

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.1

ДИСПЕРСИОННЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНЕ, ЛЕЖАЩЕЙ
НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

© 2023 г. В. И. Ерофеев^а, *, Е. Е. Лисенкова^а, **

^аИнститут проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ “Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики Российской академии наук”,
ул. Белинского 85, Нижний Новгород, 603024 Россия

*e-mail: erof.vi@yandex.ru

**e-mail: eelissen@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.05.2022 г.

После доработки 23.10.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Рассматривается распространение изгибных волн в пластине, лежащей на двухпараметрическом упругом основании. В отличие от классической модели Кирхгофа, используемая здесь для исследования математическая модель учитывает не только кинетическую и потенциальную энергии изгибных колебаний, но и кинетическую энергию, обусловленную инерцией вращения элементов пластины при изгибе. Проводится анализ дисперсионного уравнения, фазовой скорости, скорости переноса энергии и энергетических характеристик волн, распространяющихся в пластине, в зависимости от соотношения коэффициентов, определяющих жесткости упругого основания на сдвиг и сжатие. Найдены условия, при которых возможно существование в пластине волн, фазовая и групповая скорости которых имеют противоположные направления (часто называемых “обратными” волнами). Показано, что такие волны существенно изменяют характер поведения потока энергии. Кроме того, найдены соотношения, связывающие кинематические и средние значения энергетических характеристик волн.

Ключевые слова: тонкая упругая пластина, обобщенное упругое основание, обратная волна, скорость переноса энергии, вектор плотности потока энергии, тензор плотности потока волнового импульса

DOI: 10.31857/S0320791922600342, EDN: ISWARR

ВВЕДЕНИЕ

Пластина на упругом основании широко используется как расчетная модель, описывающая различные элементы объектов авиации, судостроения, машиностроения, строительства и т.д.

Непрерывное увеличение скорости, времени работы и удельной мощности машин и механизмов, забота о снижении веса конструкции при улучшении ее надежности в работе, а также широкое внедрение в современную технику новых композиционных материалов – все это приводит к повышению требований к модели и точности расчетов. Современные тенденции исследования колебаний пластин на упругом основании идут по пути усложнения модели, которые в подавляющем большинстве случаев выполняются численными методами. Например, если ранее для проведения анализа изгибных волн выбиралась пластина модели Кирхгофа [1], то в последнее время все чаще используется модель Тимошенко

[1–3]. Это касается и упругого основания, для описания которого используются более сложные модели [4–6], чем линейная модель Винклера [7].

Как известно [8–16], в пластинах и тонких слоях существует особый тип волн, характеризующихся противоположным направлением фазовой и групповой скорости. Такие волны часто называют “обратными”, в отличие от обычных, “прямых” волн, у которых направления фазовой и групповой скоростей совпадают. При изучении “обратных” акустических волн в пластинах было установлено, что они весьма чувствительны к параметрам пластины [12, 17–19].

Данная работа посвящена нахождению параметров как пластины, так и упругого основания, при которых могут существовать “обратные” изгибные волны.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим изгибные колебания пластины, лежащей на упругом основании, свойства которого характеризуются двумя коэффициентами постели: на растяжение k_1 и на сдвиг k_2 . Коэффициент k_1 имеет размерность Н/м³, а коэффициент сдвига k_2 , который учитывает совместную работу соседних областей, имеет размерность Н/м. Такую модель упругого основания называют обобщенной, двухпараметрической, невинклеровой или моделью Пастернака [20–24]. Вырожденный случай ($k_2 = 0$) соответствует классической модели основания Винклера. Использование модели Пастернака позволяет не только сохранить простоту математического аппарата, которая присуща винклеровой модели, но и получить более достоверные результаты.

Для лагранжиана малых колебаний пластины с учетом инерции вращения ее элементов при изгибе будем иметь выражение [25]

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \rho h_* u_t^2 + \frac{\rho h_*^3}{12} (u_{xt}^2 + u_{yt}^2) - \frac{h_*^3}{6} \left(\frac{\Lambda + 2\mu}{2} (u_{xx} + u_{yy})^2 + 2\mu (u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}) \right) - k_1 u^2 - k_2 (u_x^2 + u_y^2) \right\}. \tag{1}$$

Здесь ρh_* – поверхностная плотность, Λ, μ – константы Ляме, h_* – толщина, $u(x, y, t)$ – поперечное смещение пластины, k_1 и k_2 – коэффициент “постели” на сжатие и коэффициент “сдвига” основания пластины, соответственно, индексами t и x, y обозначаются частные производные функции смещения по времени и пространственным координатам.

Подставляя (1) в уравнение Эйлера–Остроградского [1], получим уравнение изгибных колебаний пластины

$$\rho h_* \partial_{tt} u - \frac{\rho h_*^3}{12} \partial_{tt} \Delta u + \frac{(\Lambda + 2\mu) h_*^3}{12} \Delta \Delta u - k_2 \Delta u + k_1 u = 0. \tag{2}$$

$$\left(\partial_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} \right),$$

решение которого можно представить в виде суперпозиции плоских волн

$$u(x, y, t) = A \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)],$$

где A, ω, k_x, k_y – комплексные постоянные.

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ И ВОЛНОВОГО ИМПУЛЬСА

Особенностью распределенных упругих систем является возможность переноса с конечной скоростью энергии и волнового импульса. Для получения соответствующих уравнений переноса умножим уравнение динамики (1) на частные производные функции поперечного смещения $u(x, y, t)$ пластины u_t, u_x, u_y и приведем полученные соотношения к дивергентному виду. В результате будем иметь

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{T} = 0. \tag{3}$$

Здесь

$$h = \frac{1}{2} \left\{ \rho h_* u_t^2 + \frac{\rho h_*^3}{12} (u_{xt}^2 + u_{yt}^2) + \frac{h_*^3}{6} \left(\frac{\Lambda + 2\mu}{2} (u_{xx} + u_{yy})^2 + 2\mu (u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}) \right) + k_1 u^2 + k_2 (u_x^2 + u_y^2) \right\}$$

– плотность энергии, $\mathbf{S} = \{S_x, S_y\}$ – вектор плотности потока энергии, часто называемый вектором Умова–Пойнтинга [26, 27], с компонентами:

$$S_x = u_t \left(\frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} (u_{xxx} + u_{xyy}) - \frac{\rho h_*^3}{12} u_{xtt} - k_2 u_x \right) - \frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} u_{xt} u_{xx} - \frac{h_*^3 \Lambda}{12} u_{xt} u_{yy} - \frac{h_*^3 \mu}{6} u_{yt} u_{xy}, \quad (x \leftrightarrow y)$$

$\mathbf{p} = \{p_x, p_y\}$ – вектор плотности волнового импульса с координатами:

$$p_x = -\rho h_* u_t u_x - \frac{\rho h_*^3}{12} u_{xt} u_{xx} - \frac{\rho h_*^3}{12} u_{yt} u_{xy},$$

\mathbf{T} – тензор плотности потока волнового импульса с компонентами

$$T_{xx} = \left\{ \rho h_* u_t^2 + \frac{\rho h_*^3}{12} (u_{xt}^2 + u_{yt}^2 + 2u_x u_{xt}) + \frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} (u_{xx}^2 - u_{yy}^2 - 2u_x (u_{xxx} + u_{xyy})) - k_1 u^2 + k_2 (u_x^2 - u_y^2) \right\} / 2,$$

$$T_{xy} = u_y \left(\frac{\rho h_*^3}{12} u_{xxt} - \frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} (u_{xxx} + u_{xyy}) + k_2 u_x \right) + \frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} u_{xy} (u_{xx} + u_{yy}), \quad (x \leftrightarrow y).$$

Вычисляя средние значения этих величин за период волны $2\pi\omega^{-1}$, получим:

$$\begin{aligned} \langle h \rangle &= \frac{1}{2} \rho h_* \left(1 + \frac{h_*^2}{12} (k_x^2 + k_y^2) \right) \omega^2 A A^*, \\ \langle S_x \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{6} (k_x^2 + k_y^2) - \frac{\rho h_*^3}{12} \omega^2 + k_2 \right) \omega k_x A A^*, \\ \langle p_x \rangle &= \frac{1}{2} \rho h_* \left(1 + \frac{h_*^2}{12} (k_x^2 + k_y^2) \right) \omega k_x A A^*, \quad (4) \\ \langle T_{xy} \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{6} (k_x^2 + k_y^2) - \frac{\rho h_*^3}{12} \omega^2 + k_2 \right) k_x k_y A A^*, \\ &\quad (x \leftrightarrow y). \end{aligned}$$

Верхний индекс * означает комплексное сопряжение.

На кинематические характеристики волны — частоту ω , компоненты волнового вектора $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$ и параметры распределенной системы — уравнениями динамики накладывается связь, которую принято называть дисперсионным уравнением [28].

АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

На основе уравнения динамики пластины (2) получим, что частота ω и компоненты волнового вектора k_x, k_y связаны посредством дисперсионного соотношения

$$\omega = \pm \left(\frac{h_*^3 (\Lambda + 2\mu)}{12} (k_x^2 + k_y^2)^2 + k_2 (k_x^2 + k_y^2) + k_1 \right)^{1/2} \times \left(\rho h_* + \frac{\rho h_*^3}{12} (k_x^2 + k_y^2) \right)^{-1/2}. \quad (5)$$

Определяя наименьшую частоту возбуждаемых в пластине волн, будем иметь

$$\omega_{RP} = \frac{2}{\sqrt{\rho h_*}} \left(6(\Lambda + 2\mu) \left(\sqrt{1 - \frac{k_2}{h_* (\Lambda + 2\mu)} + \frac{k_1 h_*}{12(\Lambda + 2\mu)} + \frac{k_2}{2h_* (\Lambda + 2\mu)} - 1} \right) \right)^{1/2}$$

при $\frac{k_2}{k_1 h_*^2} < \frac{1}{12}$. Низкочастотное поле с частотой

$\omega < \omega_{RP}$ не распространяется, а экспоненциально спадает по мере проникновения в систему. Сравнивая с частотой

$$\begin{aligned} \omega_{RV} &= \\ &= 2 \left(6(\Lambda + 2\mu) \left(\sqrt{1 + k_1 h_* / 12(\Lambda + 2\mu)} - 1 \right) \right)^{1/2} / \sqrt{\rho h_*} \end{aligned}$$

для винклеровского основания, можно утверждать, что $\omega_{RV} < \omega_{RP}$. Следовательно, область непропускания для пластины с учетом инерции вращения ее элементов при изгибе, лежащей на винклеровском основании уже, чем для упругого основания модели Пастернака.

На рис. 1 представлены дисперсионные кривые (зависимость частоты ω от волнового числа k — модуля волнового вектора \mathbf{k} волны) при различных значениях коэффициента сдвига основания пластины. Видно, что существует участок дисперсионной кривой, на котором тангенс угла наклона касательной отрицателен. Следовательно, для рассматриваемой модели имеется область

частот ($\omega_{RP}, \sqrt{k_1 / \rho h_*}$), где справедлив “эффект обратной волны” [29–31]. Для таких волн (как было сказано выше) имеет место противоположная направленность фазовой и групповой скоростей. На возможность этой ситуации впервые было указано Лэмбом [32], который построил ряд моделей сред, обладающих данным свойством.

Ширина частотной области существования “обратных” волн зависит от отношения величин коэффициентов постели на сдвиг и на сжатие. При $k_2 = 0$, что соответствует модели основания Винклера, частотная область наличия “обратных” волн шире, чем для модели основания Пастернака ($\omega_{RP}, \sqrt{k_1 / \rho h_*} \subset \omega_{RV}, \sqrt{k_1 / \rho h_*}$). Увеличение коэффициента упругого основания пластины на сдвиг приводит к уменьшению частотной области, где имеют место быть “обратные” волны, а при $k_2 / k_1 h_*^2 > 1/12$ делает невозможным их существование. Следует также отметить, что в пластине модели Кирхгофа поперечные волны являются “прямыми” (направления фазовой и групповой скоростей совпадают) [33].

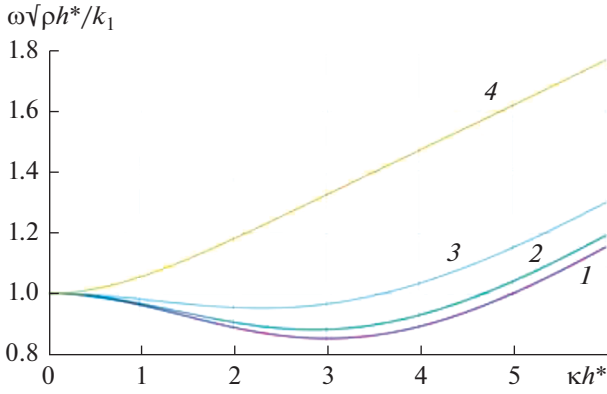


Рис. 1. Зависимость безразмерной частоты от безразмерного волнового числа при различных значениях приведенного коэффициента сдвига ($\tilde{k}_2 = k_2/k_1 h_*^2$) упругого основания: 1 – $\tilde{k}_2 = 0$; 2 – $\tilde{k}_2 = 0.01$; 3 – $\tilde{k}_2 = 0.04$; 4 – $\tilde{k}_2 = 0.2$.

Определяя фазовую скорость волн как $v_{ph} = \omega\kappa/k^2$, в безразмерных переменных

$$a = \sqrt{\frac{\Lambda + 2\mu}{k_1 h_*}}, \quad \tilde{k}_2 = \frac{k_2}{k_1 h_*^2}, \quad \tilde{\omega} = \omega \sqrt{\rho h_* / k_1},$$

$$\tilde{k}_x = k_x h_*, \quad \tilde{k}_y = k_y h_*, \quad \tilde{v}_{ph} = |v_{ph}| \sqrt{\frac{\rho}{k_1 h_*}},$$

получим выражение для модуля фазовой скорости

$$\tilde{v}_{ph} = \tilde{\omega} \left(\frac{6}{a^2} \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{12} - \tilde{k}_2 \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{\omega}^2}{12} - \tilde{k}_2 \right)^2 - \frac{a^2}{3} (1 - \tilde{\omega}^2)} \right) \right)^{-1/2}.$$

Знак “–” соответствует интервалу частот $\tilde{\omega} \in [\omega_{RP} \sqrt{\rho h_* / k_1}; 1]$, знак “+” – интервалу $[\omega_{RP} \sqrt{\rho h_* / k_1}; +\infty)$. На рис. 2 представлены зависимости модуля фазовой скорости от частоты при различных значениях коэффициента сдвига. Расчетные графики построены для безразмерных переменных при $a = 0.2$.

Фазовая скорость в безразмерных переменных имеет горизонтальную асимптоту $\tilde{v}_{ph} = a$ (при $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$) и вертикальную асимптоту $\tilde{\omega} = 1$ (рис. 2). Частотная область $(\omega_{RP} \sqrt{\rho h_* / k_1}; 1)$ является областью существования “обратных”, а $(\omega_{RP} \sqrt{\rho h_* / k_1}; +\infty)$ – “прямых” волн.

Определяя минимальную фазовую скорость волн, получим

$$\tilde{v}_{ph}^{\min} = \left(\left(\sqrt{1 + 12a^2 - 12\tilde{k}_2} - 1 + 6\tilde{k}_2 \right) / 6 \right)^{1/2}.$$

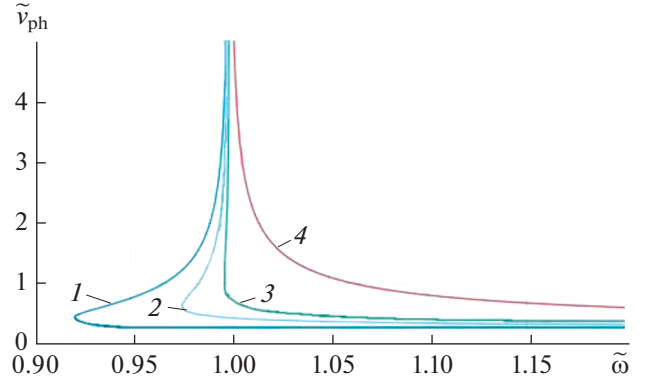


Рис. 2. Частотные зависимости фазовой скорости при различных значениях коэффициента сдвига упругого основания: 1 – $\tilde{k}_2 = 0$; 2 – $\tilde{k}_2 = 0.01$; 3 – $\tilde{k}_2 = 0.04$; 4 – $\tilde{k}_2 = 0.2$.

Эта скорость является одной из важных среди критических скоростей, которые рассматриваются в литературе. Так, например, как было показано в работах [34, 35], при равномерном движении объекта со скоростью, превышающей минимальную фазовую скорость излучаемой волны, его поперечные колебания, вследствие аномального эффекта Доплера [36, 37], могут быть неустойчивыми. В связи с этим при исследовании колебаний упругой системы, несущей высокоскоростную движущуюся нагрузку, определение минимальной фазовой скорости становится первоочередной задачей [35, 38–40].

Заметим, что скорость \mathbf{V} переноса волновой энергии определяется как \mathbf{S}/h [28]. Можно убедиться, что для квазигармонических волн среднее за период значение \mathbf{V} равно $d\omega/d\mathbf{k} = \text{grad}_{\mathbf{k}}\omega$, что совпадает с известным приближенным выражением для групповой скорости [28].

Зависимость составляющей V_x скорости переноса волновой энергии (групповой скорости) от частоты при $k_y = 0$ и различных значениях коэффициента сдвига основания пластины в безразмерных переменных ($\tilde{V}_x = V_x \sqrt{\rho (k_1 h_*)^{-1}}$) представлено на рис. 3.

Для частоты ω_{RP} , где “обратные” волны переходят в “прямые”, групповая скорость обращается в нуль, а следовательно, энергия на этой частоте не переносится.

При высоких частотах значение скоростей \mathbf{V} и v_{ph} близко к скорости продольной волны в безграничной среде. Следует ожидать, что путем введения поправочного коэффициента в модели (1)–(2) можно добиться более точного описания дисперсионных свойств реальной пластины, в частно-

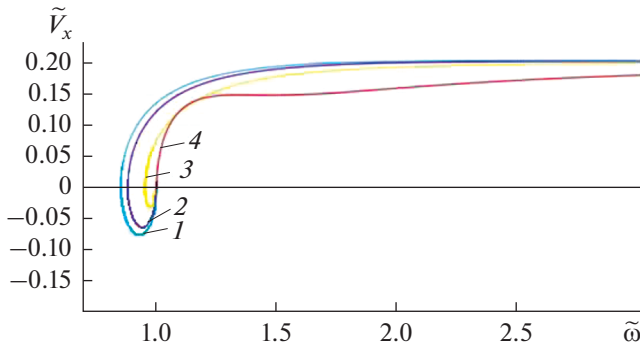


Рис. 3. Частотные зависимости групповой скорости при различных значениях коэффициента сдвига упругого основания: 1 – $\tilde{k}_2 = 0$; 2 – $\tilde{k}_2 = 0.01$; 3 – $\tilde{k}_2 = 0.04$; 4 – $\tilde{k}_2 = 0.2$.

сти, в пределе при $\omega \rightarrow \infty$ фазовая скорость будет близка к скорости сдвиговой волны.

Сравнивая фазовую и групповую скорости (при $k_y = 0$, рис. 4), следует также выделить две области волновых чисел. Для первой области – фазовая скорость больше групповой, для второй – фазовая меньше групповой скорости. Следовательно, в первой области имеем нормальную дисперсию волн, во второй – аномальную. Имеется волновое число (а соответственно, и частота), перенос энергии колебаний при котором осуществляется с максимальной скоростью.

АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

Представляет интерес оценить локальный поток энергии, переносимый волнами в пластине, изгибные колебания которой описываются уравнением (2). Следует отметить, что впервые, по-

видимому, изучение плотностей потоков энергии “обратных” волн в упругой полосе в зависимости от поперечной координаты слоя было проведено в работе [41], где для нормальных волн обнаружены локальные потоки энергии встречного направления. В [42] при исследовании продольных колебаний бесконечной пластины постоянной ширины было установлено, что на частоте возникновения “обратной” волны происходит принципиальная перестройка поля вектора потока энергии. В случае, когда у дисперсионной кривой нет участка, соответствующего “обратной” волне, плотность потока энергии остается знакопостоянной. Хотя в составной модели, как показано в работе [43], локальные потоки энергии могут носить знакопеременный характер не только для обратных, но и для прямых волн, которые не связаны с обратными волнами одной дисперсионной кривой.

На рис. 5 изображены зависимости плотности потока энергии $\tilde{S}_x = \langle S_x \rangle \sqrt{\rho} \left(\sqrt{k_1^3 h_* A A^*} \right)^{-1}$ от волнового числа при различных значениях приведенного коэффициента сдвига упругого основания (для случая $k_y = 0$).

Видно, что поведение плотностей потоков энергии носит знакопеременный характер, если $k_2/k_1 h_*^2 < 1/12$; в противном случае, а именно, при $k_2/k_1 h_*^2 > 1/12$ изменение знака плотности потока энергии не наблюдается.

Из (4) и (5) следует, что для средних значений локальных энергетических характеристик справедливы следующие соотношения:

– скалярное произведение фазовой скорости на вектор плотности волнового импульса равно плотности волновой энергии:

$$\langle h \rangle = \mathbf{v}_{ph} \langle \mathbf{p} \rangle;$$

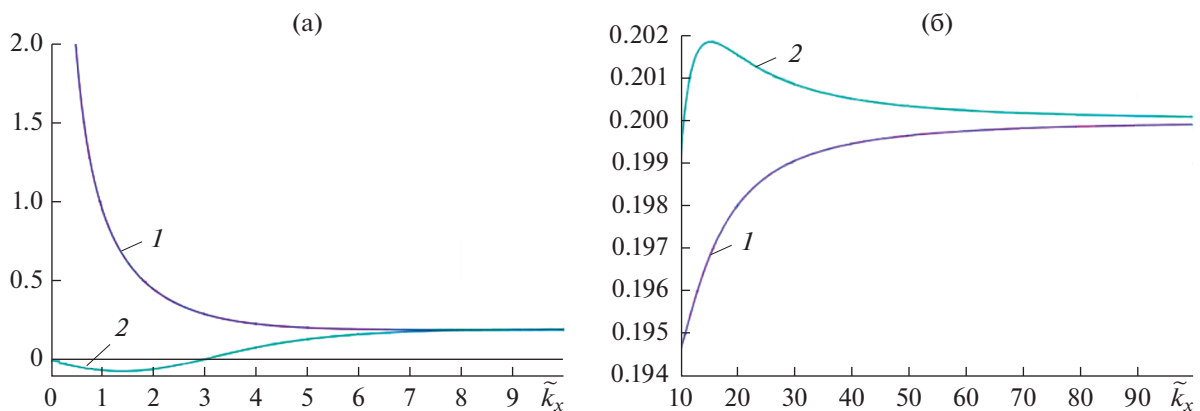


Рис. 4. Зависимость фазовой (1) и групповой (2) скоростей от волнового числа для приведенного коэффициента сдвига упругого основания $\tilde{k}_2 = 0.01$.

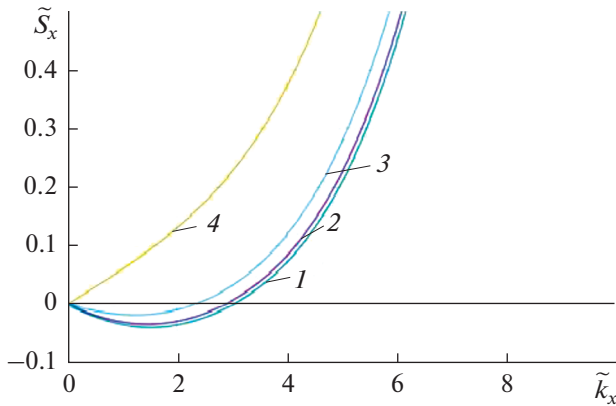


Рис. 5. Плотность потока энергии в зависимости от волнового числа при 1 – $\tilde{k}_2 = 0$; 2 – $\tilde{k}_2 = 0.01$; 3 – $\tilde{k}_2 = 0.04$; 4 – $\tilde{k}_2 = 0.2$.

– произведение вектор-столбца групповой скорости $\mathbf{V} = (V_x, V_y)^T$ на вектор-строку плотности волнового импульса равно тензору плотности потока волнового импульса:

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} (\langle p_x \rangle \langle p_y \rangle) = \begin{pmatrix} \langle T_{xx} \rangle & \langle T_{xy} \rangle \\ \langle T_{yx} \rangle & \langle T_{yy} \rangle \end{pmatrix}.$$

Отношение модулей средних значений плотности потока энергии к плотности волнового импульса равно произведению модулей фазовой и групповой скоростей волн:

$$\frac{|\langle \mathbf{S} \rangle|}{|\langle \mathbf{p} \rangle|} = |\mathbf{v}_{ph}| |\mathbf{V}|.$$

Отношение плотности энергии к частоте равно отношению модуля вектора плотности волнового импульса к волновому числу.

$$\frac{\langle h \rangle}{\omega} = \frac{|\langle \mathbf{p} \rangle|}{k}.$$

ВЫВОДЫ

Таким образом, для пластины, лежащей на упругом основании, учет инерции вращения ее элементов при изгибе приводит к наличию частотной области существования “обратных” волн, т.е. волн, у которых фазовая и групповая скорости противоположно направлены.

При наличии двух коэффициентов постели (на сдвиг k_2 и на сжатие k_1), характерных для модели Пастернака, ширина этой области зависит от их соотношения. С уменьшением значения коэффициента сдвига упругого основания $k_2 \rightarrow 0$ частотная область существования “обратных” волн увеличивается. Пороговое значение, при котором

невозможно их существование, определяется равенством $k_2/k_1 h_*^2 = 1/12$.

На частоте возникновения “обратной” волны скорость переноса волновой энергии обращается в нуль и происходит принципиальная перестройка поля вектора плотности потока энергии.

Плотность волновой энергии связана с плотностью переносимого квазигармонической волной импульса посредством фазовой скорости.

Компоненты тензора плотности потока волнового импульса и плотности переносимого волной импульса связаны посредством групповой скорости.

Работа выполнялась в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2021–2023 гг. по теме № 0030-2021-0025.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. Болотина В.В. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
2. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. № 3. С. 287–300.
3. Mindlin R.D. Influence of rotator inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1951. V. 18. № 1. P. 31–38.
4. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Госстройиздат, 1954. 56 с.
5. Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижиков С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Кустов А.Н. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Изд-во Академии естествознания, 2008. URL: <https://www.monographies.ru/ru/book/view?id=14>.
6. Иванченко И.И. Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. М.: Наука, 2011. 574 с.
7. Winkler E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prague, 1867.
8. Meitzler A.H. Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates // J. Acoust. Soc. Am. 1965. V. 38. № 5. P. 835–842.
9. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэля и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
10. Меркулов Л.Г., Рохлин С.И. Дифракция волн Лэмба в пластине на полубесконечном разрезе // Дефектоскопия. 1969. № 4. С. 24–36.
11. Бурлий П.В., Кучеров И.Я. Обратные упругие волны в пластинах // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. № 9. С. 644–647.
12. Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я. Обратные упругие волны в изотропных пластинах // Журн. техн. физ. 1981. Т. 51. № 10. С. 2196–2198.
13. Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я. О возможности существования поперечных обратных волн в

- пластинах // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. № 9. С. 568–571.
14. *Абрамова О.П., Сторожев В.И., Шпак В.А.* Дисперсия нормальных волн в ортотропном слое с закрепленными границами // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 1. С. 5–9.
 15. *Бурлий П.В., Ильин П.П., Кучеров И.Я.* Обратные поперечные акустические волны в пластинах кубических кристаллов // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 3. С. 310–314.
 16. *Toda K., Motegi K.* Propagation characteristics of leaky Lamb waves in a liquid-loaded double-layered substrate consisting of a thin piezoelectric ceramic plate and thin glass plate // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 105. № 6. P. 3290–3294. <https://doi.org/10.1121/1.424657>
 17. *Быркин В.М., Дюдин Б.В., Лепендин Л.Л.* Обратная симметричная волна Лэмба первого порядка // Письма в ЖТФ. 1978. Т. 4. Вып. 13. С. 781–785.
 18. *Rokhlin S.* Interaction of Lamb waves with elongated delaminations in thin sheets // Int. Advances in Nondest. Test. 1979. V. 6. P. 263–285.
 19. *Кучеров И.Я., Маляренко Е.В.* Потoki энергии обратных и прямых нормальных поперечных акустических волн в пьезоэлектрических пластинах // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 4. С. 492–497.
 20. *Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Царев И.С.* Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущейся нагрузкой // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. № 2. С. 193–209. <https://doi.org/10.31857/S0032823521020041>
 21. *Большаков А.А.* Прямоугольная пластина на двухпараметрическом упругом основании: аналитическое решение // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2011. Т. 17. № 8. С. 128–133.
 22. *Высоковский Д.А., Русакова Е.Б.* Устойчивость плиты Э. Рейснера на упругом невинклировом основании // Инженерный вестник Дона. 2017. № 2(45). С. 10. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4250
 23. *Козел А.Г., Старовойтов Э.И.* Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака // Механика композиционных материалов и конструкций. 2018. Т. 24. № 3. С. 392–406. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2018.24.03.392_406.06
 24. *Feng Q., Fu Sh., Wang Ch., Liu W.W.* Analytical solution for fracture problem of slope roof based on Pasternak foundation model // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2019. V. 56. № 2. P. 142–150.
 25. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
 26. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М.: Физматлит, 2003. 536 с.
 27. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005. 656 с.
 28. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
 29. *Tolstoy I., Usdin E.* Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29. № 1. P. 37–42.
 30. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
 31. *Шевченко В.В.* Прямые и обратные волны: три определения, их взаимосвязь и условия применимости // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177. № 3. С. 301–306. <https://doi.org/10.3367/UFN.0177.200703c.0301>
 32. *Lamb H.* On group velocity // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1904. V. 1. № 849. P. 473–479.
 33. *Ляпунов В.Т., Никифоров А.С.* Виброизоляция в судовых конструкциях. Л.: Судостроение, 1975. 232 с.
 34. *Метрикин А.В.* Неустойчивость поперечных колебаний объекта, равномерно движущегося вдоль упругой направляющей как следствие аномального эффекта Доплера // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 1. С. 99–103.
 35. *Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г.* Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 1. С. 3–8.
 36. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. Доп. главы. М.: Наука, 1975. 414 с.
 37. *Гапонов-Грехов А.В., Долина И.С., Островский Л.А.* Аномальный эффект Доплера и радиационная неустойчивость движения осциллятора в гидродинамике // Доклады АН СССР. 1983. Т. 268. № 4. С. 827–831.
 38. *Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В.* Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. Saarbrücken, Germany. LAP Lambert Academic Publishing, 2014. 208 с.
 39. *Руденко О.В., Гусев В.А.* Движущийся объект: спектры сигналов пассивной, активной локации и переходное излучение // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 6. С. 599–609. <https://doi.org/10.31857/S032079192006009X>
 40. *Руденко О.В., Маков Ю.Н.* Звуковой удар: от физики нелинейных волн до акустической экологии (обзор) // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 3–30. <https://doi.org/10.31857/S0320791921010032>
 41. *Veshev V.A., Kouzov D.P., Mirolybova N.A.* On opposite directions of the energy's flux of normal wave propagation in thin-wall waveguide // Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем: Тр. XXIV летней школы-семинара. СПб: Изд-во ИПМаш РАН. 1997. С. 71–78.
 42. *Кouzov Д.П., Миролобова Н.А.* Локальные потоки энергии вынужденных колебаний тонкой упругой полосы // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 4. С. 397–404. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.4.47>
 43. *Вешев В.А., Коузov Д.П., Миролобова Н.А.* Потoki энергии и дисперсия нормальных волн изгибного типа в балке крестообразного профиля // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 3. С. 331–336.