АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2021, том 67, № 2, с. 174–184

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 681.7;534.91

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ НА ИСТОЧНИК В АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ И ПРЕДЕЛ УГЛОВОГО РАЗРЕШЕНИЯ

© 2021 г. А. Г. Сазонтов[a, b, *], И. П. Смирнов[a, b]

[a]Институт прикладной физики РАН,
ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, Нижегородская обл., 603155 Россия

[b]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Ашхабадская ул. 4, Нижний Новгород, Нижегородская обл., 603105 Россия

*e-mail: sazontov@ipfran.ru

Поступила в редакцию 20.09.2020 г.
После доработки 20.09.2020 г.
Принята к публикации 22.12.2020 г.

Построен адаптивный алгоритм пониженного ранга, позволяющий определить направления на источники звука с помощью горизонтальной антенной решетки, работающей в волноводе с неточно известными параметрами. Представлены результаты статистического моделирования, демонстрирующие высокую разрешающую способность предложенного метода и приемлемую точность оценивания углового положения источников без использования априорной информации о глубине их погружения и расстояния до приемной антенны. На основе критерия Смита найден теоретический предел углового разрешения в зависимости от входного отношения сигнал/шум и объема входной выборки.

Ключевые слова: акустический волновод с неточно известными параметрами, оценивание направлений на источники сигналов, адаптивный алгоритм NM-RARE, предел углового разрешения, статистическое моделирование

DOI: 10.31857/S0320791921020076

ВВЕДЕНИЕ

Оценка углового положения источника в мелководном канале с помощью горизонтальной линейной антенны является одной из важных прикладных задач гидроакустики. Как известно (см., например, [1–3]), ее решение, основанное на методе сканирования, приводит к заметным ошибкам в определении направления на источник, растущим с увеличением угла прихода (отсчитываемого от нормали к апертуре антенны) и числа распространяющихся нормальных волн. Традиционные алгоритмы (типа метода Кейпона, MUSIC, максимума правдоподобия) позволяют получить несмещенные оценки угловых координат (при условии точно известных параметров волновода), однако в процессе локализации они используют трудоемкую процедуру одновременного поиска по глубине, дальности и азимутальному углу, что требует больших вычислительных затрат. В этой связи возникает необходимость разработки устойчивых методов оценивания, позволяющих определить направление на источник без знания глубины его погружения и расстояния до приемной антенной решетки (АР).

Один из способов решения такого рода обратной задачи был предложен в работе [4] (см. также [5], где приведена альтернативная формулировка алгоритма). Соответствующая процедура оценивания, получившая название метода подпространственного пересечения или метода SI (“subspace intersection”), опирается на априорное знание волновых чисел распространяющихся нормальных волн. Однако в изменчивых и всегда не полностью известных условиях морской среды несоответствие (рассогласование) между расчетной моделью канала и реальным акустическим волноводом может приводить к значительному ухудшению работоспособности данного способа локализации.

В последнее десятилетие в теории обработки сигналов антенными решетками интенсивно развивается направление, связанное с определением минимального углового расстояния между источниками, при котором они могут быть корректно локализованы с использованием алгоритмов сверхразрешения. На сегодняшний день существуют три общепринятых критерия, позволяющих определить указанное расстояние. Первый, предложенный Коксом [6], представляет собой необходимое условие одновременного существования двух близко расположенных минимумов целевой функции. Однако такое рассмотрение не

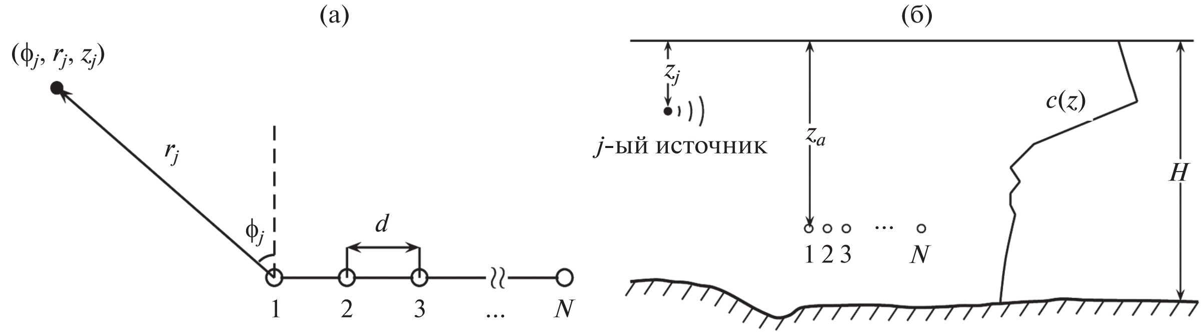

Рис. 1. Взаимное расположение источника и горизонтальной антенны в волноводе: (а) – вид сверху, (б) – вид сбоку.

является универсальным, поскольку зависит от конкретного вида используемого метода оценивания. В этой связи наибольшее распространение получил критерий, основанный на статистической проверке гипотез о наличии одного или двух сигналов в принятой смеси [7–9], а также критерий Смита [10], в соответствии с которым источники считаются разрешенными, если угловое разнесение между ними превосходит среднеквадратичную ошибку оценивания этого разнесения.

В настоящей работе построен адаптивный алгоритм пониженного ранга NM-RARE ("normal mode based rank reduction"), предназначенный для определения угловых положений источников без знания их пространственных координат в волноводе с неточно известными параметрами. Проводимое рассмотрение основано на наихудшем сценарии приема, учитывающем отличие ожидаемой реплики от истинной, и позволяющем минимизировать эффекты рассогласования различной природы [11, 12]. Представлены результаты сравнительного анализа эффективности данного способа оценивания с методом сканирования и методом подпространственного пересечения. На основе критерия Смита найден теоретический предел углового разрешения в зависимости от отношения сигнал/шум и объема входной выборки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим акустический волновод, в котором звуковое поле создается J источниками, излучающими детерминированные узкополосные сигналы $s_j(t)$ $(j = 1,\ldots,J)$ с одинаковой несущей частотой. Прием осуществляется линейной горизонтальной АР, состоящей из N элементов, расположенных на горизонте z_a. Положение j-го источника определяется глубиной его погружения z_j, расстоянием r_j до приемной АР и азимутальным углом ϕ_j, отсчитываемым от нормали к апертуре АР. Геометрия задачи показана на рис. 1. (Начало координат по дальности выбрано в месте установки первого элемента АР.)

В узкополосном приближении поле на входе АР характеризуется N-мерным вектором наблюдения $\mathbf{x}_l$:

$$\mathbf{x}_l = \sum_{j=1}^{J} \mathbf{g}(\phi_j, \boldsymbol{\theta}_j)\, s_j(l) + \mathbf{n}_l, \quad l = 1,2,\ldots,L. \tag{1}$$

Здесь l – номер выборочного отсчета, $\boldsymbol{\theta}_j = (r_j, z_j)^T$ (верхний индекс T означает операцию транспонирования), $\mathbf{g}(\phi_j, \boldsymbol{\theta}_j) = \left[G(\mathbf{r}_1, z_a|\mathbf{r}_j, z_j),\ldots,G(\mathbf{r}_N, z_a|\mathbf{r}_j, z_j)\right]^T$ – вектор отклика АР при приеме сигнала от j-го источника, $\{G(\mathbf{r}_n, z_a|\mathbf{r}_j, z_j)\}_{n=1}^N$ – функции Грина среды распространения, $\mathbf{n}_l$ – вектор аддитивного белого шума, а L – объем входной выборки. Задача состоит в построении адаптивного алгоритма обработки, позволяющего по принятой выборке $\{\mathbf{x}_l\}_{l=1}^L$ оценить угловые положения источников без знания их пространственных координат, и определении наименьшего углового разнесения, при котором источники могут быть корректно разрешены.

При дальнейшем анализе будем считать, что $\mathbf{n}_l$ является случайным гауссовым вектором с нулевым средним значением и характеризуется ковариационной матрицей $\langle \mathbf{n}_l \mathbf{n}_l^+ \rangle = \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$, где σ_n^2 – неизвестный уровень шума, $\mathbf{I}_N$ – единичная матрица размерности $N \times N$, а $(\cdot)^+$ и $\langle\cdot\rangle$ означают операции эрмитового сопряжения и статистического усреднения, соответственно.

В рамках волнового подхода функция Грина $G(\mathbf{r}_n, z_a|\mathbf{r}_j, z_j)$ может быть представлена в виде суперпозиции конечного числа M распространяющихся нормальных мод. При расположении источников в дальней зоне антенны (когда $|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_j| \approx r_j - d(n-1)\sin(\phi_j)$, где d – межэлементное расстояние) эта функция записывается следующим образом

$$G(\mathbf{r}_n, z_a | \mathbf{r}_j, z_j) = \sum_{m=1}^{M} e^{ik_m d(n-1)\sin\phi_j} b_m(\boldsymbol{\theta}_j),$$
$$b_m(\boldsymbol{\theta}_j) = \frac{\varphi_m(z_j)\,\varphi_m(z_a)}{\sqrt{8\pi k_m r_j}} e^{ik_m r_j + i\pi/4}. \tag{2}$$

Здесь $\varphi_m(z_a)$ и $\varphi_m(z_j)$ – собственные функции m-ой моды на глубине расположения приемной АР и j-го источника излучения, соответственно, а k_m – горизонтальное волновое число.

С использованием модового описания для вектора отклика АР имеем:

$$\mathbf{g}(\phi, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U}(\phi)\,\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}), \tag{3}$$

где $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$ – вектор размерности $M \times 1$, компонентами которого являются амплитуды мод, определяемые формулой (2), а $\mathbf{U}(\phi)$ – матрица размерности $N \times M$ вида

$$\mathbf{U}(\phi) = [\mathbf{u}_1(\phi)\cdots\mathbf{u}_{\mathrm{M}}(\phi)], \quad \text{где}$$
$$\mathbf{u}_m(\phi) = \left(1, \mathrm{e}^{ik_m d\sin(\phi)}, \ldots, \mathrm{e}^{ik_m d(N-1)\sin(\phi)}\right)^T,$$
$$m = 1, \ldots, M.$$

При $M < N$ ранг матрицы $\mathbf{U}(\varphi)$ равен M (при условии, что векторы $\{\mathbf{u}_m(\phi)\}_{m=1}^{M}$ линейно независимы).

С учетом (3) исходный вектор наблюдения (1) может быть переписан следующим образом

$$\mathbf{x}_l = \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l + \mathbf{n}_l, \quad l = 1, 2, \ldots, L.$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi} = (\phi_1, \ldots, \phi_J)^T$ – искомый вектор направлений размерности $J \times 1$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^T, \ldots \boldsymbol{\theta}_J^T)^T$ – вектор размерности $2J \times 1$, определяющий пространственные положения источников, $\mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{U}(\phi_1)\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_1), \ldots, \mathbf{U}(\phi_J)\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_J)]$ – передаточная матрица канала размерности $N \times J$, а $\mathbf{s}_l = [s_1(l), \ldots, s_J(l)]^T$ – вектор комплексных огибающих излученных сигналов размерности $J \times 1$.

Одним из наиболее распространенных способов локализации является метод MUSIC [13]. Эта процедура основана на использовании информации, содержащейся в системе собственных векторов $\{\hat{\boldsymbol{\psi}}\}_{i=1}^{N}$ выборочной матрицы $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\mathbf{x} = (1/L)\sum_{l=1}^{L} \mathbf{x}(t_l)\mathbf{x}^+(t_l)$:

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\mathbf{x}\hat{\boldsymbol{\psi}}_i = \hat{\lambda}_i\hat{\boldsymbol{\psi}}_i, \quad i = 1, \ldots N,$$

где $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_N$ – положительные собственные числа, пронумерованные в порядке убывания, т. е. $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_N$. Первые J старших собственных векторов формируют сигнальное подпространство $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_\mathbf{s} = [\hat{\boldsymbol{\psi}}_1 \cdots \hat{\boldsymbol{\psi}}_J]$, а $N - J$ оставшихся векторов – шумовое $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_\mathbf{n} = [\hat{\boldsymbol{\psi}}_{J+1}, \ldots, \hat{\boldsymbol{\psi}}_N]$.

Для рассматриваемого сценария положения источников могут быть найдены из условия

$$(\hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \arg\min_{\phi,\boldsymbol{\theta}} \left\| \hat{\boldsymbol{\Psi}}_\mathbf{n}^+ \mathbf{g}(\phi, \boldsymbol{\theta}) \right\|^2 \equiv$$
$$\equiv \arg\min_{\phi,\boldsymbol{\theta}} \mathbf{g}^+(\phi, \boldsymbol{\theta})\hat{\boldsymbol{\Pi}}_\mathbf{n}\mathbf{g}(\phi, \boldsymbol{\theta}), \tag{4}$$

где $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_\mathbf{n} = \hat{\boldsymbol{\Psi}}_\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\Psi}}_\mathbf{n}^+$ – проекционная матрица на шумовое подпространство. Процедура оценивания сводится к поиску J минимумов целевой функции $\mathbf{g}^+(\phi, \boldsymbol{\theta})\hat{\boldsymbol{\Pi}}_\mathbf{n}\mathbf{g}(\phi, \boldsymbol{\theta})$ в трехмерной области параметров. Последнее требует больших вычислительных затрат.

Ниже нас будет интересовать оценка угловых координат источников в волноводе. Тогда, рассматривая модовый вектор $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$ (зависящий от неинформационного параметра $\boldsymbol{\theta}$) как неизвестный и принимая во внимание представление (3), переформулируем критерий MUSIC (4) следующим образом

$$\hat{\phi} = \arg\min_{\phi}\{\min_{\mathbf{b}} \mathbf{b}^+\mathbf{C}(\phi)\mathbf{b}\}, \tag{5}$$

где $\mathbf{C}(\phi) = \mathbf{U}^+(\phi)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_\mathbf{n}\mathbf{U}(\phi)$ – матрица размерности $M \times M$, ранг которой равен $\mathrm{rank}\{\mathbf{C}\} = \mathrm{rank}\{\mathbf{C}\} = \min(N - J, M)$, и при

$$N > M + J \tag{6}$$

совпадает с числом распространяющихся нормальных волн M.

Входящий в (5) неизвестный вектор $\mathbf{b}$ может быть найден лишь с точностью до произвольного комплексного множителя, поэтому для однозначного определения $\mathbf{b}$ можно наложить на него дополнительное ограничение $\|\mathbf{b}\|^2 = 1$ (исключающее тривиальное решение $\mathbf{b} = 0$). В этом случае минимум квадратичной формы $\mathbf{b}^+\mathbf{C}(\phi)\,\mathbf{b}$ реализуется при условии совпадения $\mathbf{b}$ с собственным вектором, отвечающим наименьшему собственному значению $\lambda_{\min}\{\mathbf{C}(\phi)\}$ матрицы $\mathbf{C}(\phi)$. В результате угловые положения источников могут быть найдены из следующего критерия:

$$\hat{\phi} = \arg\max_{\phi} \mathrm{P}_{\mathrm{NM\text{-}RARE}}(\phi),$$
$$\mathrm{P}_{\mathrm{NM\text{-}RARE}}(\phi) = 1/\lambda_{\min}\{\mathbf{C}(\phi)\}. \tag{7}$$

Метод оценивания (7) аналогичен алгоритму пониженного ранга RARE [14, 15], используемому в технике частично калиброванных АР, в котором роль числа подрешеток играет число мод M, а вектор амплитудно-фазовой калибровки соответствующих подрешеток заменяется вектором $\mathbf{b}$. Важно подчеркнуть, что матрица $\mathbf{C}$ не содержит информации о глубине источников и их удалении от АР; следовательно, критерий (7) позволяет определить направления на источники путем одномерного поиска J максимумов выходной мощности процессора NM-RARE.

2. ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНОЙ ПРОЦЕДУРЫ NM–RARE

Приведенный алгоритм (7) предполагает априорное знание матрицы направлений $\mathbf{U}(\phi)$. Однако на практике в качестве этой матрицы (вследствие неполной информации о канале распространения) используется некоторая оценочная матрица $\mathbf{U}_0(\phi)$, рассчитываемая для номинальных акустических характеристик волновода. При наличии рассогласования между $\mathbf{U}(\phi)$ и $\mathbf{U}_0(\phi)$ предложенный способ оценивания нуждается в уточнении.

При построении адаптивной процедуры NM-RARE, основанной на наихудшем сценарии приема, будем предполагать возможность контролируемого отклонения ожидаемой матрицы $\mathbf{U}_0(\phi)$ от истинной $\mathbf{U}(\phi)$: норма Фробениуса матрицы рассогласования не должна превышать заданную величину: $\|\mathbf{U}(\phi)-\mathbf{U_0}(\phi)\|_F^2 \le \varepsilon$, где ε — положительный параметр регуляризации. Адаптация к неизвестным условиям приема состоит в нахождении робастной матрицы $\mathbf{U}(\phi,\varepsilon)$, удовлетворяющей указанному ограничению, условию нормировки и обеспечивающей минимум целевой функции $\mathbf{b}^+\mathbf{U}^+(\phi)\hat{\mathbf{\Pi}}_n\mathbf{U}(\phi)\mathbf{b}$ для всех возможных значений нормированных векторов $\mathbf{b}$:

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{U}}\{\mathbf{b}^+\mathbf{U}(\phi)^+\hat{\mathbf{\Pi}}_\mathbf{n}\mathbf{U}(\phi)\mathbf{b}\}\\ \text{при}\,\|\mathbf{U}(\phi)-\mathbf{U}_0(\phi)\|_F^2 \le \varepsilon,\;\; \|\mathbf{U}(\phi)\|_F^2 = M.\end{gathered} \tag{8}$$

Решение оптимизационной задачи (8) может быть найдено с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа аналогично тому, как это сделано в [16, 17]. В итоге искомые положения источников находятся из условия максимума выходной мощности адаптивного процессора NM–RARE:

$$\begin{gathered}\hat{\phi} = \arg\max_{\phi} \mathrm{P}_{\text{NM-RARE}}(\phi,\varepsilon),\\ \mathrm{P}_{\text{NM-RARE}}(\phi,\varepsilon) = 1/f(\phi,\varepsilon)\lambda_{\min}\{\mathbf{C}_0(\phi)\},\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{C_0}(\phi) = \mathbf{U_0^+}(\phi)\hat{\mathbf{\Pi}}_\mathbf{n}\mathbf{U}_0(\phi),\quad f(\phi,\varepsilon) = 1-\varepsilon/(2M) + \\ + \sqrt{(\varepsilon/M)(1-\varepsilon/4M)[1-\mathrm{V}_0(\phi)]/\mathrm{V}_0(\phi)},\\ \mathrm{V}_0(\phi) = M^{-1}\,\mathrm{Tr}[\mathbf{U}_0^+(\phi)\hat{\mathbf{\Pi}}_\mathbf{n}\mathbf{U}_0(\phi)],\end{gathered}$$

а $\mathrm{Tr}(\cdot)$ означает след матрицы. При $\varepsilon = 0$ функция $f(\phi,\varepsilon) = 1$ и, следовательно, неадаптивный метод NM-RARE является частным случаем предложенного способа оценивания.

Отметим также, что в процессе поиска азимутальных углов параметр регуляризации ε должен удовлетворять неравенству $\varepsilon < 2M[1-\sqrt{1-\mathrm{V}_0(\phi)}]$, поскольку в противном случае целевая функция всюду обращается в нуль.

3. ГРАНИЦА КРАМЕРА–РАО И ПРЕДЕЛ УГЛОВОГО РАЗРЕШЕНИЯ

Обозначим через $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\hat{\phi}_1,\cdots\hat{\phi}_J)^T$ оценку вектора угловых координат источников (полученную без использования информации о глубинах их погружения и расстояний до приемной АР). Ковариационная матрица ошибки этого вектора удовлетворяет неравенству

$$\left\langle(\boldsymbol{\varphi}-\hat{\boldsymbol{\varphi}})(\boldsymbol{\varphi}-\hat{\boldsymbol{\varphi}})^T\right\rangle \ge \mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi}),$$

где $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi})$ — нижняя граница Крамера–Рао, определяющая предел точности измерения соответствующих координат. Для рассматриваемого сценария (когда форма огибающих излученных сигналов и векторы модовых амплитуд являются неинформативными параметрами) матрица $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi})$ размерности $J\times J$ дается выражением

$$\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{\sigma_n^2}{2L}\mathrm{Re}\big(\mathbf{F}-\mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{K}^+\big)^{-1}, \tag{10}$$

в котором блоки $\mathbf{F}\in C^{J\times J}$, $\mathbf{K}\in C^{J\times MJ}$ и $\boldsymbol{\Sigma}\in C^{MJ\times MJ}$ равны

$$\begin{gathered}\mathbf{F} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^+\mathbf{\Pi}_\mathbf{G}^\perp\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\circ\mathbf{R}_\mathrm{s}^T,\quad \mathbf{K} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^+\mathbf{\Pi}_\mathbf{G}^\perp\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}\circ(\mathbf{1}_\mathrm{M}^T\otimes\mathbf{R}_\mathrm{s}^T),\\ \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}^+\mathbf{\Pi}_\mathbf{G}^\perp\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}\circ(\mathbf{1}_\mathrm{M}\mathbf{1}_\mathrm{M}^T\otimes\mathbf{R}_\mathrm{s}^T).\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{\Pi}_\mathbf{G}^\perp = \mathbf{I}_\mathrm{N}-\mathbf{G}(\mathbf{G}^+\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^+\in C^{N\times N}$, $\hat{\mathbf{R}}_\mathrm{s} = (1/L)\times$ $\times\sum_{l=1}^{L}\mathbf{s}_l\mathbf{s}_l^+\in C^{J\times J}$ — выборочная сигнальная матрица, $\mathbf{1}_\mathrm{M} = (1,\cdots,1)^T$ — вектор размерности $M\times 1$ с единичными компонентами, а символы $\circ$ и $\otimes$ означают произведение Адамара и Кронекера, соответственно. Матрицы $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\in C^{N\times J}$ и $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}\in C^{N\times MJ}$, входящие в (10), определены соотношениями

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}} = \left[\frac{d\mathbf{U}(\phi_1)}{d\phi_1}\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_1),\ldots,\frac{d\mathbf{U}(\phi_J)}{d\phi_J}\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_J)\right], \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} = [\mathbf{D}_1\ldots\mathbf{D}_\mathrm{M}],\quad \mathbf{D}_m = [\mathbf{U}(\phi_1)\mathbf{e}_m,\ldots,\mathbf{U}(\phi_J)\mathbf{e}_m],\\ m = 1,\ldots,M,\end{gathered} \tag{13}$$

где $\mathbf{e}_m = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{m},0,\ldots 0)^T$ представляет собой m-ый столбец единичной матрицы размерности $M\times M$. Вывод формулы (10) приведен в Приложении.

В случае, когда глубины погружения источников и их расстояния до приемной АР известны априори (следовательно, известны векторы соответствующих модовых амплитуд), формула (10) упрощается и переходит в классическое выражение, полученное в работе [18] применительно к детерминированной модели излучаемых сигналов:

$$\mathbf{CRB}_{\det}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{\sigma_n^2}{2L}\operatorname{Re}(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}} \circ \hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}^{T})^{-1}. \tag{14}$$

Заметим, что в отличие от (14) соотношение (10) содержит слагаемое $-\mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{K}^{T}$. Поскольку согласно (11) $\boldsymbol{\Sigma}$ является неотрицательно определенной эрмитовой матрицей, то $\mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{K}^{T} \geq 0$ и, следовательно, справедливо неравенство $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi}) \geq \mathbf{CRB}_{\det}(\boldsymbol{\varphi})$. Последнее отражает очевидный факт, в соответствии с которым введение в модель дополнительного неизвестного параметра приводит к потере точности искомой оценки (т.е. увеличению ее дисперсии).

Ниже основное внимание будет уделено решению задачи локализации двух акустических источников с близкими угловыми положениями. В рассматриваемой ситуации матрица Крамера–Рао размерности 2×2 может быть представлена в виде

$$\mathrm{CRB}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}), \quad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi}) = (2L/\sigma_n^2)\operatorname{Re}\left(\mathbf{F} - \mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{K}^{+}\right)$ имеет смысл информационной матрицы Фишера. Отметим, что для обращения $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi})$можно воспользоваться формулой

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-\mu}\begin{pmatrix} 1/f_{11} & -\mu/f_{12} \\ -\mu/f_{21} & 1/f_{22} \end{pmatrix},$$

в которой $\mu = f_{12}f_{21}/f_{11}f_{22}$. В свою очередь, выборочная сигнальная матрица $\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}$, входящая в $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi})$, в данном случае записывается следующим образом

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}\rho \\ \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}\rho^{*} & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\rho = \frac{(1/L)\sum_{l=1}^{L} s_1(l)s_2^{*}(l)}{\sigma_1\sigma_2},$$

где $\sigma_{1,2}^2 = (1/L)\sum_{l=1}^{L}|s_{1,2}(l)|^2$ – уровни излучения, а параметр ρ описывает степень корреляции между излученными сигналами.

Нас будет интересовать минимальное угловое расстояние между источниками $\delta = |\phi_1 - \phi_2|$, при котором они могут быть одновременно корректно локализованы. Согласно критерию Смита [10], два источника разрешимы, если δ превосходит среднеквадратичную дисперсию оценки соответствующего углового расстояния:

$$\delta \geq \sqrt{\operatorname{var}(\delta)}. \tag{15}$$

В свою очередь, дисперсия $\operatorname{var}(\delta)$, фигурирующая в (15), удовлетворяет неравенству $\operatorname{var}(\delta) \geq \mathrm{CRB}(\delta)$, где $\mathrm{CRB}(\delta)$ – соответствующая граница Крамера–Рао, равная [19]

$$\mathrm{CRB}(\delta) = \mathrm{CRB}(\phi_1) - 2\,\mathrm{CRB}(\phi_1,\phi_2) + \mathrm{CRB}(\phi_2),$$

а $\mathrm{CRB}(\phi_1) = [\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi})]_{1,1}, \mathrm{CRB}(\phi_1,\phi_2) = [\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi})]_{1,2}$, $\mathrm{CRB}(\phi_2) = [\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi})]_{2,2}$.

Предел углового разрешения находится из условия равенства обеих частей критерия (15) и замены $\operatorname{var}(\delta)$ на $\mathrm{CRB}(\delta)$. В результате искомая величина δ является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\delta^2 = \mathrm{CRB}(\delta). \tag{16}$$

Отметим, что для заданной геометрии АР найденное таким образом δ зависит от угла прихода, отношения сигнал/шум, объема входной выборки и степени коррелированности излучаемых сигналов.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведем результаты статистического моделирования, иллюстрирующие работоспособность предложенного алгоритма (9) и сравним его эффективность с традиционным методом сканирования и методом SI, согласно которому векторы сигнального подпространства $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathbf{s}}$ и векторы модового подпространства $\mathbf{U}(\phi)$ при $\phi \in (\phi_1,\ldots,\phi_J)$ становятся линейно зависимыми. В результате искомые положения источников могут быть найдены из условия пересечения соответствующих подпространств [5]:

$$\begin{gathered} \hat{\phi} = \arg\max_{\phi} P_{\mathrm{SI}}(\phi), \\ P_{\mathrm{SI}}(\phi) = 1/\lambda_{\min}\left\{\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathbf{s}}^{+}\mathbf{P}_{\mathbf{U}}^{\perp}(\phi)\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathbf{s}}\right\}, \end{gathered} \tag{17}$$

где $\lambda_{\min}\{\cdot\}$ означает минимальное собственное значение матрицы, стоящей в скобках, а $\mathbf{P}_{\mathbf{U}}^{\perp}(\phi) = \mathbf{I}_{\mathrm{N}} - \mathbf{U}(\phi)[\mathbf{U}^{+}(\phi)\mathbf{U}(\phi)]^{-1}\mathbf{U}^{+}(\phi)$ – проекционная матрица размерности $N \times N$.

Подчеркнем, что метод сканирования не учитывает волноводный характер распространения звука, а процедура (17) опирается на априорное знание среды распространения.

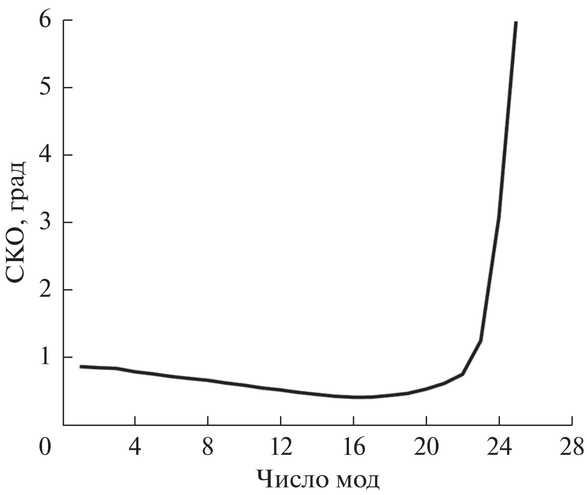

Рис. 2. Среднеквадратическая ошибка оценивания угловых положений источников в зависимости от числа используемых мод.

В качестве примера рассмотрим мелководный канал глубины $H = 160$ м с характерной летней гидрологией, изображенной на рис. 1б, в котором звуковое поле создается двумя детерминированными источниками одинаковой мощности, излучающими узкополосные сигналы с несущей частотой 250 Гц. В рамках численного эксперимента дно моделировалось жидким поглощающим полупространством с плотностью $\rho_b = 1.8$ г/см^3, скоростью звука $c_b = 1750$ м/с и коэффициентом поглощения $\beta = 0.13$ дБ/λ, а при расчете ожидаемой матрицы $\mathbf{U}_0(\phi)$ в качестве номинальных геоакустических параметров дна использовались значения $H = 162.5$ м, $\rho_b = 1.75$ г/см^3, $c_b = 1725$ м/с и $\beta = 0.1$ дБ/λ. Для рассматриваемой несущей частоты и указанных акустических характеристик канала полное число мод M составляло 28.

Предполагалось, что источники находятся на горизонтах 40 и 70 м и удалены соответственно на расстояния 15 и 10 км от горизонтальной приемной антенны, состоящей из $N = 20$ элементов, расположенных через 3 м на глубине 155 м. Направление на первый источник $\phi_1 = 30°$, а угловое положение второго задавалось в виде $\phi_2 = \phi_1 + \delta$, где $\delta \in (0.2°...6°)$. При вычислениях коэффициент корреляции ρ брался равным 0.4, а входные отношения сигнал/шум, определяемые соотношениями

$$\mathrm{SNR}_j = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_n^2}\left\|\mathbf{g}(\phi_j, \boldsymbol{\theta}_j)\right\|^2 \Big/ N, \quad j = 1, 2,$$

считались одинаковыми, т. е. $\mathrm{SNR}_1 = \mathrm{SNR}_2 = \mathrm{SNR}$.

Обратим внимание, что для данных N, J и M условие (6) не выполняется, и для реализации предложенного метода необходимо ограничить число мод, участвующих в процессе локализации (причем максимально допустимое значение используемых мод не должно превышать $N - J = 18$). Ниже при построении матрицы $\mathbf{U}_0(\varphi)$ учитывались первые 16 нормальных волн волновода. В частности, при таком выборе M применение алгоритма (9) для $\varepsilon = 0.25$ обеспечивает минимум среднеквадратических ошибок (СКО) оценивания угловых положений источников, отстоящих друг от друга на расстояние $\delta = 6°$, как показано на рис. 2. Соответствующие ошибки рассчитывались по формуле

$$\mathrm{СКО}(\hat{\phi}) = \sqrt{(QJ)^{-1}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{j=1}^{J}(\hat{\phi}_j^{(q)} - \phi_j)^2},$$

в которой $\hat{\phi}_j^{(q)}$ – оценка угловой координаты j-го источника для q-ой реализации вектора наблюдения, $J = 2$, а общее число независимых реализаций Q бралось равным 1000. Выборочная ковариационная матрица формировалась по $L = 100$ временным отсчетам, а входное SNR составляло 0 дБ.

Для используемых методов оценивания на рис. 3а и 3б изображены угловые зависимости нормированной (на максимальное значение) мощности на выходе АР, принимающей сигналы от двух источников, разнесенных друг относительно друга на расстояние 6° и 2°, соответственно. Кривая *1* на рис. 3 отвечает традиционному способу сканирования, кривая *2* – методу SI, а кривая *3* соответствует алгоритму NM-RARE (9). Из рис. 3б видно, что в данном примере лишь адаптивный метод в состоянии различить два источника и одновременно оценить искомые направления.

Одной из важных характеристик алгоритма является достигаемая с его помощью вероятность разрешения источников с близкими углами прихода. В качестве оценки соответствующей вероятности используется величина

$$\hat{P}_{\mathrm{RES}} = \frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q} p_q,$$

$$p_q = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^{2}\left|\hat{\phi}_j^{(q)} - \phi_j\right| < \left|\phi_1 - \phi_2\right|; \\ 0, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

На рис. 4а для рассматриваемых способов обработки представлены результаты расчета P_{RES} в зависимости от величины углового расстояния между источниками. Очевидно, что наилучшие потенциальные возможности демонстрирует предложенный метод локализации (9), позволяющий с вероятностью 0.9 разрешить источники,

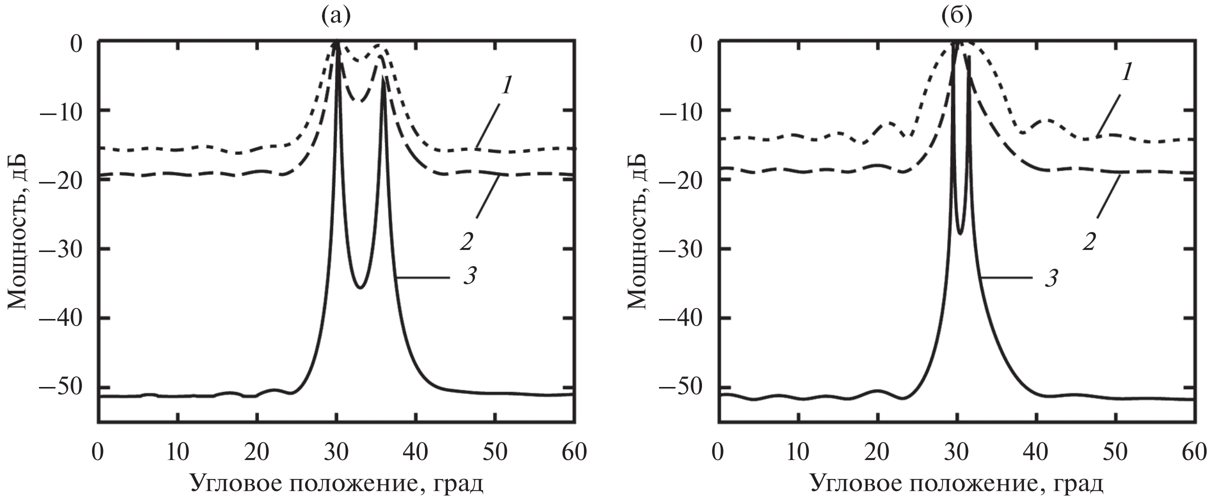

Рис. 3. Угловая зависимость выходной мощности АР, принимающей сигналы от двух источников, разнесенных друг относительно друга на расстояние (а) – 6° и (б) – 2°.

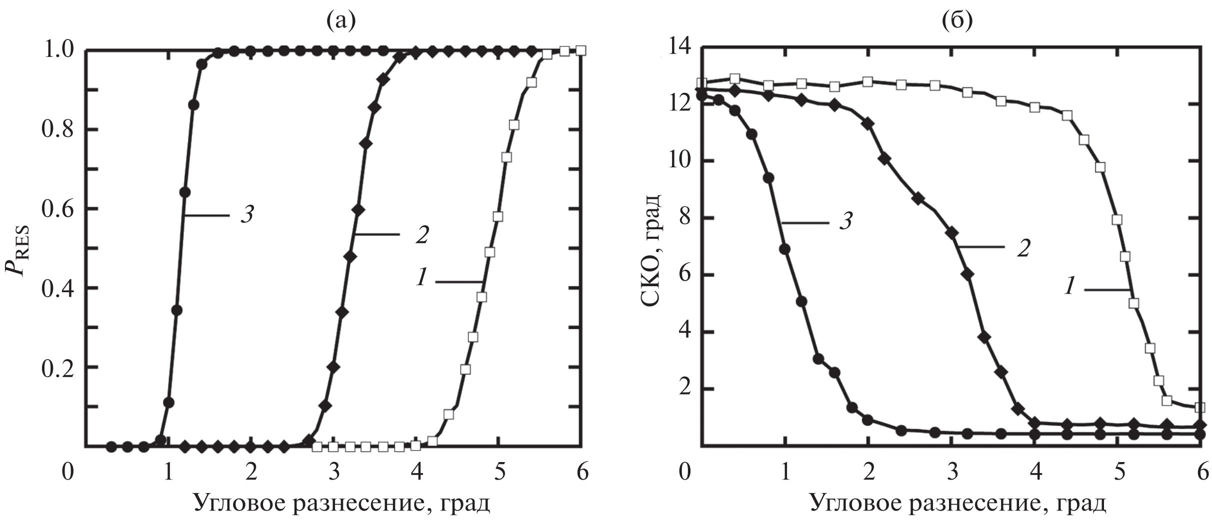

Рис. 4. (а) – Вероятность разрешения и (б) – среднеквадратическая ошибка оценивания в зависимости от углового расстояния между источниками.

отстоящие друг относительно друга на величину порядка 1.5°.

На рис. 4б показано поведение среднеквадратической ошибки измерения угловых координат в зависимости от расстояния между источниками. Из приведенных кривых следует, что применение алгоритма NM-RARE позволяет значительно повысить точность оценивания по сравнению с неадаптивными методами.

В заключение этого раздела приведем результаты расчета предела углового разрешения, являющегося наименьшим положительным корнем уравнения (16). Для рассматриваемой постановки задачи на рис. 5а изображена зависимость величины δ от входного SNR (при этом выборочная ковариационная матрица формировалась по $L = 100$ временным отсчетам), а на рис. 5б – зависимость δ от числа выборок L при SNR = 0 дБ. Параметром кривых является угловое положение ϕ_1 фиксированного источника. Из этого рисунка видно, что минимально возможное расстояние между источниками является монотонно убывающей функцией SNR и L, при этом разрешающая способность антенны снижается с ростом угла прихода. Важно подчеркнуть, что полученный предел разрешения является фундаментальной величиной, независящей от вида используемого алгоритма.

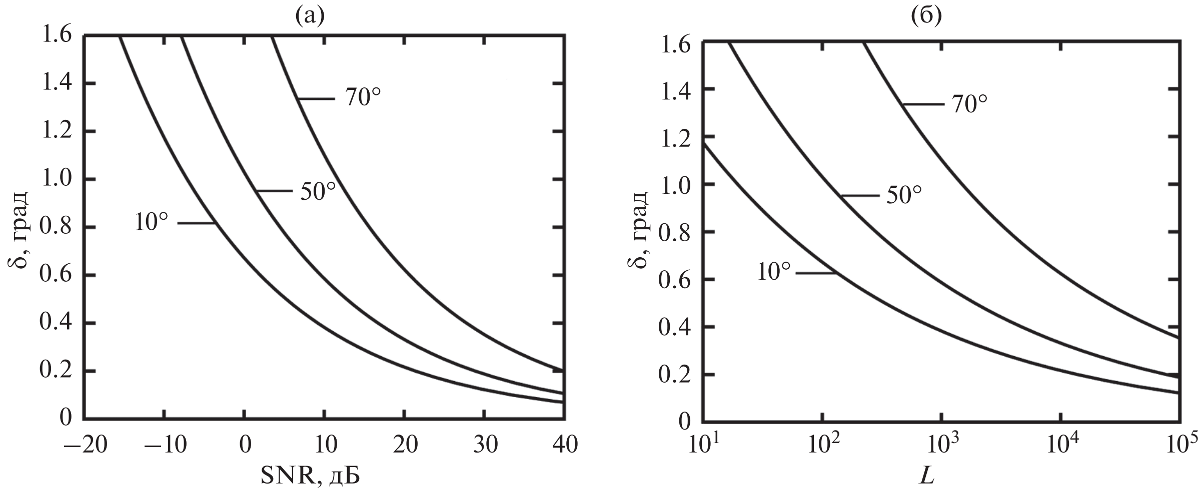

Рис. 5. Зависимость δ от входного (а) – SNR и (б) – объема выборки L для различных угловых положений φ_1 фиксированного источника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построен робастный алгоритм NM-RARE, позволяющий определить угловые положения источников без знания их пространственных координат в канале с неточно известными параметрами. Приведены результаты математического моделирования предложенного метода, иллюстрирующие приемлемую точность оценивания направлений на источники и высокую вероятность углового разрешения в сравнении с известными неадаптивными способами, предполагающими априорное знание акустических характеристик волновода.

На основе критерия Смита определено наименьшее угловое расстояние между источниками, при котором возможна их корректная локализация, в зависимости от входного отношения сигнал/шум и объема входной выборки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 20-19-00383).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВЫВОД ФОРМУЛЫ (10)

Для рассматриваемой постановки задачи выборочный вектор наблюдения $\mathbf{x}_l$ является комплексным гауссовым вектором со средним значением $\mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l$ и ковариационной матрицей $\sigma_n^2\mathbf{I}_{\mathrm{N}}$.

Обозначим через $\boldsymbol{\alpha}$ вектор, содержащий $(1+2M+2L)J$ неизвестных параметров сигнальной компоненты вектора наблюдения

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\varphi}^T, \boldsymbol{\eta}^T, \mathrm{Re}\{\mathbf{s}_1\}^T, \ldots, \mathrm{Re}\{\mathbf{s}_L\}^T, \\ \mathrm{Im}\{\mathbf{s}_1\}^T, \ldots, \mathrm{Im}\{\mathbf{s}_L\}^T]^T,$$

где $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\xi}^T, \boldsymbol{\zeta}^T)^T$, а $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1^T \cdots, \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{M}}^T)^T$ и $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}_1^T, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{M}}^T)^T$ – векторы размерности $MJ \times 1$, составленные из реальных и мнимых коэффициентов комплексных амплитуд мод:

$$\boldsymbol{\xi}_m = [\mathrm{Re}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_1)\}, \ldots, \mathrm{Re}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_J)\}]^T, \\ \boldsymbol{\zeta}_m = [\mathrm{Im}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_1)\}, \ldots, \mathrm{Im}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_J)\}]^T, \\ m = 1, \ldots, M.$$

Как известно (см., например, [20]), при приеме детерминированного сигнала, регистрируемого на фоне белого шума, нижняя граница Крамера–Рао, определяющая потенциально достижимую точность оценки вектора $\boldsymbol{\alpha}$, не зависит от уровня шума и дается выражением

$$\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\sigma_n^2}{2}\left\{\sum_{l=1}^{L}\mathrm{Re}(\mathbf{W}_l^+\mathbf{W}_l)\right\}^{-1}, \qquad (\text{П}1)$$

в котором

$$\mathbf{W}_l = \left[\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\varphi}^T}, \frac{\mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}^T}, \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\zeta}^T}, \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial\, \mathrm{Re}\{\mathbf{s}_l\}^T}, \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial\, \mathrm{Im}\{\mathbf{s}_l\}^T}\right], \qquad (\text{П}2)$$

а $\mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{U}(\phi_1)\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_1), \cdots, \mathbf{U}(\phi_J)\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_J)]$.

Рассчитаем производные, входящие в (П2). Для первого блока, фигурирующего в правой части (П2), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\varphi}^T} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \phi_1},\cdots,\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \phi_J}\right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \phi_j} = \mathbf{d}_j s_j(l),\quad \mathbf{d}_j = \frac{d\mathbf{U}(\phi_j)}{d\phi_j}\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_j)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\varphi}^T} = [\mathbf{d}_1 s_1(l),\ldots,\mathbf{d}_J s_J(l)] \equiv \mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\mathbf{S}_l,$$

где $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}$ определяется формулой (12), а $\mathbf{S}_l = \mathrm{diag}(\mathbf{s}_l)$.

Далее,

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}^T} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}_1^T},\ldots,\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}_M^T}\right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}_m^T} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \mathrm{Re}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_1)\}},\ldots,\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \mathrm{Re}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_J)\}}\right].$$

Учитывая, что $\partial \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_j)/\partial \mathrm{Re}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_j)\} = \mathbf{e}_m$, где $\mathbf{e}_m$ представляет собой m-ый столбец единичной матрицы размерности $M \times M$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}_m^T} = \left[\mathbf{U}(\phi_1)\mathbf{e}_m s_1(l),\cdots,\mathbf{U}(\phi_J)\mathbf{e}_m s_J(l)\right] \equiv \mathbf{D}_m\mathbf{S}_l,$$

где $\mathbf{D}_m$ дается соотношением (13). Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}^T} = \left[\mathbf{D}_1\mathbf{S}_l,\cdots,\mathbf{D}_M\mathbf{S}_l\right] \equiv \mathbf{H}_l.$$

Аналогичные вычисления для третьего блока в (П2) приводят к результату

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\zeta}^T} = i\mathbf{H}_l.$$

Наконец, для последних двух слагаемых в (П2) следует

$$\frac{\partial \mathbf{G}\mathbf{s}_l}{\partial \mathrm{Re}\{\mathbf{s}_l\}^T} = \mathbf{G},\quad \frac{\partial \mathbf{G}\mathbf{s}_l}{\partial \mathrm{Im}\{\mathbf{s}_l\}^T} = i\mathbf{G}.$$

Таким образом, матрица $\mathbf{W}_l$ представима в виде

$$\mathbf{W}_l = [\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\mathbf{S}_l, \mathbf{H}_l, i\mathbf{H}_l, \mathbf{G}, i\mathbf{G}]. \qquad (\text{П3})$$

Ниже нас будет интересовать минимальная дисперсия оценки угловых координат источников, для чего удобно преобразовать матрицу (П1) к блочно–диагональному виду. Для этого заметим, что при фиксированном номере выборочного отсчета l матрица $\mathbf{W}_l$ зависит от неизвестного вектора $\boldsymbol{\alpha}_l = [\boldsymbol{\varphi}^T, \boldsymbol{\eta}^T, \mathrm{Re}\{\mathbf{s}_l\}^T, \mathrm{Im}\{\mathbf{s}_l\}^T]^T$. Следуя идее работ [14, 21], удобно ввести в рассмотрение вектор $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_l$ вида

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_l = \left[\boldsymbol{\varphi}^T, \boldsymbol{\eta}^T, \mathrm{Re}\{\mathbf{V}_l\}\boldsymbol{\varphi} + \mathrm{Re}\{\mathbf{T}_l\}\boldsymbol{\eta} + \mathrm{Re}\{\mathbf{s}_l\},\right.$$
$$\left.\mathrm{Im}\{\mathbf{V}_l\}\boldsymbol{\varphi} + \mathrm{Im}\{\mathbf{T}_l\}\boldsymbol{\eta} + \mathrm{Im}\{\mathbf{s}_l\}\right]^T,$$

где $\mathbf{V}_l = (\mathbf{G}^+\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^+\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\mathbf{S}_l$, $\mathbf{T}_l = (\mathbf{G}^+\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^+\boldsymbol{\Delta}_l$, а $\boldsymbol{\Delta}_l = [\mathbf{H}_l, i\mathbf{H}_l]$.

Соответствующий вектор связан с $\boldsymbol{\alpha}_l$ соотношением

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_l = \mathbf{C}_l\boldsymbol{\alpha}_l,\quad \text{где}\quad \mathbf{C}_l = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathrm{Re}\{\mathbf{V}_l\} & \mathrm{Re}\{\mathbf{T}_l\} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathrm{Im}\{\mathbf{V}_l\} & \mathrm{Im}\{\mathbf{T}_l\} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Для нового вектора

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = [\boldsymbol{\varphi}^T, \boldsymbol{\eta}^T, \mathrm{Re}\{\tilde{\mathbf{s}}_1\}^T,\ldots,\mathrm{Re}\{\tilde{\mathbf{s}}_L\}^T,$$
$$\mathrm{Im}\{\tilde{\mathbf{s}}_1\}^T,\ldots,\mathrm{Im}\{\tilde{\mathbf{s}}_L\}^T]^T,$$

где $\tilde{\mathbf{s}}_l = \mathbf{s}_l + \mathbf{V}_l\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{T}_l\boldsymbol{\eta}$, граница Крамера–Рао может быть рассчитана по формуле

$$\mathbf{CRB}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{\sigma_n^2}{2}\left\{\sum_{l=1}^{L}(\mathbf{C}_l^{-1})^T\,\mathrm{Re}\{\mathbf{W}_l^+\mathbf{W}_l\}\mathbf{C}_l^{-1}\right\}^{-1}. \qquad (\text{П4})$$

Для невырожденной матрицы $\mathbf{C}_l$ существует обратная, равная

$$\mathbf{C}_l^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathrm{Re}\{\mathbf{V}_l\} & -\mathrm{Re}\{\mathbf{T}_l\} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathrm{Im}\{\mathbf{V}_l\} & -\mathrm{Im}\{\mathbf{T}_l\} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Тогда, привлекая (П3), нетрудно найти, что

$$\mathbf{W}_l\mathbf{C}_l^{-1} = [\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\mathbf{S}_l - \mathbf{G}\mathbf{V}_l, \boldsymbol{\Delta}_l - \mathbf{G}\mathbf{T}_l, \mathbf{G}, i\mathbf{G}] \equiv$$
$$\equiv [\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\mathbf{S}_l, \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{H}_l, i\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{H}_l, \mathbf{G}, i\mathbf{G}], \qquad (\text{П5})$$

где $\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp} = \mathbf{I}_{\mathrm{N}} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^+\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^+$. Подставляя (П5) в (П4) и принимая во внимание, что $\mathbf{G}^+\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp} = 0$, для $\mathbf{CRB}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$ получим

$$\mathbf{CRB}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{\sigma_n^2}{2L}\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi\varphi}} & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi\eta}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi\eta}}^T & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\eta\eta}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\mathbf{ss}} \end{pmatrix}^{-1}. \qquad (\text{П6})$$

Здесь $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi\varphi}} = \mathrm{Re}\{\mathbf{F}\}$, $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi\eta}} = [\mathrm{Re}\{\mathbf{K}\} - \mathrm{Im}\{\mathbf{K}\}]$, $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\eta\eta}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\{\boldsymbol{\Sigma}\} & -\mathrm{Im}\{\boldsymbol{\Sigma}\} \\ \mathrm{Im}\{\boldsymbol{\Sigma}\} & \mathrm{Re}\{\boldsymbol{\Sigma}\} \end{pmatrix}$, где

$$\mathbf{F} = L^{-1}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{S}_l^{+}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\mathbf{S}_l \in C^{J\times J},$$

$$\mathbf{K} = L^{-1}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{S}_l^{+}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{H}_l \in C^{J\times MJ},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = L^{-1}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{H}_l^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{H}_l \in C^{MJ\times MJ},$$

а $\mathbf{J}_{\mathbf{ss}} = \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\{\mathbf{G}^{+}\mathbf{G}\} & -\mathrm{Im}\{\mathbf{G}^{+}\mathbf{G}\}\\ \mathrm{Im}\{\mathbf{G}^{+}\mathbf{G}\} & \mathrm{Re}\{\mathbf{G}^{+}\mathbf{G}\}\end{pmatrix}$.

Учитывая известное матричное соотношение $\mathrm{diag}\{\mathbf{a}\}\mathbf{P}\,\mathrm{diag}\{\mathbf{b}\} = \mathbf{P}\circ(\mathbf{ab}^{T})$, в котором символ $\circ$ означает произведение Адамара (или поэлементное умножение матриц: $[\mathbf{A}\circ\mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij}[\mathbf{B}]_{ij}$), выражение для $\mathbf{F}$ можно представить в эквивалентном виде

$$\begin{gathered}\mathbf{F} = (1/L)\sum_{l=1}^{L}\mathbf{S}_l^{+}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\mathbf{S}_l = \\ = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\circ\sum_{l=1}^{L}\mathbf{s}_l^{*}\mathbf{s}_l^{T}\Big/L \equiv \mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}\circ\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}^{T},\end{gathered}\tag{П7}$$

где $\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}} = (1/L)\sum_{l=1}^{L}\mathbf{s}_l\mathbf{s}_l^{+}$ — выборочная сигнальная матрица. При написании (П7) учтено, что для диагональной матрицы $\mathbf{S}_l$ справедливо равенство $\mathbf{S}_l = \mathbf{S}_l^{T}$ и, следовательно, $\mathbf{S}_l^{+} = \mathbf{S}_l^{*}$, где $(\cdot)^{*}$ означает операцию комплексного сопряжения.

Аналогично, для матриц $\mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{K} = \left[\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_1\circ\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}^{T}\cdots\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\mathrm{M}}\circ\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}^{T}\right] \equiv \\ \equiv \mathbf{D}_{\boldsymbol{\varphi}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}\circ(\mathbf{1}_{\mathrm{M}}^{T}\otimes\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}^{T}),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\mathbf{D}_1^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_1\circ\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}^{T} & \cdots & \mathbf{D}_1^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\mathrm{M}}\circ\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}^{T}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{D}_{\mathrm{M}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_1\circ\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}^{T} & \cdots & \mathbf{D}_{\mathrm{M}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\mathrm{M}}\circ\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}^{T}\end{pmatrix} \equiv \\ \equiv \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}^{+}\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{G}}^{\perp}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}\circ(\mathbf{1}_{\mathrm{M}}\mathbf{1}_{\mathrm{M}}^{T}\otimes\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{s}}^{T}),\end{gathered}$$

где $\mathbf{1}_{\mathrm{M}}$ — вектор размерности $M\times 1$ с единичными компонентами, $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} = [\mathbf{D}_1\cdots\mathbf{D}_{\mathrm{M}}]$, а символ $\otimes$ означает произведение Кронекера.

Интересующая нас ковариационная матрица дисперсий оценок угловых положений источников находится путем обращения левого верхнего блока в (П6) размерности $J\times J$:

$$\begin{gathered}\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{\sigma_n^2}{2L}\left(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi\varphi}} - \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi\eta}}\mathbf{J}_{\boldsymbol{\eta\eta}}^{-1}\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi\eta}}^{T}\right)^{-1} = \\ = \frac{\sigma_n^2}{2L}\mathrm{Re}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{K}^{+})^{-1}.\end{gathered}\tag{П8}$$

При получении (П8) использован результат работы [18], в соответствии с которым

$$\begin{gathered}\left[\mathrm{Re}\{\mathbf{K}\} - \mathrm{Im}\{\mathbf{K}\}\right]\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{\Sigma}\} & -\mathrm{Im}\{\boldsymbol{\Sigma}\}\\ \mathrm{Im}\{\boldsymbol{\Sigma}\} & \mathrm{Re}\{\boldsymbol{\Sigma}\}\end{pmatrix}^{-1}\times \\ \times\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\{\mathbf{K}\}^{T}\\ \mathrm{Im}\{\mathbf{K}\}^{T}\end{bmatrix} = \mathrm{Re}(\mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{K}^{+}).\end{gathered}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елисеевнин В.Л.* О работе горизонтальной линейной антенны в мелком море // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 1. С. 44–49.
2. *Buckingham M.J.* On the response of a towed array to the acoustic field in shallow water // IEEE Proc. 1984. V. 131. Part F. № 3. P. 298–307.
3. *Елисеевнин В.Л.* Определение направления на источник в волноводе с помощью горизонтальной линейной антенны // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 2. С. 208–211.
4. *Lakshmipath S., Anand G.V.* Subspace intersection method of high-resolution bearing estimation in shallow ocean // Signal Processing. 2004. V. 84. P. 1367–1384.
5. *Pang J., Lin J., Zhang A., Huang X.* Subspace intersection method of bearing estimation based on least square approach in shallow ocean // In Proc. ICASSP, Las Vegas, NV, USA, 31 March–4 April, 2008. P. 2433–2436.
6. *Cox H.* Resolving power and sensitivity to mismatch of optimum array processors // J. Acoust. Soc. Am. 1973. V. 54. № 3. P. 771–785.
7. *Liu Z., Nehorai A.* Statistical angular resolution limit for point sources // IEEE Trans. Signal Processing. 2007. V. 55. № 11. P. 5521–5527.
8. *Amar A. and Weiss A.J.* Fundamental limitations on the resolution of deterministic signals // IEEE Trans. Signal Processing. 2008. V. 56. №. P. 5309 –5318.
9. *El Korso M.N., Boyer R., Renaux A., Marcos S.* On the asymptotic resolvability of two point sources in known subspace interference using a GLRT-based framework // Signal Processing. 2012. V. 92. P. 2471–2483.
10. *Smith S.T.* Statistical resolution limits and the complexified Cramer–Rao bound // IEEE Trans. Signal Processing. 2005. V. 53. № 5. P. 1597–1609.
11. Robust Adaptive Beamforming / Eds. by Li J. and Stoica P. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 2006. 422 p.
12. *Сазонтов А.Г., Малеханов А.И.* Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (Обзор) // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 233–253.
13. *Schmidt R.O.* Multiple emitter location and signal parameter estimation // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1986. V. 34. № 3. P. 276–280.
14. *Pesavento M., Gershman A.B., Wong K.M.* Direction finding in partly calibrated sensor arrays composed of multiple subarrays // IEEE Trans. Signal Processing. 2002. V. 50. № 9. P. 2103–2115.
15. *See C.M.S., Gershman A.B.* Direction-of-arrival estimation in partly calibrated subarray-based sensor arrays // IEEE Trans. on Signal Processing. 2004. V. 52. № 2. P. 329–338.

16. *Сазонтов А.Г., Смирнов И.П., Чащин А.С.* Локализация когерентного источника излучения в мелководном канале с использованием частично калиброванной адаптивной антенной решетки // Известия Вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. № 2. С. 99–107.

17. *Сазонтов А.Г., Смирнов И.П.* Локализация источника в акустическом волноводе с неточно известными параметрами с использованием согласованной обработки в модовом пространстве // Акуст. журн. 2019. Т. 65. Вып. 4. С. 540-550.

18. *Stoica P. and Nehorai A.* MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound // IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing. 1989. V. 37. № 5. P. 720–741.

19. *El Korso M.N., Boyer R., Renaux A., Marcos S.* Statistical resolution limit for multiple parameters of interest and for multiple signals // Proc. ICASSP, Dallas, TX, 2010. P. 3602–3605.

20. *Kay S.M.* Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993. 596 p.

21. *Stoica P., Larsson E.G.* Comments on “Linearization method for finding Cramér–Rao bounds in signal processing” // IEEE Trans. Signal Processing. 2001. V. 49. № 12. P. 3168–3169.