

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГИХ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

© 2021 г. А. О. Ватульян<sup>а, б, \*</sup>, Л. И. Парина<sup>а, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Южный федеральный университет,  
ул. Большая Садовая 105/42, Ростов-на-Дону, 344006 Россия

<sup>б</sup>Южный математический институт-филиал ВНИИ РАН,  
ул. Маркуса 22, Владикавказ, 362027 Россия

\*e-mail: vatyulyan@math.rsu.ru

\*\*e-mail: parinova@mail.ru

Поступила в редакцию 08.07.2020 г.

После доработки 06.11.2020 г.

Принята к публикации 22.12.2020 г.

Изучены особенности распространения акустических волн в ортотропных упругих топографических волноводах – протяженных цилиндрических структурах с симметричными поперечными сечениями различных форм (прямоугольным, трапециевидным). Предложен способ приближенного исследования задач в рамках моделей пластин переменной жесткости, опирающийся на вариационный принцип Гамильтона–Остроградского. В рамках гипотезы о структуре полей, аналогичной модели Тимошенко в теории пластин, построен функционал, зависящий от 3 функций одной переменной. Стационарное значение функционала находилось с помощью метода Рунге. Исследована его сходимость в зависимости от числа координатных функций. Сформирована алгебраическая система, равенство нулю определителя которой дает возможность построить дисперсионное уравнение задачи. Построены дисперсионные зависимости для сечений различной геометрии. Проведено сравнение дисперсионных кривых, построенных в рамках модели типа Тимошенко и в рамках изученной ранее модели Кирхгофа. Определены частоты запертия для упругих волноводов с треугольным, прямоугольным и трапециевидным поперечным сечением, проведен сравнительный анализ.

*Ключевые слова:* топографический волновод, упругая волна, пластина переменной жесткости, дисперсионное соотношение, модель типа Тимошенко

DOI: 10.31857/S0320791921020106

#### ВВЕДЕНИЕ

Изучение кинематики волновых процессов, возникающих в топографических волноводах, актуально для совершенствования методов неразрушающего контроля, широко применяющихся для выявления дефектов. Исследование упругих волн с различными типами локализации имеет практический интерес для разработки эффективных фильтров и линий задержки, мониторинга состояния режущего инструмента и выявления дефектов в сварочных и спаянных структурах.

К настоящему времени в научной литературе достаточно подробно описаны особенности формирования волновых процессов в изотропных и анизотропных волноводах, проанализированы дисперсионные зависимости и особенности их строения для слоистых и цилиндрических структур, в том числе и для неоднородных по поперечной координате. Гораздо меньше изучены волновые процессы в топографических волноводах, для

которых построение дисперсионных зависимостей является непростой задачей; при построении ветвей дисперсионного множества обычно используются КЭ–пакеты. Отметим, что практически отсутствуют работы, посвященные изучению волновых процессов в клиновидных структурах из ортотропных материалов.

Изучение волновых процессов, возникающих в упругих клиновидных волноводах в изотропном случае, тесно связано с исследованиями особенностей распространения акустических волн вдоль ребра пространственного клина, которые проводились еще в 70-годах прошлого века. В работах [1, 2] при помощи метода конечных элементов исследованы колебания изотропного бесконечного клиновидного волновода с произвольным углом раскрытия. Установлено, что в рассматриваемом случае отсутствует дисперсия и волновое поле локализуется вдоль ребра пространственного клина.

В [3] в рамках теории возмущений исследованы некоторые факторы, влияющие на возникно-

вление дисперсии в бесконечном клине: усечение вершины клина и замена острия другим материалом, покрытие одной или обеих поверхностей клина, модификация упругих постоянных материала в области около вершины клина.

Локализация упругих волновых полей, бегущих вдоль вершин анизотропных клиньев с различными видами симметрии, и взаимодействие локализованных волн с другими видами волн, изучены в работе [4], где проведено экспериментальное измерение фазовых скоростей и распределения волновых полей, а также выполнено теоретическое исследование клиновых мод, опирающееся на функции Лагерра.

В [5] с использованием вариационного подхода получены условия существования симметричных и антисимметричных мод для бесконечного клинообразного волновода. Существование клиновых волн в некотором диапазоне изменения угла раскрытия было строго доказано в работах [6, 7], а в [8] представлено доказательство существования волн в топографических волноводах с более сложной формой поперечного сечения. В [9] строгое доказательство существования локализованных акустических клиновых волн, предложенное Камоцким, Заворохиным и Назаровым, распространяется на случай клина с прямым углом.

Отметим также, что особое внимание при исследовании волновых процессов в топографических волноводах уделяется изучению пластинчатых и балочных моделей. Первопроходцем в изучении волн у кромки пластин считается Коненков. В работе [10], опубликованной в 1960 году, приведено пионерское исследование распространения изгибающей краевой волны вдоль свободного края полубесконечной пластины.

Исследование акустического отклика жестко защемленной по контуру пластины в рамках моделей Тимошенко и Кирхгофа–Лява представлено в работе [11], где для сравнения значений функции прогиба для различных вариантов параметров применялся метод Галеркина.

В [12] с использованием бесконтактного метода оптического зондирования изучены линейные одномерные сверхзвуковые и основные моды клиновой волны, направляемой краем кристалла кремния, определены скорость клиновых волн и глубина их проникновения, проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных.

В работе [13] показано, что, анализируя особенности колебаний неоднородных цилиндрических волноводов и зная информацию о поле смещений на поверхности, можно определить неоднородные упругие свойства этой структуры.

Периодический гофрированный волновод из пористого материала исследуется в работе [14], где показано, что дополнительная извилистость усиливает звукопоглощение для низких частот.

Закономерности, возникающие при нахождении дисперсионных соотношений для неоднородного пьезоэлектрического волновода с затуханием, обсуждены в [15], где для исследования применяется асимптотический метод.

В предыдущих работах авторов настоящей работы [16–19] в рамках теории пластин переменной жесткости Кирхгофа были проанализированы волновые процессы в топографических волноводах из изотропных и ортотропных материалов. Для изотропного случая проведено сравнение скоростей клиновых волн, полученных в рамках вариационного подхода, с аналогичными результатами, но найденными по геометроакустической теории, представленной в [20]. Для антисимметричных мод в клиновидных структурах с ортотропным типом анизотропии построены дисперсионные соотношения.

Исследования волновых процессов в топографических волноводах можно проводить на основе моделей пластин переменной жесткости Кирхгофа или типа Тимошенко, для которых можно сформулировать краевые задачи для операторов с переменными коэффициентами. В работе [21] с использованием обобщенных гипотез теории пластин переменной жесткости типа Тимошенко авторы настоящей работы изучили особенности волновых процессов в клиновидных волноводах конечной высоты с закрепленным основанием.

Цель настоящей работы – в рамках теории пластин переменной жесткости типа Тимошенко разработать подход для изучения дисперсионных зависимостей для топографических волноводов, представляющих собой упругие структуры с трапециевидным поперечным сечением конечных размеров, а также совершить предельный переход к треугольному и прямоугольному случаю. В настоящем исследовании на основе вариационной трактовки исходной задачи при анализе дисперсионного множества использован метод Ритца.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Под топографическим волноводом будем понимать бесконечную упругую структуру, ограниченную цилиндрической поверхностью, в поперечном сечении которой находится многоугольник (в настоящем исследовании в общем случае это трапеция); одна из граней волновода закреплена. Особенности распространения упругих волн в волноводах с конечным поперечным сечением изучены недостаточно. Для бесконечного клина известно о локализации энергии в поперечном сечении около ребра и отсутствии дисперсии; интерес представляет исследование волновых процессов и дисперсионных соотношений для волноводов с прямоугольным и трапециевидным поперечным сечением.

Задача для ограниченного по высоте клиновидного волновода, поперечное сечение которого – конечный треугольник, подробно изучена в работе [21]. В настоящем исследовании рассмотрим упругие волны, распространяющиеся вдоль оси упругого топографического волновода из ортотропного материала с сечением  $S$ , которое в общем случае представляет собой равнобедренную трапецию с высотой  $h$ , углом при основании  $\pi/2 - \alpha$  и меньшим основанием длины  $2l$  (рис. 1). Введем связанную с осями упругой симметрии декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$ . Будем считать, что ось  $Ox_3$  направлена перпендикулярно плоскости поперечного сечения волновода и проходит через середину меньшего основания трапеции. Нижняя граница волноводной структуры зашлепена. Нагрузки на верхней и боковых гранях отсутствуют.

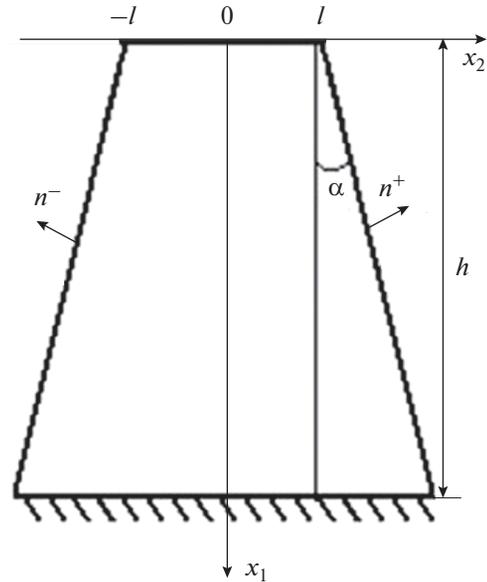


Рис. 1. Поперечное сечение волновода.

Как и в работе [21], решение задачи для цилиндрического волновода с сечением в виде трапеции будем искать в виде волн, распространяющихся вдоль оси  $Ox_3$  изучаемой упругой структуры:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= U_1(x_1, x_2) \cos(\gamma x_3 - \omega t), \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= U_2(x_1, x_2) \cos(\gamma x_3 - \omega t), \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= U_3(x_1, x_2) \sin(\gamma x_3 - \omega t), \end{aligned}$$

где  $\gamma$  – волновое число,  $U_m(x_1, x_2)$ ,  $m = 1, 2, 3$  – проекции вектора смещений в плоскости  $Ox_1x_2$ ,  $\omega$  – частота вибраций волновода.

Для перехода к безразмерной задаче введем следующие параметры:  $\gamma_i = C_{ii}/C_{55}$ , где  $i = 1-4, 6$ ,  $\gamma_5 = C_{12}/C_{55}$ ,  $\gamma_7 = C_{23}/C_{55}$ ,  $\gamma_8 = C_{13}/C_{55}$ ,  $\beta = \rho\omega^2 h^2 / C_{55}$ ,  $\mu = \gamma^2 h^2$ , где  $\rho$  – плотность материала,  $C_{ij}$  – упругие постоянные ортотропного материала. Задачу о распространении волны для усеченного клиновидного волновода сводим к определению стационарного значения квадратичного функционала  $M$ :

$$M[U_i] = \int_S M_0 dS, \quad (1)$$

который после отделения временного множителя формируется на основе принципа Гамильтона–Остроградского [18].

Подынтегральная функция в (1) есть квадратичная функция амплитуд и их производных и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} M_0 &= (\gamma_1 U_{1,1} + \gamma_5 U_{2,2} + \gamma_8 U_{3,3}) U_{1,1} + \\ &+ (\gamma_5 U_{1,1} + \gamma_2 U_{2,2} + \gamma_7 U_{3,3}) U_{2,2} + \\ &+ (\gamma_8 U_{1,1} + \gamma_7 U_{2,2} + \gamma_3 U_{3,3}) U_{3,3} + \gamma_6 (U_{1,2} + U_{2,1})^2 + \\ &+ (U_{1,3} + U_{3,1})^2 + \gamma_4 (U_{2,3} + U_{3,2})^2 - \\ &- \beta (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2). \end{aligned}$$

Здесь нижний индекс после запятой обозначает производную по соответствующей координате.

Из условия стационарности функционала  $\delta M[U_i] = 0$  можно получить однородную краевую задачу с двумя спектральными параметрами  $\mu$  и  $\beta$ ; те соотношения между спектральными параметрами  $\mu$  и  $\beta$ , при которых эта задача имеет нетривиальное решение, порождает дисперсионное множество задачи. Построим первые ветви этого множества, используя вариационную трактовку и упростив функционал.

### МОДЕЛЬ ПЛАСТИНЫ ТИПА ТИМОШЕНКО

Для нахождения приближенного решения задачи в случае малого угла раскрыва используем гипотезы, подобные гипотезам теории пластин.

Отметим, что колебания волновода по типу движений подразделяются на два типа: симметричные и антисимметричные. Учитывая, что свободные симметричные колебания топографического волновода с симметричным поперечным сечением обычно отсутствуют [5], подробно исследуем антисимметричный случай.

Считая, что углы при основании трапециевидного поперечного сечения мало отличаются от  $\pi/2$ , предположим, что компоненты амплитуд смещений соответствуют гипотезам, аналогичным гипотезам теории пластин для модели Тимошенко [11]:

$$U_1 = x_2 W_1(x_1), \quad U_2 = h W_2(x_1), \quad U_3 = \gamma x_2 h W_3(x_1).$$

Совершая переход к безразмерным величинам, сделаем замену переменных:  $z = x_1/h$  и учтем обобщенные гипотезы. В выражении для функционала (1) осуществим интегрирование по  $x_2$ . Таким образом, найдем упрощенное значение

функционала (1) и задачу об анализе волновых полей для топографических волноводов сведем к задаче об исследовании стационарного значения функционала  $M$ :

$$M[W_j] = \int_0^1 M_0^* dz, \quad (2)$$

где

$$M_0^* = 2h \left( \frac{1}{3} (zt + s)^3 \left( \gamma_1 W_1'^2 + 2\mu\gamma_8 W_1' W_3 + \mu^2 \gamma_3 W_3^2 + \mu(-W_1 + W_3')^2 \right) - \beta(W_1^2 + \mu W_3^2) \right) + (zt + s) \left( \gamma_6 (W_1 + W_2')^2 + \gamma_4 \mu (-W_2 + W_3)^2 - \beta W_2^2 \right)$$

и введены обозначения  $t = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $s = l/h$ . Отметим, что исходя из представления (2), можно с единых позиций исследовать дисперсионные множества для различных поперечных сечений, варьируя параметры. Так, например, задавая  $s = 0$ , можно получить функционал для волновода с треугольным поперечным сечением, исследование которого осуществлено в работе [21].

Определим стационарное значение функционала  $M[W_j]$ , основываясь на методе Ритца. Учитывая известные требования к координатным функциям, выберем решение из класса функций  $W(z)$ , ограниченных при  $z = 0$  и удовлетворяющих граничным условиям жесткого защемления при  $z = 1$ . Решение о нахождении стационарного значения функционала (2) будем искать в следующем виде:

$$W_1 = (1 - z)^2 \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(z),$$

$$W_2 = (1 - z)^2 \sum_{n=1}^N b_n \varphi_n(z),$$

$$W_3 = (1 - z)^2 \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n(z).$$

В качестве координатных функций выберем систему функций  $\varphi_n(z) = z^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  Тогда функционал (2) можно представить в виде квадратичной формы  $3N$  переменных относительно коэффициентов разложений.

Условие стационарности функционала (2) позволяет сформулировать однородную систему линейных однородных уравнений; приравнивая к нулю ее определитель, получим приближенный вид дисперсионного уравнения. Определяя его нули в окрестности начала координат, найдем ветви дисперсионного множества.

В качестве примера рассмотрим частный случай при  $N = 2$ . Проинтегрировав (2) по  $z$ , получаем функционал, представляющий собой квадратичную форму 6 переменных.

$$M(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) = k_{11} a_1^2 + k_{12} a_1 b_1 + k_{13} a_1 c_1 + k_{14} a_1 a_2 + k_{15} a_1 b_2 + k_{16} a_1 c_2 + k_{22} b_1^2 + k_{23} b_1 c_1 + k_{24} b_1 a_2 + k_{25} b_1 b_2 + k_{26} b_1 c_2 + k_{33} c_1^2 + k_{34} c_1 a_2 + k_{35} c_1 b_2 + k_{36} c_1 c_2 + k_{44} a_2^2 + k_{45} a_2 b_2 + k_{46} a_2 c_2 + k_{55} b_2^2 + k_{56} b_2 c_2 + k_{66} a_6^2,$$

где все  $k_{ij} = k_{ij}(\beta, \mu)$ ,  $i, j = 1-6$  полиномиальным образом зависят от спектральных параметров. В силу громоздкости они не приводятся; приведем, например:

$$k_{11} = \left( -\frac{1}{15} s^3 - \frac{1}{30} s^2 t - \frac{1}{840} t^3 - \frac{1}{105} s t^2 \right) \beta + \frac{1}{30} \gamma_6 t + \frac{1}{5} \gamma_6 s + \left( \frac{2}{15} \gamma_1 + \frac{1}{105} \mu \right) s t^2 + \left( \frac{1}{3} \gamma_1 + \frac{1}{30} \mu \right) s^2 t + \left( \frac{1}{45} \gamma_1 + \frac{1}{840} \mu \right) t^3 + \left( \frac{4}{9} \gamma_1 + \frac{1}{15} \mu \right) s^3.$$

Стоит отметить, что, совершая предельный переход при  $s \rightarrow 0$ , при нахождении стационарного значения функционала (2) можно получить уравнение для определения дисперсионного множества такое же, как и при исследовании волновых процессов для клиновидного волновода, представленного в [21].

Можно также заметить, что при наличии связей  $W_1 = -W'$ ,  $W_2 = W_3 = W$  модель пластины переменной жесткости типа Тимошенко сводится к частному случаю – к модели типа Кирхгофа. Функционал (2) преобразуется в функционал, который зависит от одной переменной  $W$  и имеет вид:

$$M_0^* = 2h \left( \frac{1}{3} (zt + s)^3 \times \left( \gamma_1 W''^2 - 2\mu\gamma_8 W'' W + \mu^2 \gamma_3 W^2 + 4\mu (W')^2 \right) - \beta \left( (W')^2 + \mu W^2 \right) - (zt + s) \beta W^2 \right).$$

Полученное дисперсионное множество для пластины Кирхгофа исследовано в работе [18].

**Таблица 1.** Значения  $\mu$  для первой и второй моды

№ моды	$\beta$	Число координатных функций				
		$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$	$N = 10$
1 мода	1	34.442	34.451	34.475	34.483	34.499
	2	60.671	60.681	60.708	60.723	60.745
	3	82.798	82.821	82.859	82.889	82.922
	4	102.614	102.653	102.703	102.750	102.798
	5	120.841	120.943	120.959	121.024	121.088
2 мода	2	8.894	9.073	9.167	9.240	9.293
	3	19.857	20.068	20.137	20.207	20.251
	4	29.737	29.563	29.611	29.677	29.714
	5	37.825	38.088	38.120	38.184	38.216

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В ходе исследований рассматриваются топографические волноводы со следующими геометрическими параметрами  $\alpha = 5^\circ$  и  $s = 0.01$ . На основе приближенного подхода с использованием метода Ритца получены дисперсионные зависимости для различного числа координатных функций. Серия вычислительных экспериментов проводится для ортотропного материала – аустенитной стали, которая характеризуется следующими безразмерными параметрами [22]:  $\gamma_1 = 2.036$ ,  $\gamma_2 = 2.036$ ,  $\gamma_3 = 1.674$ ,  $\gamma_4 = 1.000$ ,  $\gamma_5 = 0.761$ ,  $\gamma_6 = 0.598$ ,  $\gamma_7 = 1.124$ ,  $\gamma_8 = 1.124$ .

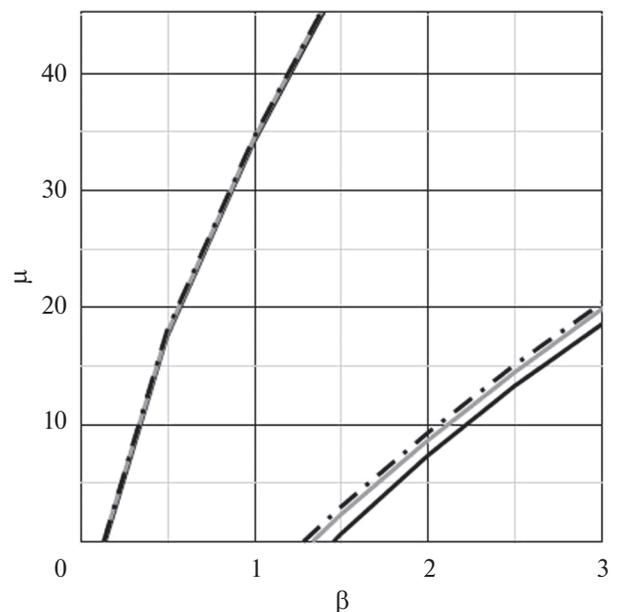
В табл. 1 для различного числа координатных функций показаны найденные значения  $\mu(\beta)$ . Отметим, что значения безразмерного параметра  $\mu$  монотонно увеличиваются с увеличением числа координатных функций, что подтверждает характер сходимости при реализации метода Ритца [23]. Стабилизация значений параметра  $\mu$  для первой моды и для второй моды достигнута при  $N = 10$ . При этом относительная разница между значениями  $\mu$ , которые соответствуют  $N = 9$  и  $N = 10$ , не превосходит 1%.

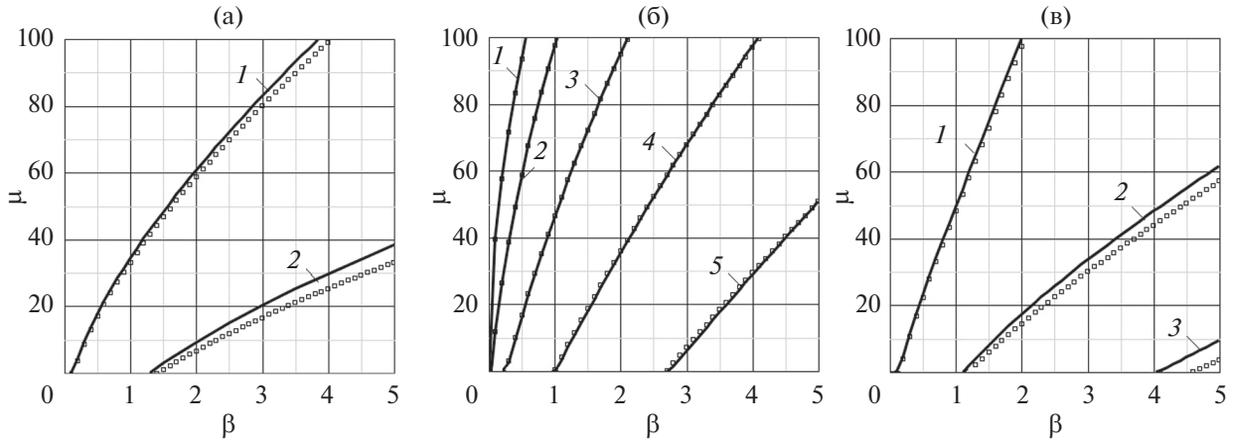
Графики дисперсионных зависимостей  $\mu$  от параметра  $\beta$  для первых двух мод приведены на рис. 2 для различного числа координатных функций. Черной сплошной линией показаны зависимости для  $N = 3$ , серой сплошной – для  $N = 5$  и черной штрихпунктирной – для  $N = 10$ .

Сравнение дисперсионных соотношений для модели Кирхгофа и модели типа Тимошенко для волноводов из аустенитной стали с различными поперечными сечениями представлено на рис. 3. Метками 1–5 отмечены соответствующие моды. Дисперсионные ветви для модели типа Тимошенко показаны черной сплошной линией, а для

модели Кирхгофа – точками. Результаты вычислительных экспериментов показали, что дисперсионные множества, найденные в рамках различных гипотез, отличаются незначительно в низкочастотной области.

Из общей теории волноводов известно, что для слоистого волновода имеется частота запираения, т.е. такое критическое значение  $\beta$ , при котором в волноводе отсутствует распространение мод  $\mu = 0$  и имеется стоячая волна. Для изучаемого топографического волновода также были проанализированы аналогичные ситуации. Для волноводов с поперечным сечением в виде равнобедрен-

**Рис. 2.** Графики дисперсионных зависимостей  $\mu(\beta)$ .



**Рис. 3.** Графики зависимости  $\mu(\beta)$  для модели Кирхгофа и модели типа Тимошенко для случая  $N = 10$  для топографического волновода с сечением в виде (а) – трапеции, (б) – прямоугольника и (в) – треугольника.

ного треугольника, прямоугольника и равнобочной трапеции были найдены критические значения, которые представлены в табл. 2.

В табл. 3 представлена зависимость для частот записания  $\beta(s)$  при фиксированном значении  $\alpha = 5^\circ$ . Из анализа полученных значений следует, что с увеличением значения параметра  $s$ , представляющего собой отношение половины длины меньше-

го основания трапеции к ее высоте, монотонно возрастают и значения спектрального параметра  $\beta$ , при котором в волноводе отсутствует распространение мод и имеется стоячая волна.

Представленная в табл. 4 зависимость значений частот записания  $\beta$  от параметра  $\alpha$  при фиксированном значении  $s = 0.01$  демонстрирует, что с увеличением угла раскрытия значения спек-

**Таблица 2.** Значения частот записания  $\beta$  для изучаемых сечений

Трапециевидное сечение	0.133	1.286	5.536	15.497	33.706
Треугольное сечение	0.143	1.112	4.061	10.370	21.446
Прямоугольное сечение	0.001	0.034	0.266	1.015	2.749

**Таблица 3.** Значения частот записания  $\beta$  для волновода с трапециевидным поперечным сечением при фиксированном значении  $\alpha = 5^\circ$

$s$	Значения частот записания $\beta$				
0.01	0.133	1.286	5.536	15.497	33.706
0.02	0.141	1.623	7.388	20.663	44.124
0.03	0.155	1.981	9.145	25.168	52.583
0.04	0.171	2.339	10.776	29.087	59.605
0.05	0.189	2.690	12.273	32.494	65.471

**Таблица 4.** Значения частот записания  $\beta$  для волновода с трапециевидным поперечным сечением при фиксированном значении  $s = 0.01$

$\alpha$	Значения частот записания $\beta$				
$\pi/180$	0.008	0.152	0.925	3.212	8.193
$\pi/90$	0.025	0.342	1.841	5.989	14.572
$\pi/60$	0.051	0.600	2.953	9.081	21.216
$\pi/45$	0.087	0.917	4.202	12.294	27.656
$\pi/36$	0.133	1.286	5.536	15.497	33.706

трального параметра  $\beta$ , при котором в волноводе отсутствует распространение мод и имеется стоячая волна, возрастают.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, приближенного подхода Ритца и модели пластины переменной жесткости типа Тимошенко разработан полуаналитический метод для нахождения дисперсионных зависимостей и проведены вычислительные эксперименты. Для топографических волноводов из ортотропного материала с треугольным, прямоугольным и трапециевидным поперечным сечением получены дисперсионные зависимости и найдены точки, соответствующие частотам запираания. Проведен анализ частот запираания в зависимости от угла раскрытия и от параметра, представляющего собой отношение половины длины меньшего основания трапеции к ее высоте. Проведено сравнение полученных результатов в рамках модели пластины типа Тимошенко с результатами для изученной ранее модели Кирхгофа. Показано, что при малых частотах касательные напряжения практически не влияют на дисперсионное множество для первой и второй моды. Для третьей моды появляется более существенное различие и учет касательных напряжений весьма существен для расчета волновых полей.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90079-А.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ash E.A., Rue R.M.D.L., Humphries R.F.* Microsound surface waveguide // *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 1969. V. 17. № 11. P. 882–892.
2. *Lagasse P.E., Mason I.M., Ash E.A.* Acoustic surface waveguides – analysis and assessment // *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 1973. V. MTT-21. P. 225–226.
3. *Sokolova E.S., Timler R., Mayer A.P., Kovalev A.S.* On the dispersion of wedge acoustic waves // *Wave Motion.* 2013. T. 50. № 2. P. 233–245.
4. *Pupyrev P.D., Lomonosov A.M., Mayer A.P., Hess P.* Symmetry effects on elastic wedge waves at anisotropic edges // *J. Appl. Phys.* 2014. V. 115. № 24. P. 243504.
5. *Tiersten H.F., Rubin D.* On the fundamental antisymmetric mode of the wedge guide // *Proc. IEEE Ultrasonic Symposium.* 1974. P. 117–120.
6. *Заворохин Г.Л., Назаров А.И.* Об упругих волнах в клине // *Записки научных семинаров ЛОМИ.* 2010. Т. 380. С. 45–52.
7. *Камоцкий И.В.* О поверхностной волне, бегущей вдоль ребра упругого клина // *Алгебра и анализ.* 2008. Т. 20. № 1. С. 86–92.
8. *Бабич В.М.* Об одном классе топографических волноводов // *Алгебра и анализ.* 2010. Т. 22. № 1. С. 98–107.
9. *Pupyrev P.D., Lomonosov A.M., Nikodijevic A., Mayer A.P.* On the existence of guided acoustic waves at rectangular anisotropic edges // *Ultrasonics.* 2016. V. 71. P. 278–287.
10. *Коненков Ю.К.* Об изгибной волне “рэлеевского” типа // *Акуст. журн.* 1960. Т. 6. № 1. С. 124–126.
11. *Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д.* Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* 2017. Т. 17. № 4. С. 419–430.
12. *Lomonosov A.M., Hess P., Mayer A.P.* Silicon edges as one-dimensional waveguides for dispersion-free and supersonic leaky wedge waves // *Appl. Phys. Lett.* 2012. V. 101. № 3. P. 031904.
13. *Ватульян А.О., Юров В.О.* Об оценке законов радиальной неоднородности в цилиндрическом волноводе // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 2. С. 119–127.
14. *Changyong Jiang, Lixi Huang.* Characterization of low-frequency acoustic wave propagation through a periodic corrugated waveguide // *J. Sound Vib.* 2018. V. 418. P. 79–99.
15. *Ватульян А.О., Юров В.О.* Исследование дисперсионных свойств неоднородного пьезоэлектрического волновода при наличии затухания // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 4. С. 339–348.
16. *Ватульян А.О., Паринова Л.И.* Исследование клиновых волн в ортотропной среде // *Вестник ДГТУ.* 2005. Т. 5. № 4(26). С. 491–499.
17. *Vatulyan A.O., Parinova L.I.* On the elastic waves propagating along the edge of the wedge with small opening angle // *Advanced Materials–Techniques, Physics, Mechanics and Applications. Springer Proceeding in Physics.* Eds. Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung Chang, Muaffaq A. Jani. Springer, Cham, 2017. V. 193. P. 309–319.
18. *Ватульян А.О., Паринова Л.И.* Об исследовании дисперсионных свойств топографических волноводов // *Изв. вузов. Сев-Кавк. регион. Естеств. науки.* 2018. № 3. С. 10–17.
19. *Parinova L.I.* On the wave propagating along the plate-like waveguide // *Advanced Materials – Proc. of the Int. Conf. on “Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications”, PHENMA 2018, Springer Proceeding in Physics, V. 224.* Eds. Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung Chang, Yun-Hae Kim. 2019. P. 487–494.
20. *Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плещский В.П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 414 с.
21. *Vatulyan A., Parinova L.* On the use of models of the Tymoshenko type in the analysis of wave processes in wedge-shaped waveguides // *Advanced Materials – Proc. of the Int. Conf. on “Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications”, PHENMA 2019, Springer Proceedings in Materials.* Eds. Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung Chang, Banh Tien Long. Springer Nature, Cham, Switzerland, 2020. V. 6. P. 383–389.
22. *Блистанов В.С., Бондаренко В.С., Перемолова Н.В., Стрижевская Ф.Н., Чкалова В.В., Шаскольская М.П.* Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. Шаскольской М.П. М.: Наука, 1982. 632 с.
23. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.