данный подход применялся ранее авторами для решения близкой задачи дифракции электромагнитного поля на плоском экране, расположенном на границе раздела двух сред [11]. Второй метод основан на использовании осевой симметрии рассматриваемой задачи дифракции. При помощи проектирования двумерного интегрального уравнения на стандартный базис Фурье по азимутальному углу, задача сводилась к решению бесконечного набора одномерных интегральных уравнений относительно зенитного угла θ . Для решения указанных одномерных интегральных уравнений применялся базис из полиномов Якоби с соответствующим весом, учитывающим особенность на краю сферического экрана. При этом применялся метод коллокации, аналогичный методу, описанному в работе [12]. При таком подходе удается добиться большей точности, чем при использовании первого метода. Отметим, что данный подход является обобщением двумерной задачи дифракции на цилиндрическом экране, рассмотренной в работе [13].

Основной трудностью при решении рассматриваемой задачи дифракции, как при использовании первой, так и второй методики, является расчет ФГ проникаемого шара, так как ФГ выражается в виде медленно сходящегося ряда, непригодного для численных расчетов. С целью ускорения сходимости указанного ряда выделялась асимптотика n -го члена ряда при $n \rightarrow \infty$ (эту величину можно назвать сингулярной частью ФГ). Сингулярная часть ФГ суммировалась аналитически с использованием производящей функции полиномов Лежандра. Оставшаяся (регулярная) часть ФГ представляла собой достаточно быстро сходящийся ряд.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим математическую постановку задачи. Пусть однородный шар радиуса a покрыт бесконечно тонким сферическим экраном S с углом раскрытия $2\theta_1$. Введем сферическую систему координат, причем ось z направим вдоль оси рассматриваемого тела вращения (сферы Януса). Геометрия задачи изображена на рис. 1. Предполагаем, что волновые числа и плотности сред вне и внутри шара равны k_1, μ_1 и k_2, μ_2 соответственно. Таким образом, волновое поле вне и внутри шара

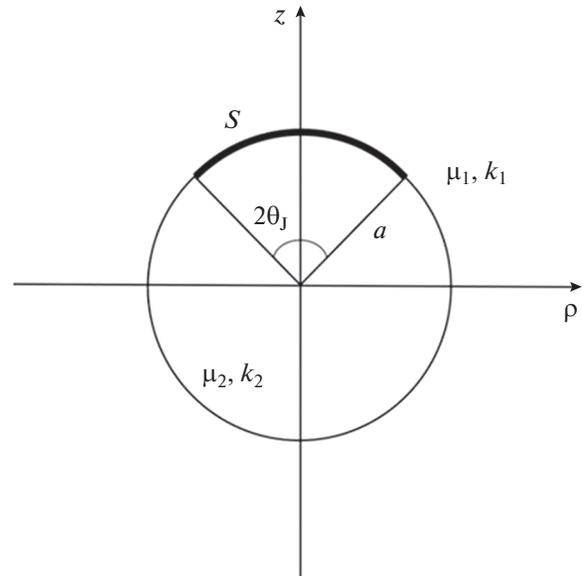


Рис. 1. Осевое сечение сферы Януса.

удовлетворяет однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \Delta U + k_1^2 U &= 0, \quad r > a, \\ \Delta U + k_2^2 U &= 0, \quad 0 < r < a, \end{aligned} \tag{1}$$

где r – радиальная координата в сферической системе координат. Граничные условия на поверхности экрана имеют вид

$$U|_{r=a, \theta < \theta_1} = 0 \tag{2}$$

или

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{r=a, \theta < \theta_1} = 0. \tag{3}$$

При $\theta \in (\theta_1, \pi)$ выполнены условия сопряжения

$$\begin{cases} [U] = 0, \\ \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial U}{\partial r} \right] = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где μ – плотность ($\mu = \mu_1$ при $r > a$, $\mu = \mu_2$ при $r < a$), а квадратные скобки означают скачок соответствующей величины. Предполагаем, что сфера Януса облучается плоской волной, которая имеет вид:

$$U_{\text{пад}} = \exp(-ik_1 r (\sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi + \cos \theta \cos \theta_0)). \tag{5}$$

Здесь θ_0 – угол падения плоской волны. Рассеянное поле U^1 удовлетворяет условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial U^1}{\partial r} + ik_1 U^1 \right) = 0. \quad (6)$$

Полное поле удовлетворяет также условию Мейкснера на краю сферического экрана.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРИ ПОМОЩИ МПГУ

Применим МПГУ для решения поставленной задачи дифракции. С этой целью представим поле вне пронизаемого шара в виде

$$U(\mathbf{r}) = U^0(\mathbf{r}) - \int_S J(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \quad (7)$$

в случае абсолютно мягкого экрана и

$$U(\mathbf{r}) = U^0(\mathbf{r}) + \int_S J(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'} ds' \quad (8)$$

в случае абсолютно жесткого. Здесь $U^0(\mathbf{r})$ – первичное поле, определяемое из решения задачи дифракции на шаре в отсутствие экрана,

$J(\mathbf{r}') = \left[\frac{\partial U}{\partial r'} \right]_{\substack{r=a \\ \theta < \theta_j}}$ в случае абсолютно мягкого экрана

и $J(\mathbf{r}') = [U]_{\substack{r=a \\ \theta < \theta_j}}$ – в случае абсолютно жесткого.

В формулах (7) и (8) $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – функция Грина пронизаемого шара, которая при $r > a$ имеет вид

$$G = G_0 + G_1, \quad (9)$$

где

$$G_0 = \frac{e^{-ik_1 R}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (10)$$

$$G_1 = \frac{k_1}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) V_n h_n^{(2)}(k_1 r') h_n^{(2)}(k_1 r) P_n(\cos \gamma), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \sin \theta \sin \theta' \cos \psi + \cos \theta \cos \theta', \\ \psi &= \varphi - \varphi', \end{aligned} \quad (12)$$

$$V_n = \frac{\mu_{12} j_n(k_1 a) \eta_n(k_2 a) - \eta_n(k_1 a) j_n(k_2 a)}{\xi_n(k_1 a) j_n(k_2 a) - \mu_{12} h_n^{(2)}(k_1 a) \eta_n(k_2 a)}, \quad (13)$$

$$\mu_{12} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \eta_n(x) = x j_n'(x), \quad \xi_n(x) = x h_n^{(2)'}(x), \quad (14)$$

$j_n(x)$, $h_n^{(2)}(x)$ – сферические функции Бесселя и Ханкеля соответственно, $P_n(x)$ – полиномы Лежандра.

Заметим, что первичное поле вне шара имеет вид

$$\begin{aligned} U^0(\mathbf{r}) &= U_{\text{пад}}(\mathbf{r}) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} (2n+1) V_n h_n^{(2)}(k_1 r) P_n(\cos \gamma_0), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\cos \gamma_0(\theta, \varphi) = \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi + \cos \theta \cos \theta_0$.

В соответствии со стандартной схемой МПГУ подставим далее формулу (7) или (8) в граничное условие (2) или (3), поставленное на вспомогательной поверхности S_δ , смещенной на малое расстояние δ от поверхности S [8–11]. В результате задача сведется к решению интегрального уравнения первого рода относительно функции $J(\mathbf{r}')$:

$$\int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') ds' = U^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_\delta \quad (16)$$

либо

$$\int_S \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r \partial r'} J(\mathbf{r}') ds' = -\frac{\partial U^0}{\partial r}, \quad \mathbf{r} \in S_\delta \quad (17)$$

соответственно в случае абсолютно мягкого или жесткого экрана.

С использованием сферических координат, интегральные уравнения (16) и (17) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_j} K(\theta, \varphi, \theta', \varphi') J(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi' &= B(\theta, \varphi), \\ \theta \in [0, \theta_j], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} K(\theta, \varphi, \theta', \varphi') &= a^2 G|_{r'=a, r=a+\delta}, \\ B(\theta, \varphi) &= U^0|_{r=a+\delta}, \end{aligned} \quad (19)$$

или

$$\begin{aligned} K(\theta, \varphi, \theta', \varphi') &= a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial r'} \Big|_{r'=a, r=a+\delta}, \\ B(\theta, \varphi) &= -\frac{\partial U^0}{\partial r} \Big|_{r=a+\delta}. \end{aligned} \quad (20)$$

Как было указано во Введении, ряд ФГ (11) сходится очень медленно в силу того, что отношение $a/(a+\delta) \approx 1$ и, следовательно, непригоден для численных расчетов. Поэтому воспользуемся асимптотикой членов ряда при $n \rightarrow \infty$. Во-первых, заметим, что

$$V_n h_n^{(2)}(k_1 a) \sim -\frac{\mu_{12} - 1}{\mu_{12} + 1} j_n(k_1 a), \quad (21)$$

$$V_n \xi_n(k_1 a) \sim \frac{\mu_{12} - 1}{\mu_{12} + 1} \eta_n(k_1 a) \quad (22)$$

при $n \rightarrow \infty$. Поэтому ФГ шара (9) и ее вторая производная могут быть записаны в виде

$$G = \frac{2}{\mu_{12} + 1} G_0 + \frac{k_1}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n^{(2)}(k_1 r) P_n(\cos \gamma) \times \left(V_n h_n^{(2)}(k_1 a) + \frac{\mu_{12} - 1}{\mu_{12} + 1} j_n(k_1 a) \right) \equiv \quad (23)$$

$$\equiv \frac{2}{\mu_{12} + 1} G_0 + \frac{k_1}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} u_n P_n(\cos \gamma),$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial r'} = \frac{2\mu_{12}}{\mu_{12} + 1} \frac{\partial^2 G_0}{\partial r \partial r'} + \frac{1}{ar} \frac{k_1}{4\pi i} \times \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \xi_n(k_1 r) P_n(\cos \gamma) \times \quad (24)$$

$$\times \left(V_n \xi_n(k_1 a) - \frac{\mu_{12} - 1}{\mu_{12} + 1} \eta_n(k_1 a) \right) \equiv$$

$$\equiv \frac{2\mu_{12}}{\mu_{12} + 1} \frac{\partial^2 G_0}{\partial r \partial r'} + \frac{1}{ar} \frac{k_1}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(\cos \gamma),$$

где $r = a + \delta$. Ряды (23) и (24) сходятся по-прежнему очень медленно, поэтому выделим асимптотики величин u_n и v_n при $n \rightarrow \infty$, используя известные асимптотические разложения сферических функций Бесселя и их производных [14]:

$$j_n(x) \sim \frac{x^n}{(2n+1)!!} \tilde{j}_n(x), \quad \eta_n(x) \sim \frac{nx^n}{(2n+1)!!} \tilde{\eta}_n(x), \quad (25)$$

$$h_n^{(2)}(x) \sim i \frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}} \tilde{h}_n^{(2)}(x),$$

$$\xi_n(x) \sim -i \frac{n(2n-1)!!}{x^{n+1}} \tilde{\xi}_n(x),$$

где

$$\tilde{j}_n(x) = 1 - \frac{x^2}{4n} + \left(\frac{3}{8} x^2 + \frac{x^4}{32} \right) \frac{1}{n^2} - \left(\frac{9}{16} x^2 + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{384} \right) \frac{1}{n^3}, \quad (26)$$

$$\tilde{h}_n^{(2)}(x) = 1 + \frac{x^2}{4n} + \left(\frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{32} \right) \frac{1}{n^2} + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^6}{384} \right) \frac{1}{n^3}, \quad (27)$$

$$\tilde{\eta}_n(x) = 1 - \frac{x^2}{4n} + \left(\frac{x^4}{32} - \frac{x^2}{8} \right) \frac{1}{n^2} + \left(\frac{3}{16} x^2 - \frac{x^6}{384} \right) \frac{1}{n^3}, \quad (28)$$

$$\tilde{\xi}_n(x) = 1 + \left(1 + \frac{x^2}{4} \right) \frac{1}{n} + \left(\frac{x^4}{32} - \frac{x^2}{8} \right) \frac{1}{n^2} + \left(\frac{x^6}{384} - \frac{x^4}{32} - \frac{x^2}{16} \right) \frac{1}{n^3}. \quad (29)$$

Поясним ускорение сходимости ряда, через который выражается ядро интегрального уравне-

ния (18), на примере условия Дирихле на поверхности экрана. Запишем ФГ (23) в виде

$$G = \frac{2}{\mu_{12} + 1} G_0 + \frac{k_1}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} u_n P_n(\cos \gamma) = \frac{2}{\mu_{12} + 1} G_0 + \frac{k_1}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - u_n^{\infty}) P_n(\cos \gamma) + \frac{k_1}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{\infty} P_n(\cos \gamma), \quad (30)$$

где

$$u_n^{\infty} = -\frac{i}{k_1 r} \kappa^n \frac{A_0}{n+1} \quad (31)$$

представляет собой асимптотику величин u_n при $n \rightarrow \infty$. В формуле (31) $\kappa = \frac{a}{r}$. Коэффициент A_0 находим из разложения в ряд по степеням $\frac{1}{n}$ величины:

$$\chi_n^1 = \left(\tilde{V}_n \tilde{h}_n^{(2)}(k_1 a) - \frac{\mu_{12} - 1}{\mu_{12} + 1} \tilde{j}_n(k_1 a) \right) \tilde{h}_n^{(2)}(k_1 r), \quad (32)$$

где

$$\tilde{V}_n = \frac{\mu_{12} \tilde{j}_n(k_1 a) \tilde{\eta}_n(k_2 a) - \tilde{\eta}_n(k_1 a) \tilde{j}_n(k_2 a)}{\tilde{\xi}_n(k_1 a) \tilde{j}_n(k_2 a) + \mu_{12} \tilde{h}_n^{(2)}(k_1 a) \tilde{\eta}_n(k_2 a)}. \quad (33)$$

При этом ограничиваемся только одним членом разложения. Теперь с использованием соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^{n+1} P_n(\cos \gamma)}{n+1} = \int_0^{\kappa} \frac{dt}{\sqrt{1 - 2 \cos \gamma t + t^2}}, \quad (34)$$

вытекающего из формулы для производящей функции полиномов Лежандра [14], получим

$$K = \tilde{K} + \tilde{\tilde{K}}, \quad (35)$$

$$\tilde{K} = \left\{ \frac{2a^2}{\mu_{12} + 1} G_0 - \frac{a^2}{4\pi r} \frac{A_0}{\kappa} \int_0^{\kappa} \frac{dt}{\sqrt{1 - 2 \cos \gamma t + t^2}} \right\}, \quad (36)$$

$$\tilde{\tilde{K}} = -i \frac{k_1 a^2}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - u_n^{\infty}) P_n(\cos \gamma), \quad (37)$$

где, как было указано выше, \tilde{K} назовем “сингулярной” и $\tilde{\tilde{K}}$ – “регулярной” частью ядра интегрального уравнения. Заметим, что

$$\int_0^{\kappa} \frac{dt}{\sqrt{1 - 2 \cos \gamma t + t^2}} = \begin{cases} -\ln(1 - \kappa), & \cos \gamma = 1, \\ \ln \left(\frac{\kappa - \cos \gamma + \sqrt{\kappa^2 - 2 \cos \gamma \kappa + 1}}{1 - \cos \gamma} \right), & \cos \gamma \neq 1. \end{cases} \quad (38)$$

Аналогично, в случае абсолютно жесткого экрана с использованием равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\kappa^{n-1} P_n(\cos \gamma) = \frac{\cos \gamma - \kappa}{(1 - 2 \cos \gamma \kappa + \kappa^2)^{3/2}}, \quad (39)$$

и, учитывая, что $v_n \sim v_n^\infty \equiv -\frac{i}{k_1 r} \kappa^n \left(A_1 n + A_2 + \frac{A_3}{n+1} \right)$ при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{K} = & \left\{ \frac{2\mu_{12} a^2}{\mu_{12} + 1} \frac{\partial^2 G_0}{\partial r \partial r'} - \frac{a}{4\pi r^2} \times \right. \\ & \times \left[\frac{A_1 \kappa (\cos \gamma - \kappa)}{(1 - 2 \cos \gamma \kappa + \kappa^2)^{3/2}} + \frac{A_2}{(1 - 2 \cos \gamma \kappa + \kappa^2)^{1/2}} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{A_3}{\kappa} \int_0^\kappa \frac{dt}{\sqrt{1 - 2 \cos \gamma t + t^2}} \right] \right\}, \quad (40) \\ \tilde{K} = & -i \frac{k_1 a}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} (v_n - v_n^\infty) P_n(\cos \gamma). \quad (41) \end{aligned}$$

Коэффициенты A_1 , A_2 , A_3 находим из асимптотики следующей величины (при $n \rightarrow \infty$):

$$\chi_n^2 = n^2 \tilde{\xi}_n(k_1 r) \left[\tilde{V}_n \tilde{\xi}_n(k_1 a) - \frac{\mu_{12} - 1}{\mu_{12} + 1} \tilde{\eta}_n(k_1 a) \right]. \quad (42)$$

При этом сохраняем только три члена разложения. В силу громоздкости соответствующих выкладок, для нахождения коэффициентов A_0 , A_1 , A_2 , A_3 использовались символьные вычисления в среде Maple. Отметим, что члены рядов в формулах (37) и (41) имеют порядок не больше $\frac{1}{n^{5/2}}$, то есть сходятся достаточно быстро.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДВУХ ПОДХОДОВ

Рассмотрим вопрос о численном решении уравнений (18) при помощи двух методов. Первый подход основан на использовании кусочно-постоянной аппроксимации неизвестной функции с последующим применением метода коллокации. А именно, вводим сетку:

$$\begin{aligned} \theta_q &= \frac{\theta_1}{N_1} \left(q - \frac{1}{2} \right), \quad q = 1, 2, \dots, N_1, \\ \varphi_l &= \frac{2\pi}{N_2} \left(l - \frac{1}{2} \right), \quad l = 1, 2, \dots, N_2. \end{aligned} \quad (43)$$

Неизвестную функцию $J(\theta', \varphi')$ ищем в виде:

$$J(\theta', \varphi') = \sum_{q=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} c_{ql} f_q(\theta') w_l(\varphi'), \quad (44)$$

где $f_q(\theta')$ и $w_l(\varphi')$ – импульсные функции:

$$\begin{aligned} f_q(\theta') &= \begin{cases} 1, & \theta_q - \Delta_1/2 < \theta' < \theta_q + \Delta_1/2, \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \\ w_l(\varphi') &= \begin{cases} 1, & \varphi_l - \Delta_2/2 < \varphi' < \varphi_l + \Delta_2/2, \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \end{aligned} \quad (45)$$

где $\Delta_1 = \frac{\theta_1}{N_1}$, $\Delta_2 = \frac{2\pi}{N_2}$. Подставив выражение (44)

в интегральное уравнение (18) и приравняв левую и правую части полученного равенства в точках коллокации с координатами (θ_p, φ_j) ($p = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{q=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} (\tilde{K}_{pj,ql} + \tilde{K}_{pj,ql}) c_{ql} = B_{pj}, \quad (46)$$

$$p = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_2},$$

где

$$\tilde{K}_{pj,ql} = \int_{\varphi_l - \Delta_2/2}^{\varphi_l + \Delta_2/2} \int_{\theta_q - \Delta_1/2}^{\theta_q + \Delta_1/2} \tilde{K}(\theta_p, \varphi_j, \theta', \varphi') d\theta' d\varphi', \quad (47)$$

$$\tilde{K}_{pj,ql} = \int_{\varphi_l - \Delta_2/2}^{\varphi_l + \Delta_2/2} \int_{\theta_q - \Delta_1/2}^{\theta_q + \Delta_1/2} \tilde{K}(\theta_p, \varphi_j, \theta', \varphi') d\theta' d\varphi'. \quad (48)$$

В последнем интеграле применяем приближенную формулу, являющуюся двумерным аналогом формулы прямоугольников:

$$\tilde{K}_{pj,ql} = \tilde{K}(\theta_p, \varphi_j, \theta_q, \varphi_l) \Delta_1 \Delta_2, \quad (49)$$

так как “регулярная” часть \tilde{K} ядра интегрального уравнения является медленно меняющейся функцией углов θ' , φ' . Правая часть СЛАУ имеет вид

$$\begin{aligned} B_{pj} = & \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} (2n+1) P_n(\cos(\gamma_0(\theta_p, \varphi_j))) \times \\ & \times (j_n(k_1 r) + V_n h_n^{(2)}(k_1 r)) \end{aligned} \quad (50)$$

в случае абсолютно мягкого экрана и

$$\begin{aligned} B_{pj} = & -k_1 \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} (2n+1) P_n(\cos(\gamma_0(\theta_p, \varphi_j))) \times \\ & \times (j'_n(k_1 r) + V_n h_n^{(2)}(k_1 r)) \end{aligned} \quad (51)$$

в случае абсолютно жесткого.

В качестве результата решения задачи дифракции мы рассматривали диаграмму рассеяния частицы Януса, которая в данном случае определяется по формулам:

$$U^1 \approx g(\theta, \varphi) \frac{\exp(-ik_1 r)}{k_1 r}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Здесь

$$g(\theta, \varphi) = g^0(\theta, \varphi) + g^1(\theta, \varphi), \quad (53)$$

$$g^0(\theta, \varphi) = i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) V_n P_n(\cos(\gamma_0(\theta, \varphi))) \quad (54)$$

– диаграмма первичного поля,

$$g^1(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} c_{ql} [\exp(ik_1 a \cos \gamma_{ql}) + \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) V_n h_n^{(2)}(k_1 a) P_n(\cos \gamma_{ql})] a^2 \sin \theta_q \Delta_1 \Delta_2 \quad (55)$$

в случае абсолютно мягкого экрана и

$$g^1(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} c_{ql} [i \cos \gamma_q \exp(ik_1 a \cos \gamma_{lq}) + \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) V_n h_n^{(2)'}(k_1 a) P_n(\cos \gamma_{lq})] \times (k_1 a)^2 \sin \theta_q \Delta_1 \Delta_2 \quad (56)$$

в случае абсолютно жесткого. В формулах (55) и (56)

$$\cos \gamma_{ql} = \sin \theta_q \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_l) + \cos \theta_q \cos \theta. \quad (57)$$

Опишем основные моменты решения интегрального уравнения (18) при помощи второй методики. Учтем осевую симметрию частицы Януса. Разложим неизвестную функцию в ряд Фурье

$$J(\theta', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(\theta') \exp(im\varphi'). \quad (58)$$

В результате подстановки формулы (58) в интегральное уравнение (18) и проектирования обеих частей равенства на базис Фурье, получим следующую бесконечную систему одномерных интегральных уравнений

$$\int_0^{\theta_1} K_m(\theta, \theta') I_m(\theta') \sin \theta' d\theta' = B_m(\theta), \quad (59)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \theta \in [0, \theta_1],$$

где $K_m = \tilde{K}_m + \tilde{\tilde{K}}_m$, причем

$$\tilde{K}_m = \frac{k_1 a^2}{\mu_{12} + 1} S_m - \frac{a}{2} A_0 F_m, \quad (60)$$

$$\tilde{\tilde{K}}_m = -i \frac{k_1 a^2}{2} \sum_{n=|m|}^{\infty} (u_n - u_n^{\infty}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta'), \quad (61)$$

$$B_m(\theta) = \sum_{n=|m|}^{\infty} i^{-n} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \times P_n^m(\cos \theta_0) (j_n(k_1 r) + V_n h_n^{(2)}(k_1 r)) \quad (62)$$

в случае абсолютно мягкого экрана и

$$\tilde{K}_m = \frac{k_1 \kappa \mu_{12}}{\mu_{12} + 1} \times \left(\frac{\partial^2 S_m}{\partial \rho \partial \rho'} \rho \rho' + \frac{\partial^2 S_m}{\partial z \partial \rho'} z \rho' + \frac{\partial^2 S_m}{\partial \rho \partial z'} \rho z' + \frac{\partial^2 S_m}{\partial z \partial z'} z z' \right) - \frac{\kappa}{2} \left(A_1 \left(\frac{\tilde{S}_{m+1}^I + \tilde{S}_{m-1}^I}{2} \rho \rho' + \tilde{S}_m^I (z z' - a^2) \right) + A_2 \tilde{S}_m + \frac{1}{a} A_3 F_m \right), \quad (63)$$

$$\tilde{\tilde{K}}_m = -i \frac{k_1 \kappa}{2} \sum_{n=|m|}^{\infty} (v_n - v_n^{\infty}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta'), \quad (64)$$

$$B_m(\theta) = -k_1 \sum_{n=|m|}^{\infty} i^{-n} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_0) (j_n'(k_1 r) + V_n h_n^{(2)'}(k_1 r)) \quad (65)$$

в случае абсолютно жесткого. Здесь

$$S_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ik_1 R - im\psi)}{k_1 R} d\psi, \quad (66)$$

$$\tilde{S}_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-im\psi)}{k_1 R} d\psi,$$

$$\tilde{S}_m^I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-im\psi)}{(k_1 R)^3} d\psi, \quad (67)$$

$$F_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) \exp(-im\psi) d\psi,$$

а функция $F(\psi)$ имеет вид (38). В формуле (63) (ρ, φ, z) , (ρ', φ', z') – цилиндрические координаты точки наблюдения и точки источника. Эффективный численный алгоритм нахождения функций S_m и их производных приведен в [15].

Для решения одномерных интегральных уравнений (59) воспользуемся разложением неизвестных функций $I_m(\theta')$ в ряд по ортогональным полиномам Якоби с весом, учитывающим особенность на краю экрана. Предварительно сделаем замену переменной $x = \cos \theta$. В результате

$$I_m(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x_0}} \sum_{q=0}^{L-1} a_q^m P_q^{(0,-1/2)} \left(2 \frac{x-x_0}{1-x_0} - 1 \right) \quad (68)$$

в случае абсолютно мягкого экрана и

$$I_m(x) = \sqrt{x-x_0} \sum_{q=0}^{L-1} a_q^m P_q^{(0,1/2)} \left(2 \frac{x-x_0}{1-x_0} - 1 \right) \quad (69)$$

в случае абсолютно жесткого. Здесь $P_q^{(0,-1/2)}(x)$ и $P_q^{(0,1/2)}(x)$ – полиномы Якоби, $x_0 = \cos \theta_j$. По аналогии с работой [12] применим метод коллокации, выбрав точки коллокации, удовлетворяющие соотношению

$$x_p = x_0 + \frac{1}{2}(t_p + 1)(1 - x_0), \quad p = \overline{1, L}, \quad (70)$$

где

$$P_L^{(0,-1/2)}(t_p) = 0, \text{ либо } P_L^{(0,1/2)}(t_p) = 0, \quad (71)$$

соответственно в случае условия Дирихле или Неймана на экране. Тогда в результате подстановки разложений (68) и (69) в уравнения (59), получим следующий бесконечный набор СЛАУ

$$\sum_{q=0}^{L-1} (\tilde{G}_{pq}^m + \tilde{G}_{pq}^m) a_q^m = B_p^m, \quad p = \overline{1, L}, \quad (72)$$

где

$$\tilde{G}_{pq}^m = 2\sqrt{1-x_0} \int_0^1 \tilde{K}_m(x_p, x_0 + \tau^2(1-x_0)) P_{2q}(\tau) d\tau, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{pq}^m &= -i \frac{k_1 a^2}{2} \sum_{n=|m|}^{\infty} (u_n - u_n^{\infty}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x_p) \times \\ &\times \int_{x_0}^1 P_n^m(x) P_{2q}(\tau) \frac{dx}{\sqrt{x-x_0}}, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} B_p^m &= \sum_{n=|m|}^{\infty} i^{-n} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x_p) P_n^m(\cos \theta_0) \times \\ &\times (j_n(k_1 r) + V_n h_n^{(2)}(k_1 r)) \end{aligned} \quad (75)$$

в случае абсолютно мягкого экрана и

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{pq}^m &= 2\sqrt{(1-x_0)^3} \times \\ &\times \int_0^1 \tilde{K}_m(x_p, x_0 + \tau^2(1-x_0)) P_{2q+1}(\tau) \tau d\tau, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{pq}^m &= -i \frac{k_1 k}{2} \sum_{n=|m|}^{\infty} (v_n - v_n^{\infty}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x_p) \times \\ &\times \int_{x_0}^1 P_n^m(x) \frac{P_{2q+1}(\tau)}{\tau} \sqrt{x-x_0} dx, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} B_p^m &= -k_1 \sum_{n=|m|}^{\infty} i^{-n} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x_p) P_n^m(\cos \theta_0) \times \\ &\times (j_n'(k_1 r) + V_n h_n^{(2)'}(k_1 r)) \end{aligned} \quad (78)$$

в случае абсолютно жесткого. Здесь $\tau = \sqrt{\frac{x-x_0}{1-x_0}}$, $P_n(\tau)$ – полиномы Лежандра. Заметим, что при

интегрировании сингулярной части ядра (см. формулы (73) и (76)) мы заменили переменную x на τ . Соответствующие интегралы вычисляли при помощи адаптивной программы на языке Matlab. Интегралы в (74) и (77) вычисляли при помощи квадратурных формул с весом $1/\sqrt{t+1}$ или $\sqrt{t+1}$.

Приведем формулы для диаграммы рассеяния при использовании второй методики. Диаграмма вновь имеет вид (53). При этом

$$g^1(\theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (g_m^{10}(\theta) + g_m^{11}(\theta)) \exp(im\varphi), \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} g_m^{10}(\theta) &= -\frac{(k_1 a)^2}{2} i^m \sum_{q=0}^{L-1} a_q^m \times \\ &\times \int_{x_0}^1 J_m(k_1 a \sin \theta \sqrt{1-x^2}) \exp(ik_1 a \cos \theta) \times \\ &\times P_{2q}(\tau) \frac{dx}{\sqrt{x-x_0}}, \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} g_m^{11}(\theta) &= -\frac{k_1 a^2}{2} \sum_{q=0}^{L-1} a_q^m \times \\ &\times \sum_{n=|m|}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) V_n h_n^{(2)}(k_1 a) \times \\ &\times \int_{x_0}^1 P_n^m(x) P_{2q}(\tau) \frac{dx}{\sqrt{x-x_0}} \end{aligned} \quad (81)$$

в случае абсолютно мягкого экрана и

$$\begin{aligned} g_m^{10}(\theta) &= \frac{(k_1 a)^2}{2} i^m \sum_{q=0}^{L-1} a_q^m \times \\ &\times \int_{x_0}^1 \left[\sin \theta \sqrt{1-x^2} J_m'(k_1 a \sin \theta \sqrt{1-x^2}) + \right. \\ &\left. + ix \cos \theta J_m(k_1 a \sin \theta \sqrt{1-x^2}) \right] \times \end{aligned} \quad (82)$$

$$\times \exp(ik_1 a \cos \theta) \frac{P_{2q+1}(\tau)}{\tau} \sqrt{x-x_0} dx,$$

$$\begin{aligned} g_m^{11}(\theta) &= \frac{k_1 a}{2} \sum_{q=0}^{L-1} a_q^m \times \\ &\times \sum_{n=|m|}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) V_n \xi_n(k_1 a) \times \\ &\times \int_{x_0}^1 P_n^m(x) \frac{P_{2q+1}(\tau)}{\tau} \sqrt{x-x_0} dx \end{aligned} \quad (83)$$

в случае абсолютно жесткого.

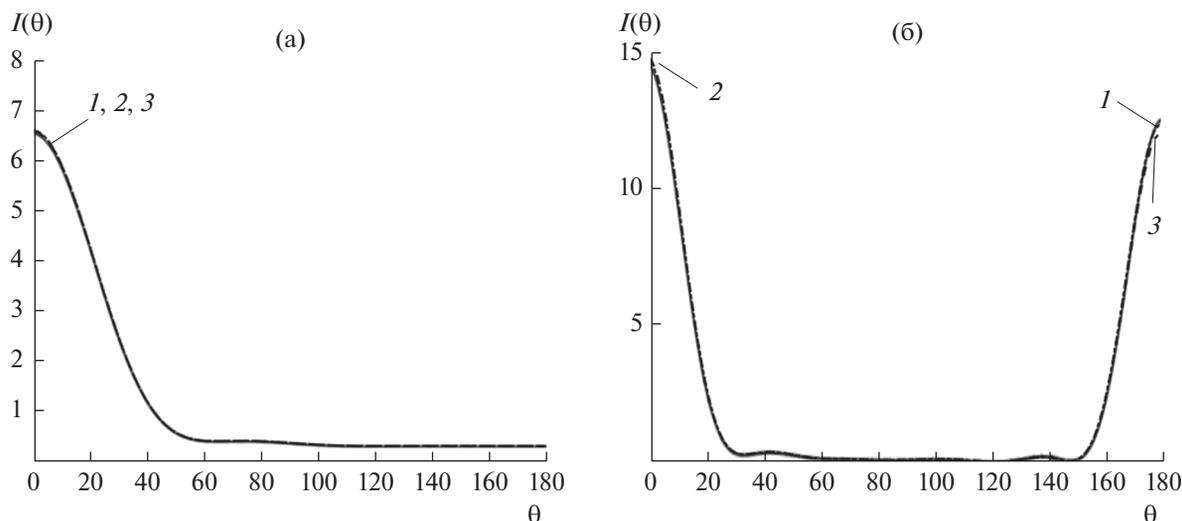


Рис. 2. Угловые зависимости интенсивности рассеянного поля сферы Януса в виде пронизываемого шара, частично покрытого абсолютно мягким сферическим экраном для двух волновых размеров (а) – $k_1a = 3$ и (б) – $k_1a = 6$, полученные при помощи метода Т-матриц и при помощи алгоритмов на основе МПГУ. Угол полуоткрыва экрана (а) – $\theta_J = 150^\circ$ и (б) – $\theta_J = 90^\circ$.

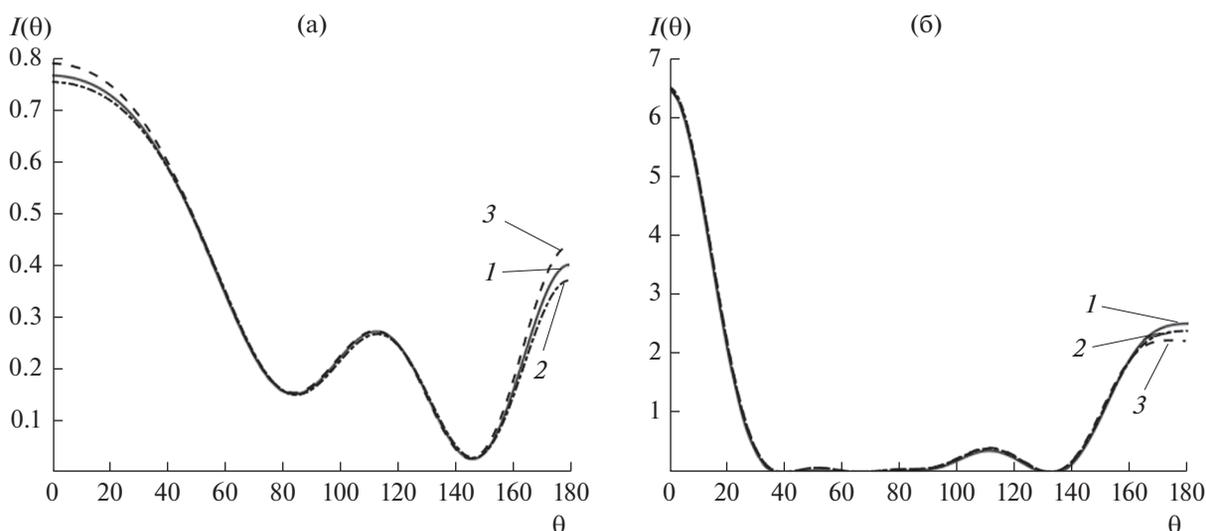


Рис. 3. Угловые зависимости интенсивности рассеянного поля сферы Януса в виде пронизываемого шара, частично покрытого абсолютно жестким сферическим экраном для двух волновых размеров (а) – $k_1a = 3$ и (б) – $k_1a = 6$, полученные при помощи метода Т-матриц и при помощи алгоритмов на основе МПГУ. Угол полуоткрыва экрана (а) – $\theta_J = 150^\circ$ и (б) – $\theta_J = 90^\circ$.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим результаты численного моделирования. Для тестирования разработанных методов было проведено сравнение с результатами, полученными при помощи метода Т-матриц в работе [7]. Волновые числа и плотности сред вне и внутри шара были равны $k_1 = 1, \mu_1 = 1$ и $k_2 = 1.5, \mu_2 = 1.5$, соответственно. Параметр δ при использовании МПГУ во всех случаях брался равным 10^{-3} . Угол полуоткрыва экрана был равен $\theta_J = 90^\circ$. Угол падения первичной волны $\theta_0 = 0^\circ$. Рассматривались два различных радиуса шара $k_1a = 3$ и $k_1a = 6$. Число точек

коллокации для первого метода $N_1 = 40, N_2 = 160$, для второго метода $L = 32$. В качестве рассматриваемой характеристики бралась интенсивность рассеянного поля, определяемая следующим образом:

$$I(\theta) = \frac{1}{k_1^2} |g(\theta, 0)|^2. \tag{84}$$

На рис. 2 и 3 приведены угловые зависимости интенсивности рассеяния для метода Т-матриц (кривая 1) и предлагаемых подходов на основе МПГУ (кривая 2 соответствует первому, а кривая 3 – второму методу). На рис. 2 видно, что для

Таблица 1. Точность выполнения оптической теоремы для сферы Януса в виде проникаемого шара, частично покрытого абсолютно жестким сферическим экраном (первая методика)

$N_1, N_2 = 4N_1$	σ	$-\text{Im}(g(\theta_0, 0))$	$\Delta_{\text{отн}}$
$k_1 a = 3$			
15	2.489595	2.515150	1.03×10^{-2}
25	2.544564	2.564611	7.88×10^{-3}
35	2.570533	2.587121	6.45×10^{-3}
40	2.578923	2.594292	5.96×10^{-3}
$k_1 a = 6$			
15	14.917236	15.227829	2.08×10^{-2}
25	15.002267	15.247020	1.63×10^{-2}
35	15.060940	15.255580	1.29×10^{-2}
40	15.081490	15.257716	1.17×10^{-2}

Таблица 2. Точность выполнения оптической теоремы для сферы Януса в виде проникаемого шара, частично покрытого абсолютно жестким сферическим экраном (вторая методика)

L	σ	$-\text{Im}(g(\theta_0, 0))$	$\Delta_{\text{отн}}$
$k_1 a = 3$			
16	2.634956	2.640329	2.04×10^{-3}
32	2.636773	2.642852	2.30×10^{-3}
48	2.633772	2.638545	1.81×10^{-3}
64	2.632997	2.637633	1.76×10^{-3}
$k_1 a = 6$			
16	15.24457	15.25526	7.01×10^{-4}
32	15.22389	15.21330	6.96×10^{-4}
48	15.25218	15.26120	5.91×10^{-4}
64	15.26292	15.26505	1.39×10^{-4}

условия Дирихле на экране результаты, полученные всеми тремя методами, совпадают с графической точностью. Для условия Неймана (рис. 3) результаты расчета интенсивности рассеянного поля, которые получены при помощи подхода, основанного на использовании кусочно-постоянной аппроксимации (кривая 2), отличаются меньше от соответствующих результатов, полученных методом Т-матриц, чем при использовании второго метода. Данный факт можно объяснить тем, что базис (69) учитывает особенность неизвестной функции на краю экрана, в то время как в методе Т-матриц и в первом методе на основе МПГУ эта особенность не учитывается. Отметим также, что в силу наличия второй нормальной производной ФГ в случае условия Неймана на экране, точность расчета диаграммы при помощи МПГУ несколько ниже, чем в случае условия Дирихле.

В качестве критерия проверки правильности полученных результатов рассматривалась оптическая теорема, которая записывается в виде [16]

$$\sigma = -\text{Im}(g(\theta_0, 0)), \quad (85)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |g(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (86)$$

Для оценки точности выполнения оптической теоремы рассчитывалась относительная разность левой и правой частей в формуле (85):

$$\Delta_{\text{отн}} \equiv \frac{|\sigma + \text{Im}(g(\theta_0, 0))|}{\sigma}. \quad (87)$$

Результаты этой проверки для первого и второго из предлагаемых подходов при рассмотренных выше параметрах приведены в табл. 1 и 2. Как было отмечено ранее, для условия Неймана на

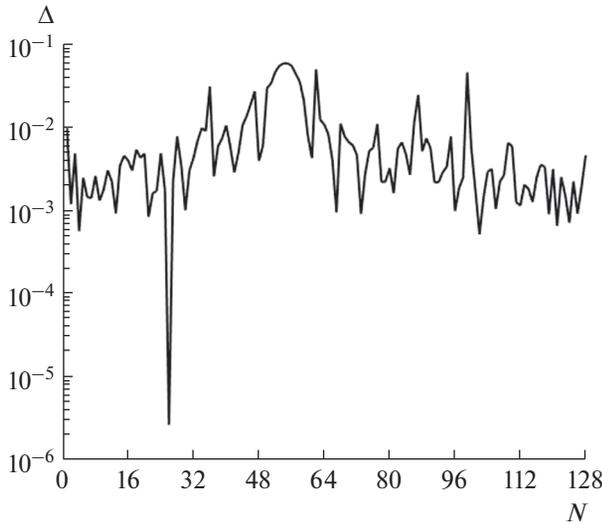


Рис. 4. Распределение невязки на контуре осевого сечения вспомогательной поверхности для сферы Януса в виде пронцаемого шара, частично покрытого абсолютно мягким сферическим экраном. Угол падения первичной волны $\theta_0 = 45^\circ$.

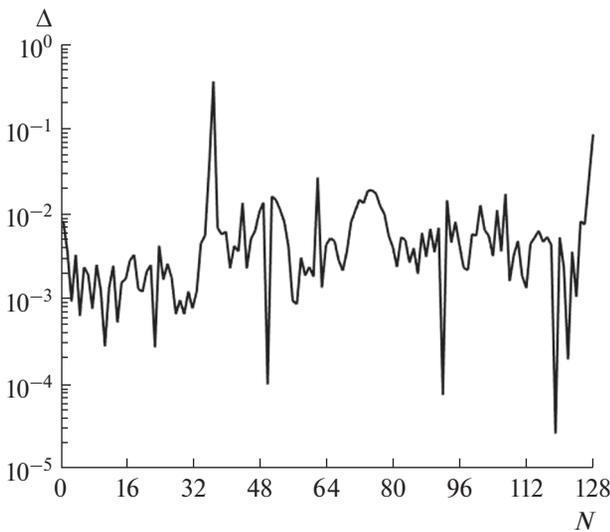


Рис. 5. Распределение невязки на контуре осевого сечения вспомогательной поверхности для сферы Януса в виде пронцаемого шара, частично покрытого абсолютно жестким сферическим экраном. Угол падения первичной волны $\theta_0 = 45^\circ$.

экране точность выполнения оптической теоремы ниже, чем для условия Дирихле, поэтому рассматривался случай абсолютно жесткого экрана. Из табл. 1 видно, что при использовании первого подхода относительная разность правой и левой частей равенства (87) — величина $\Delta_{\text{отн}}$ — уменьшается с ростом числа точек коллокации N_1 и не

превышает 3×10^{-2} . При одинаковых значениях N_1 для тела меньших размеров точность выполнения оптической теоремы выше. Для второго подхода оптическая теорема выполняется с более высокой точностью в случае большего размера тела, а именно не превосходит 3×10^{-3} для $k_1 a = 3$ и 2×10^{-4} для $k_1 a = 6$.

В качестве еще одной проверки разработанных алгоритмов, для второго из рассматриваемых подходов была вычислена невязка краевого условия, определяемая формулой:

$$\Delta(\theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\theta_j} K_m(\theta, \theta') I_m(\theta') \sin \theta' d\theta' - B_m(\theta) \right] \times \exp(im\varphi), \quad (88)$$

где I_m имеет вид (68) или (69). Невязка вычислялась на контуре осевого сечения вспомогательной поверхности S_δ . На рис. 4 и 5 приведены кривые зависимости невязки от номера N точки наблюдения θ (число точек, в которых вычислялась невязка, было выбрано равным 128). Угол падения падающей волны $\theta_0 = 45^\circ$, размеры шара $k_1 a = 6$, угол наблюдения $\varphi = 0$, а остальные параметры такие же, как и для рис. 2 и 3. На рис. 4 рассматривался абсолютно мягкий экран, а на рис. 5 — абсолютно жесткий. Как видно из графиков, невязка для условия Неймана на экране имеет два выброса, имеющие порядок 0.3. В то же время максимальный уровень невязки на большей части контура осевого сечения экрана не превосходит 2×10^{-2} , т.е. достаточно мал. Расчеты показывают, что для первого подхода невязка краевого условия имеет на порядок большие значения.

На рис. 6 и 7 изображены угловые зависимости интенсивности рассеянного поля от угла раскрыва сферического экрана. Кривая *1* соответствует дифракции на пронцаемом шаре, который не покрыт экраном. Соответствующая кривая получена при помощи подстановки в формулу (84) диаграммы первичного поля $g^0(\theta, \varphi)$ вместо $g(\theta, \varphi)$. Кривой *б* на рисунках показаны зависимости интенсивности при дифракции плоской волны на абсолютно мягкой (рис. 6) или абсолютно жесткой (рис. 7) сфере соответствующего волнового размера, полученные при помощи модифицированного метода дискретных источников (ММДИ) [17]. Кривые 2–5 соответствуют углам раскрыва экрана, равным $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ и 179° . Волновой размер сферы Януса и угол падения волны — $k_1 a = 6, \theta_0 = 0$. Материальные параметры сред и волновые числа те же, что и для предыдущих рисунков. Результаты, приведенные на рисунках, получены при помощи первой из рас-

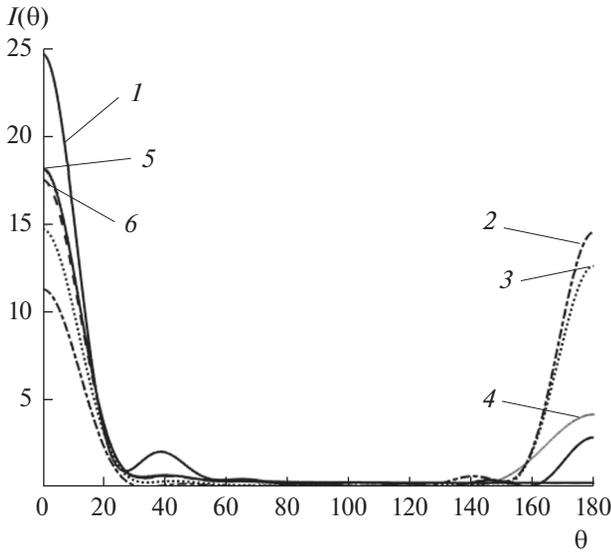


Рис. 6. Угловые зависимости интенсивности рассеянного поля сферы Януса для различных углов раскрытия покрывающего ее абсолютно мягкого сферического экрана.

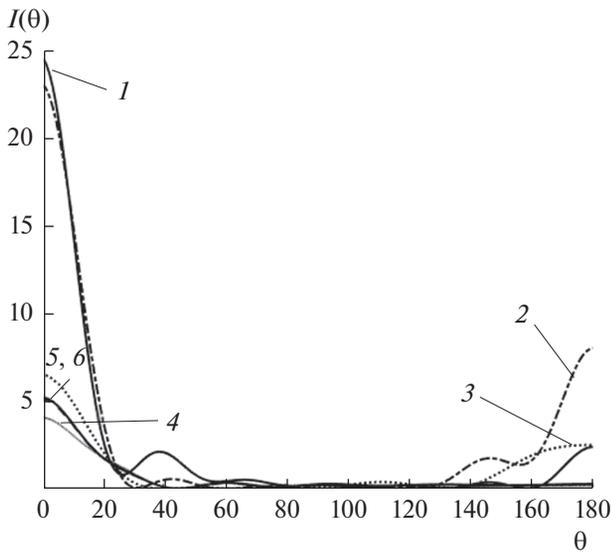


Рис. 7. Угловые зависимости интенсивности рассеянного поля сферы Януса для различных углов раскрытия покрывающего ее абсолютно жесткого сферического экрана.

смаатриваемых методик при $N_1 = 40$, $N_2 = 160$. На рисунках видно, что в случае, когда экран почти полностью покрывает шар (кривая б), график интенсивности рассеянного поля совпадает с результатами для идеально отражающей сферы, что соответствует физической картине рассматриваемого явления. Видно также, что в случае абсолютно мягкого и абсолютно жесткого экранов имеется резкий максимум интенсивности в направлении

угла падения плоской волны. В случае условия Дирихле величина максимума имеет наибольшее значение для $\theta_j = 179^\circ$ (когда экран вырождается в сферу). При отсутствии экрана (то есть при дифракции на пронизываемом шаре) максимум в направлении падения волны имеет еще большее значение (чем для покрытого шара). В направлении обратного рассеяния (при $\theta = 180^\circ$) также имеется максимум интенсивности, который принимает наибольшие значения при $\theta_j = 45^\circ$ и $\theta_j = 90^\circ$. В случае абсолютно жесткого экрана величина максимума интенсивности в направлении падения плоской волны имеет существенно большее значение для $\theta_j = 45^\circ$ по сравнению с другими углами раскрытия экрана. Уровень обратного рассеяния также максимален при $\theta_j = 45^\circ$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе МПГУ разработаны два алгоритма численного решения задачи дифракции плоской волны на сфере Януса в виде пронизываемого шара, частично покрытого абсолютно мягким или абсолютно жестким сферическим экраном. Выполнено сравнение результатов расчета интенсивности рассеянного поля, полученной с использованием предложенных методов с результатами, найденными методом Т-матриц. Показано хорошее совпадение результатов как при применении обеих методик на основе МПГУ, так и при использовании метода Т-матриц. Проведена проверка точности выполнения оптической теоремы и невязки краевого условия в случае условий Дирихле и Неймана на экране. Показано, что погрешность выполнения оптической теоремы не превосходит 3×10^{-2} при использовании первой методики и 3×10^{-3} в случае применения второго метода. Показано, что невязка краевого условия при применении второй методики имеет малые значения на большей части осевого сечения экрана. Таким образом, можно сделать вывод о том, что вторая методика дает более точные результаты. Построены и исследованы угловые зависимости интенсивности рассеянного поля для различных углов раскрытия отражающего экрана. Показано существенное различие между поведением угловых зависимостей интенсивности в случае абсолютно мягкого и абсолютно жесткого экранов. Установлено, что для выбранных параметров задачи максимальный уровень обратного рассеяния достигается при $\theta_j = 45^\circ$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-02-00961, 19-02-00654).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhang J., Grzybowski B.A., Granick S. Janus particle synthesis, assembly, and application // *Langmuir*. 2017. V. 33. № 28. P. 6964–6977.
2. Lattuada M., Hatton T.A. Synthesis, properties and applications of Janus nanoparticles // *Nano Today*. 2011. V. 6. № 3. P. 286–308.
3. Kim D., Avital E.J., Miloh T. Sound scattering and its reduction by a Janus sphere type // *Advances in Acoustics and Vibration*. 2014. V. 2014. Article ID 392138.
4. Gillman A. An integral equation technique for scattering problems with mixed boundary conditions // *Advances Comput. Math*. 2017. V. 43. P. 351–364.
5. Шестопалов В.П. Сумматорные уравнения в теории дифракции. Киев: Наук. думка, 1983.
6. Hawkins S.C., Rother T., Wauer J. A numerical study of acoustic scattering by Janus spheres // *J. Acoust. Soc. Am*. 2020. V. 147. № 6. P. 4097–4105.
7. Rother T. *Sound Scattering on Spherical Objects*. Heidelberg: Springer, 2020.
8. Кюркчан А.Г., Аютин А.П. Метод продолженных граничных условий и вейвлеты // *Докл. Росс. Акад. наук*. 2002. Т. 385. № 3. С. 309–313.
9. Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И. Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М.: Медиа Паблишер, 2014.
10. Кюркчан А.Г., Маненков С.А. Гибридный подход к решению задачи дифракции на плоских экранах // *Акуст. журн*. 2015. Т. 61. № 3. С. 302–310.
11. Кюркчан А.Г., Маненков С.А. Решение задачи дифракции на плоском экране, расположенном в плоскостной среде, с помощью метода продолженных граничных условий // *Радиотехника и электроника*. 2020. Т. 65. № 7. С. 644–652.
12. Gerolymatos P.G., Manenkov A.B., Tigelis I.G., Amditis A.J. Metal iris influence on guided-mode diffraction // *J. Opt. Soc. Am*. 2006. V. 23. № 6. P. 1333–1339.
13. Маненков С.А. Применение различных базисов при решении задачи дифракции на незамкнутых экранах // *Радиотехника и электроника*. 2014. Т. 59. № 3. С. 246–252.
14. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами // Под ред. Абрамовица М. и Стиган И.М. М.: Наука, 1979. 832 с.
15. Маненков С.А. Задача дифракции электромагнитного поля на неоднородном теле с осевой симметрией // *Радиотехника и электроника*. 2018. Т. 63. № 1. С. 3–13.
16. Шендеров Е.Л. *Излучение и рассеяние звука*. Л.: Судостроение, 1989.
17. Маненков С.А. Новая версия модифицированного метода дискретных источников применительно к задаче дифракции на теле вращения // *Акуст. журн*. 2014. Т. 60. № 2. С. 129–136.