

УДК 533.6,532.5,534.2

## ЛОКАЛЬНЫЙ МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ЗВУКОВЫХ И ПСЕВДОЗВУКОВЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ

© 2023 г. О. П. Бычков<sup>а</sup>, Г. А. Фараносов<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup>ФАУ ЦАГИ, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ, Москва, Россия

\*e-mail: georgefalt@rambler.ru

Поступила в редакцию 19.04.2023 г.

После доработки 23.05.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

Предложен новый способ разделения звуковых и псевдозвуковых пульсаций давления, основанный на анализе сигналов в паре близкорасположенных точек, так что общий размер измерительной зоны много меньше масштаба корреляции псевдозвуковых возмущений. Предполагается, что гидродинамические пульсации распространяются со скоростью, существенно меньшей скорости звука, и подчиняются модели “вмороженных” возмущений, что позволяет в режиме реального времени или при постобработке данных преобразовать пространственную производную сигнала во временную, которая после интегрирования по времени дает оценку псевдозвуковых возмущений в точке измерения. Представлены теоретическая модель предложенного подхода, результаты тестов на модельных примерах и данные численного моделирования.

*Ключевые слова:* звуковые пульсации, псевдозвуковые пульсации, фильтрация сигнала

**DOI:** 10.31857/S0320791923600452, **EDN:** ZUYETE

### ВВЕДЕНИЕ

В прикладных задачах гидро- и аэроакустики часто возникает проблема разделения звуковых (акустических) и псевдозвуковых (гидродинамических) пульсаций давления, часто одновременно присутствующих в турбулентных течениях [1–5]. Под акустическими пульсациями понимаются линейные возмущения, распространяющиеся в среде со скоростью звука, под псевдозвуковыми — линейные или нелинейные возмущения, распространяющиеся со скоростью порядка скорости основного потока, которая для дозвуковых течений может быть существенно ниже скорости звука. Большой опыт в задачах подобного рода накоплен применительно к проблеме выделения пристенных пульсаций в турбулентном пограничном слое на фоне акустических помех [5–10]. Похожая проблема возникает в исследованиях шума обтекания планера самолета при акустических измерениях модели в аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью микрофонами, расположенными на стенке трубы. В этом случае уже акустический сигнал является полезным, а пульсации пограничного слоя на стенке трубы — помехой [3, 5].

Обычный микрофон или поверхностный датчик давления измеряет лишь суммарные пульсации (искажая при этом каждую их компоненту в соответствии с собственными характеристиками), и

для разделения акустической и псевдозвуковой составляющих приходится прибегать к специальным методам измерений и обработки сигналов [5–9]. Наиболее надежным способом является применение частотно-волновой фильтрации, которая в общем случае требует использования систем, протяженность которых сравнима с длинами волн низкочастотных акустических возмущений, что делает практическую реализацию такого подхода затруднительной [5]. Практически реализуемые способы, как правило, основаны на существенном различии масштабов корреляции псевдозвуковых и звуковых возмущений в медленных течениях, поскольку первые обычно существенно меньше последних [2, 3, 6, 8, 9]. Это позволяет для измерения псевдозвуковой составляющей использовать так называемый эффект пространственной фильтрации. При использовании специальных датчиков или систем датчиков, линейные размеры которых превышают масштаб корреляции псевдозвуковых возмущений, оказывается возможным оценить вклад звуковой компоненты пульсаций за счет взаимного сокращения некогерентных псевдозвуковых возмущений, после чего вычитанием ее из суммарного спектра сигнала на одиночном малоразмерном датчике определить характеристики псевдозвуковой составляющей [8, 9]. В этом случае размер измерительной системы все еще много меньше масштаба

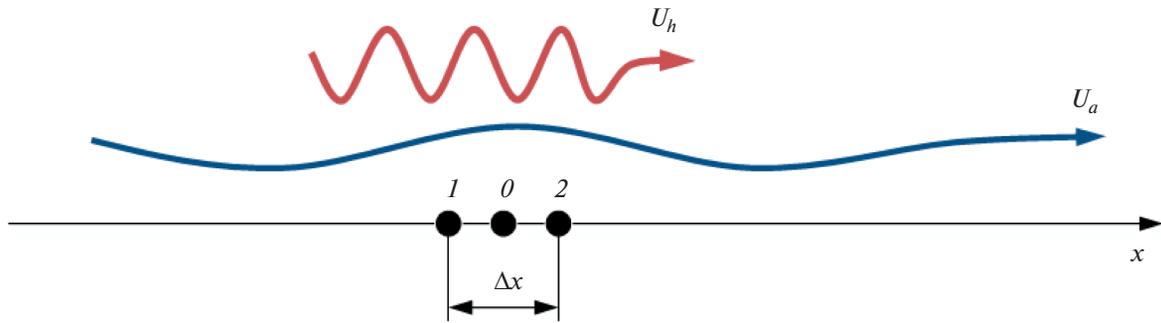


Рис. 1. Геометрия задачи и схема расстановки датчиков давления.

корреляции акустических пульсаций, а значит, она остается достаточно компактной.

Однако использование подобного подхода становится затруднительным, когда поле пульсаций существенно неоднородно и/или когда масштаб корреляции псевдозвуковых возмущений сравним с масштабом корреляции акустических возмущений [11]. Оба этих фактора имеют место, например, в поле пульсаций вблизи границы дозвуковой турбулентной струи, где присутствуют акустические возмущения, связанные с шумом, излучаемым струей, и псевдозвуковые возмущения, связанные с крупномасштабными когерентными структурами — волнами неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [11–13]. При исследовании процессов шумообразования в турбулентных струях возможность разделения акустических и гидродинамических возмущений в ближнем поле важна с точки зрения идентификации механизмов генерации шума [14–18], причем обычно применяется стандартный метод частотно-волновой фильтрации с использованием протяженных линейных массивов датчиков [14, 15, 17]. В последнее время развиваются также методы, основанные на использовании вэйвлет-преобразования, параметры которого эмпирически настраиваются на фильтрацию желаемой составляющей сигнала, что позволяет существенно сократить размер измерительной системы [17, 18]. Описанные выше способы требуют использования протяженных измерительных систем и/или специальной постобработки измеренных данных и не подходят для применения, например, в системах активного управления волнами неустойчивости [19–22], где требуется определение целевого сигнала в реальном времени, при этом акустическая часть сигнала может являться помехой для системы управления.

В настоящей работе предложен новый способ разделения звуковых и псевдозвуковых пульсаций давления, основанный на различии их свойств при измерении в паре близкорасположенных точек. Предложенный способ может быть реализован в виде компактной измерительной системы

как в режиме реального времени, так и в режиме постобработки измеренных данных.

В разделе 1 описана идея метода, в разделе 2 приведены результаты теоретического анализа алгоритма и результаты его тестов на модельном примере, а в разделе 3 — на данных численного моделирования. В Заключение сформулированы основные результаты работы.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Пусть имеется дозвуковое течение с ярко выраженным конвективным переносом гидродинамических возмущений в некотором направлении  $x$  (рис. 1). Пусть в среде существуют также акустические возмущения, вызванные внешними источниками или самим течением. Параметры, соответствующие гидродинамическим или акустическим возмущениям, будем отмечать индексами  $h$  и  $a$  соответственно.

Пусть в точках 1 и 2 на оси  $x$  расположена пара “точечных” датчиков давления (рис. 1), регистрирующих соответственно сигналы  $s(x_1, t)$  и  $s(x_2, t)$ , в которых содержится акустическая ( $a$ ) и гидродинамическая ( $h$ ) составляющие, так что

$$\begin{aligned} s(x_1, t) &= a(x_1, t) + h(x_1, t), \\ s(x_2, t) &= a(x_2, t) + h(x_2, t). \end{aligned}$$

Рассматриваемые датчики смещены друг относительно друга на расстояние  $\Delta x = x_2 - x_1$ , которое будем предполагать малым по сравнению с масштабом корреляции акустических возмущений  $l_a$ , имеющим порядок длины звуковой волны:  $\Delta x \ll l_a \sim \lambda_a$ . Предположим также, что скорость конвекции  $U_h$  гидродинамических возмущений мала по сравнению с фазовой скоростью переноса акустических возмущений,  $U_h \ll U_a$  (при этом обычно  $U_a > c$  [13], где  $c$  — скорость звука). Это означает, что длины волн гидродинамических возмущений  $\lambda_h$  при заданной частоте малы по сравнению с акустическими длинами волн,  $\lambda_h \ll \lambda_a$ . Тогда в главном приближении ампли-

трудно-фазовым различием акустического сигнала на датчиках 1 и 2 можно пренебречь и считать, что  $a(x_1, t) \approx a(x_2, t)$ . Основное различие сигналов в точках 1 и 2 будет связано с гидродинамической составляющей сигнала

$$s(x_2, t) - s(x_1, t) \approx h(x_2, t) - h(x_1, t). \quad (1)$$

Последнее соображение о взаимной компенсации акустической компоненты при вычитании сигналов в близкорасположенных точках, по-видимому, было впервые высказано в работе [6] и носит название метода антикорреляции [2]. Однако, в отличие от работы [6], мы не предполагаем, что масштабы корреляции гидродинамических ( $l_h$ ) и акустических пульсаций и величина смещения датчиков находятся в соотношении  $l_h \ll \Delta x \ll l_a$ . Напротив, положим, что величина  $\Delta x$  существенно меньше характерного масштаба корреляции обоих типов пульсаций,  $\Delta x \ll l_h, l_a$ , тогда можно считать, что выполняется гипотеза Тэйлора о “вмороженных” возмущениях [23], согласно которой поле пульсаций переносится со скоростью  $U_h$ , оставаясь неизменным, т.е.  $h(x, t) \approx h(x - U_h t)$ . Отсюда, используя (1), получим следующую оценку

$$\begin{aligned} s(x_2, t) - s(x_1, t) &\approx \\ &\approx h(x_2 - U_h t) - h(x_1 - U_h t) \approx -\frac{dh \Delta x}{dt U_h}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подобный подход использовался, например, в работе [24] для восстановления пространственной производной поля пульсаций по их временной производной. Здесь же предлагается, наоборот, оценивать временную производную сигнала по пространственной, считая, что при вычислении последней акустическая составляющая взаимно сокращается.

Соотношение (2) можно использовать для восстановления временной реализации сигнала (с точностью до постоянной) в окрестности точек  $x_1$  и  $x_2$  путем интегрирования его производной:

$$h(x_0, t) \approx \int_0^t \frac{s(x_1, t) - s(x_2, t)}{\Delta x} U_h dt + C, \quad (3)$$

где  $x_0$  – координата точки  $\theta$ , лежащей вблизи точек 1 и 2 (рис. 1),  $C$  – значение  $h$  в момент начала интегрирования. Значение  $C$ , вообще говоря, неизвестно, однако поскольку оно не влияет на спектр пульсаций, без потери общности можно положить  $C = 0$ . Отметим, что в данном методе имеет место неопределенность координаты порядка  $\Delta x$ , которая приводит к ограничению его работоспособности сверху по частотам.

После нахождения указанным образом гидродинамической части пульсаций акустическая со-

ставляющая может быть оценена как  $a = s - h$ . Процедура, описываемая выражением (3), является локальной в том смысле, что характерный размер измерительной системы мал ( $\Delta x \ll l_h, l_a$ ), и, кроме того, она может быть реализована в реальном времени, а значит, в целом пригодна для задач активного управления.

## 2. АНАЛИЗ И ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА НА МОДЕЛЬНЫХ ПРИМЕРАХ

Рассмотрим некоторые особенности практической реализации предложенного метода и связанные с этим ограничения. В реальных системах сигнал  $s$ , измеренный в точке  $x$ , представляется как последовательность отсчетов  $\{s_n(x)\}$  с некоторой частотой дискретизации  $f_s = 1/\Delta t$ , индекс  $n$  соответствует номеру отсчета. В дискретном представлении предложенная процедура (3) является линейным рекурсивным фильтром [25] и принимает вид

$$y_n = y_{n-1} + \frac{s_n(x_1) - s_n(x_2)}{N_h}, \quad (4)$$

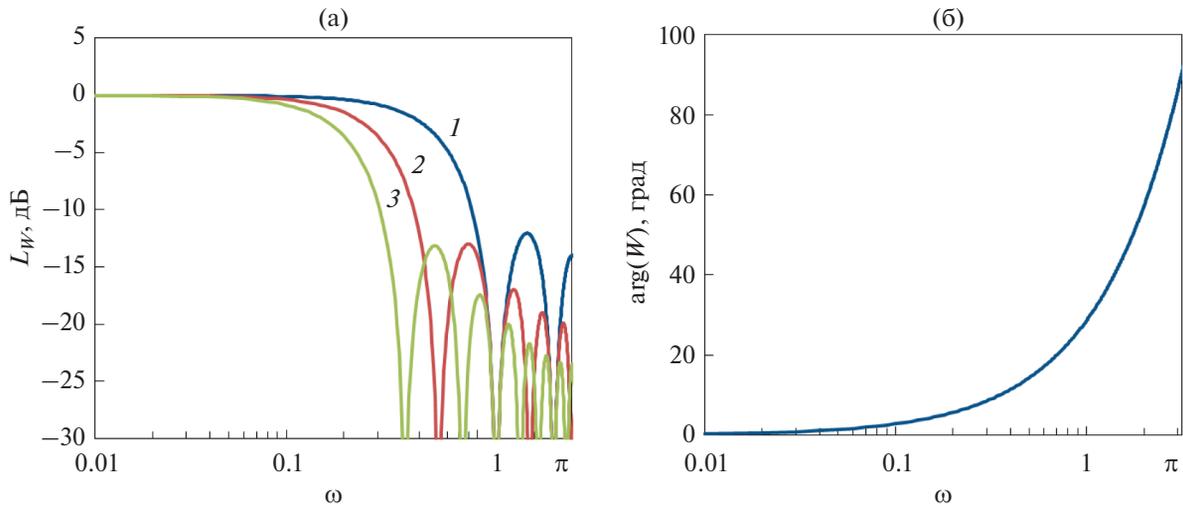
где  $y_n$  – отсчеты выходного сигнала фильтра, а число  $N_h$  характеризует временную задержку  $t_{del} = \Delta x/U_h \approx N_h \Delta t$  между гидродинамическими пульсациями в точках 1 и 2. Исходя из приведенных выше соображений, можно ожидать, что последовательность  $y_n$  будет в некотором смысле близка к гидродинамической составляющей  $h_n$  сигнала  $s_n$ . Если акустическая компонента отсутствует ( $s_n = h_n$ ), т.е. сигнал  $s_n$  представляет собой конвектирующее со скоростью  $U_h$  поле, то его зависимость от  $x$  выражается в простом смещении сигнала по времени сообразно гидродинамической задержке. Тогда для точки  $\theta$ , равноудаленной от точек 1 и 2 (рис. 1), (4) сводится к выражению

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h_{n+N_h/2} - h_{n-N_h/2}}{N_h}. \quad (5)$$

Несложно также показать, что в этом случае частотная передаточная функция  $W(\omega)$  фильтра (5) имеет вид

$$W(\omega) = e^{i\omega} \frac{\sin\left(\frac{\omega N_h}{2}\right)}{N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \quad (6)$$

где  $\omega = 2\pi f/f_s$  – безразмерная круговая частота, выраженная через циклическую частоту  $f$  и частоту дискретизации  $f_s$ . Из рассмотрения передаточной функции  $W(\omega)$  становится ясен характер описанной процедуры, которая, по существу, является фильтром нижних частот для входного сигнала ти-



**Рис. 2.** Расчетные характеристики фильтра (4). (а) – Амплитудно-частотная характеристика ( $20 \lg |W|$ ) при различных параметрах задержки: 1 –  $N_h = 5$ ; 2 – 10, 3 – 15; (б) – фазово-частотная характеристика ( $\arg(W)$ ).

па  $h_n$ . В случае расположения точки  $\theta$  несимметрично относительно точек 1 и 2, в (6) появится фазовый множитель вида  $\exp(i\omega(N_1 - N_h/2))$ , где  $N_1$  – задержка сигнала между точками 1 и  $\theta$ . Таким образом, наименьшее фазовое искажение достигается при  $N_1 = N_h/2$ , т.е. при  $x_0 = (x_1 + x_2)/2$ .

Для лабораторных параметров при исследовании дозвуковых струй [11] типичные значения, которые обычно реализуются или могут быть реализованы в эксперименте, можно оценить как  $f_s \sim 10^5$  Гц,  $U_h \sim 10^1 \dots 10^2$  м/с,  $\Delta x \sim 10^{-2}$  м, тогда  $N_h \sim 10$  – типичное число отсчетов сигнала, характеризующее его задержку при конвекции от точки 1 к точке 2. На рис. 2 показаны амплитудно- и фазово-частотные характеристики фильтра (6) для нескольких значений  $N_h$  при  $f_s = 10^5$  Гц и  $x_0 = (x_1 + x_2)/2$ . Амплитудная характеристика показана в логарифмическом масштабе  $L_W = 20 \lg |W|$ . Видно, что частота среза фильтра увеличивается при уменьшении задержки, кроме того, при  $x_0 = (x_1 + x_2)/2$  фазовая характеристика не зависит от задержки и имеет приемлемые значения (с искажением фазы исходного сигнала в пределах  $20^\circ - 30^\circ$ ) до частоты  $\omega \approx 1$ .

Далее оценим явным образом влияние акустической компоненты на результат операции (4). Если  $s_n = h_n + a_n$ , где сигнал  $a_n$  представляет собой конвективно перемещающееся со скоростью  $U_a$  поле и является некоррелированным с сигналом  $h_n$ , то выражение (4) сводится к

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h_{n+N_h/2} - h_{n-N_h/2}}{N_h} + \frac{a_{n+N_a/2} - a_{n-N_a/2}}{N_h}, \quad (7)$$

где  $N_a$  характеризует временную задержку  $t_{del} = \Delta x / U_a \approx N_a \Delta t$  между акустическими пульсациями в точках 1 и 2. Из выражения (7) следует, что квадрат соответствующей амплитудно-частотной передаточной функции  $W$ , после осреднения по набору реализаций сигналов  $a_n$  и  $h_n$  (для учета их некоррелированности), будет определяться выражением

$$\overline{|W|^2} = \frac{1}{\left(N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2} \times \left( \frac{\overline{|H|^2}}{\overline{|S|^2}} \sin^2\left(\frac{\omega N_h}{2}\right) + \frac{\overline{|A|^2}}{\overline{|S|^2}} \sin^2\left(\frac{\omega N_a}{2}\right) \right), \quad (8)$$

в котором  $\overline{|S|^2}$ ,  $\overline{|H|^2}$  и  $\overline{|A|^2}$  – спектры мощности полного сигнала и его гидродинамической и акустической компонент соответственно. Отметим, что выражение (7) получено из более общих рассуждений, чем выражение (1), без предположения о пренебрежимо малой величине разности акустических компонент. Ослабление акустической компоненты в рамках рассматриваемого алгоритма возникает после трансформации пространственной производной во временную и последующего интегрирования по времени. Из (8) ясно видно, что предложенный алгоритм выделяет гидродинамические пульсации тем точнее, чем меньше второе слагаемое в скобках по сравнению с первым – в этом случае он сводится к рассмотренным выше выражениям (5)–(6). Возможность отбрасывания второго слагаемого в (8) для умеренных значений  $\omega$ ,  $N_a$  и  $N_h$  приближенно определяется выполнением неравенства

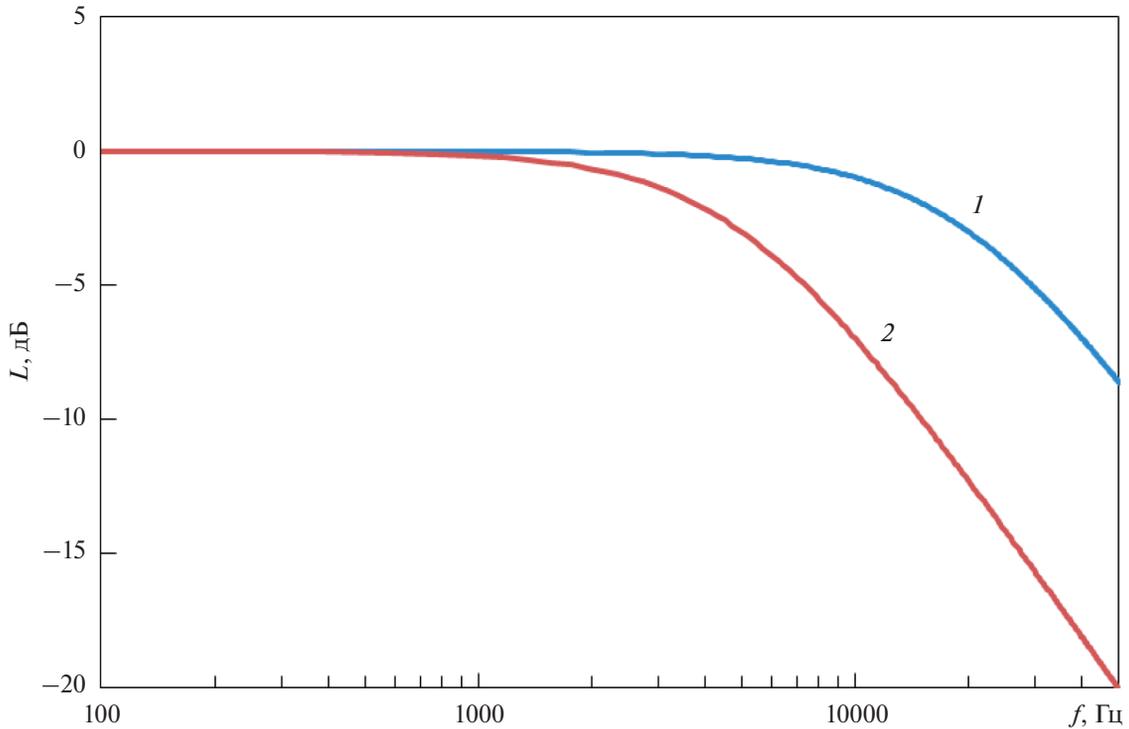


Рис. 3. Модельные спектральные функции в логарифмическом масштабе: 1 –  $F_a$ ; 2 –  $F_h$ .

$\overline{|A|^2}/\overline{|H|^2} \ll (N_h/N_a)^2 = (U_a/U_h)^2$ , т.е. связано с соотношением фазовых скоростей возмущений: чем больше различаются скорости, тем больше динамический диапазон алгоритма. Отметим также, что в области доминирования акустических возмущений (8) сведется к выражению

$$\overline{|W|^2} \approx \frac{\sin^2\left(\frac{\omega N_a}{2}\right)}{\left(N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}, \quad (9)$$

которое отражает искажение акустической компоненты сигнала рассматриваемым фильтром.

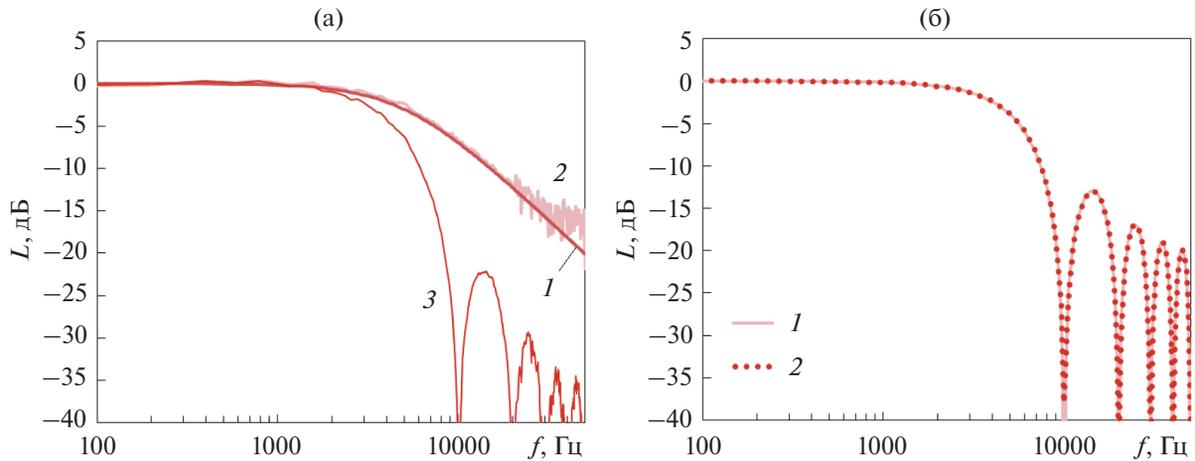
Для первичной проверки работы алгоритма было сгенерировано два типа тестовых псевдослучайных сигналов, моделирующих сносящиеся вдоль оси  $x$  возмущения, в виде суперпозиции конечного числа гармоник со случайными фазами:

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^M \sqrt{F_h(i\Delta f)} \times \cos(2\pi i \Delta f ((n-1)/f_s - x/U_h) + \psi_i), \quad (10)$$

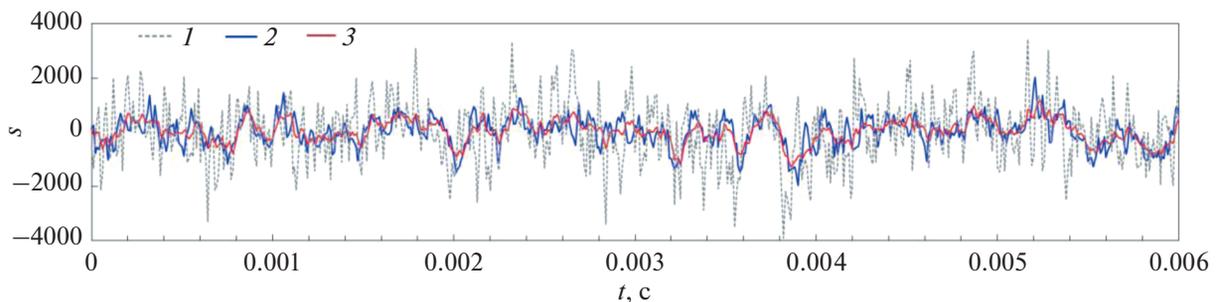
$$a_n(x) = \sum_{i=1}^M \sqrt{F_a(i\Delta f)} \times \cos(2\pi i \Delta f ((n-1)/f_s - x/U_a) + \varphi_i), \quad (11)$$

где  $\Delta f = 80$  Гц,  $f_s = 10^5$  Гц,  $U_h = 100$  м/с,  $U_a = 500$  м/с,  $M = 10^4$ ,  $\psi_i$  и  $\varphi_i$  – случайные фазы гармоник, а распределение амплитуд гармоник по частотам задается функциями  $F_h(f) = \left(1 + (f/f_h)^2\right)^{-1}$  и  $F_a(f) = \left(1 + (f/f_a)^2\right)^{-1}$  с частотами среза  $f_h = 5$  кГц и  $f_a = 20$  кГц соответственно (рис. 3). Последовательность (10) моделирует одномерное поле гидродинамических пульсаций, а последовательность (11) – акустических. В данном примере предполагается, что на низких частотах интенсивности пульсаций одинаковы, а на высоких – доминируют акустические пульсации. Качественно эта простейшая модель соответствует ситуации, которую можно наблюдать в некоторых точках ближнего поля струи.

На рис. 4 показан результат применения операции (4) к сигналу (10) в отсутствие акустической компоненты пульсаций ( $s_n = h_n$ ). Амплитудно-частотную передаточную функцию фильтра (4) можно найти как модуль отношения спектров выходного  $Y(\omega)$  и входного  $S(\omega)$  сигналов:  $L_Y = 20 \lg |Y/S|$ , при этом она совпадает с вычисленной теоретически функцией (6), как показано на рис. 4б, поскольку входной сигнал полностью соответствует заложенной в вычисление (6) модели.



**Рис. 4.** Результат восстановления спектра сигнала  $h$  с помощью алгоритма (4): (а) – 1 – исходный модельный спектр  $F_h$ , 2 – спектр реализации сигнала (10), 3 – спектр сигнала (10), прошедшего преобразование (4); (б) – 1 – амплитудно-частотная передаточная функция, полученная в модельном примере, 2 – рассчитанная в соответствии с (6).



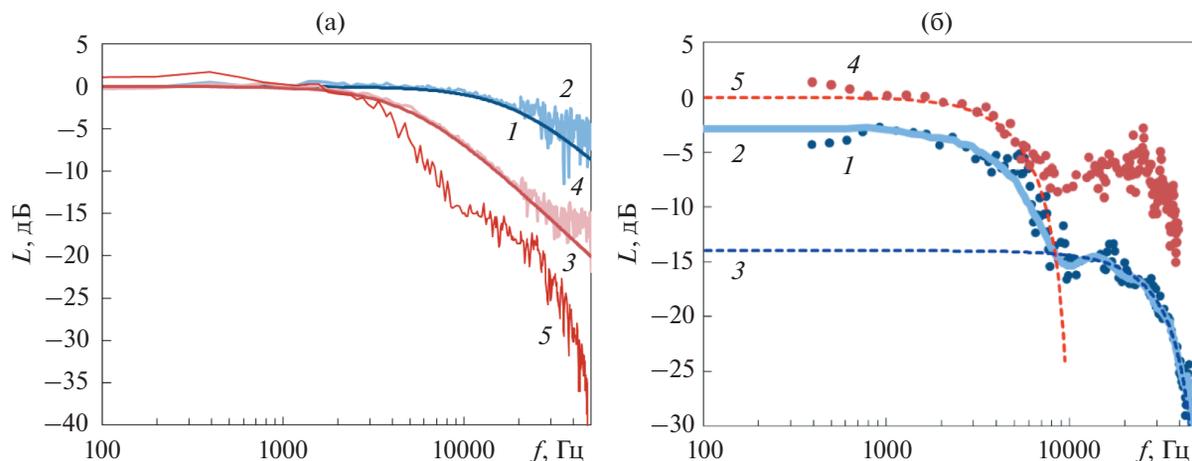
**Рис. 5.** Временные реализации сигналов: 1 – суммарный; 2 – исходная гидродинамическая компонента; 3 – гидродинамическая компонента, восстановленная с помощью предлагаемого метода.

Рассмотрим далее более реалистичный входной сигнал в виде суммы (10) и (11):  $s_n = h_n + a_n$ . На рис. 5 показаны временные реализации суммарного сигнала и его гидродинамической компоненты: исходной и восстановленной с помощью описанной в работе процедуры. Видно, что восстановленный сигнал повторяет в целом исходный, за исключением высокочастотных составляющих, что связано с обсуждавшимися выше особенностями алгоритма.

Количественный анализ качества восстановления гидродинамической компоненты приведен на рис. 6. На рис. 6а показаны модельные спектральные функции, а также спектры  $H$  и  $A$  конкретных реализаций случайных сигналов для гидродинамической и акустической компонент соответственно. Там же приведен спектр  $Y$  сигнала  $u_n$ , получающегося на выходе фильтра (4). Как видно, в области низких частот спектры  $Y$  и  $H$  совпадают с точностью около 1 дБ, частота среза при этом для рассмотренных в примере параметров составляет около 4 кГц и соответствует частоте

среза функции (6). Тот факт, что в модельном примере заранее известны обе компоненты сигнала, позволяет оценить фактические и расчетные передаточные функции для предложенного метода их разделения.

На рис. 6б показана передаточная функция рассматриваемого фильтра, рассчитанная на основании спектров входного и выходного сигналов  $L_Y = 20 \lg|Y/S|$ . Там же приведена ее теоретическая оценка, полученная на основании выражения (8), которая хорошо совпадает с  $L_Y$ . Видно, что на высоких частотах, где доминируют акустические возмущения, передаточная функция выходит на предел, соответствующий выражению (9). На рис. 6б показана также передаточная функция гидродинамической компоненты сигнала  $L_H = 20 \lg|Y/H|$  и видно, что ее низкочастотная часть совпадает с теоретической оценкой (6), как это и должно быть – именно в этой области частот осуществляется корректное восстановление гидродинамической составляющей сигнала.



**Рис. 6.** Результат выделения спектра сигнала  $h$  из суммы  $s = h + a$  с помощью выражения (4). (а) – 1 – исходный модельный спектр  $F_a$  акустической компоненты, 2 – спектр  $A$  реализации сигнала (11), 3 – исходный модельный спектр  $F_h$  гидродинамической компоненты, 4 – спектр  $H$  реализации сигнала (10), 5 – спектр  $Y$  сигнала  $s$ , прошедшего преобразование (4); (б) – 1 – передаточная функция  $L_Y$ , 2 – оценка  $L_Y$  на основании (8), 3 – высокочастотная асимптотика (9), 4 – передаточная функция  $L_H$ , 5 – оценка  $L_H$  на основании (6).

Таким образом, теоретически и на модельных примерах показано, что предложенный алгоритм позволяет восстанавливать гидродинамическую составляющую сигнала в области умеренных частот. При этом алгоритм работает тем точнее, чем больше различаются фазовые скорости акустических и гидродинамических возмущений.

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА К АНАЛИЗУ ДАННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Тестирование предложенного метода для реалистичных полей пульсаций проводилось с использованием данных вычислительного эксперимента, в котором было выполнено численное моделирование дозвуковой турбулентной струи методом крупных вихрей (LES), реализованным на базе схемы КАБАРЕ [26, 27]. Рассматривалась струя, истекающая из круглого профилированного сопла диаметром  $D = 0.04$  м/с со скоростью  $V_j = 180$  м/с. Струя с такими параметрами исследовалась экспериментально в работах [11, 13]. В настоящей работе использовалась расчетная сетка объемом 36 млн ячеек, расчетная область имела длину около  $155D$ , ее поперечный размер составлял около  $110D$ . В работах [28, 29] показано, что при данных параметрах результаты расчета указанным методом хорошо соответствуют результатам измерений.

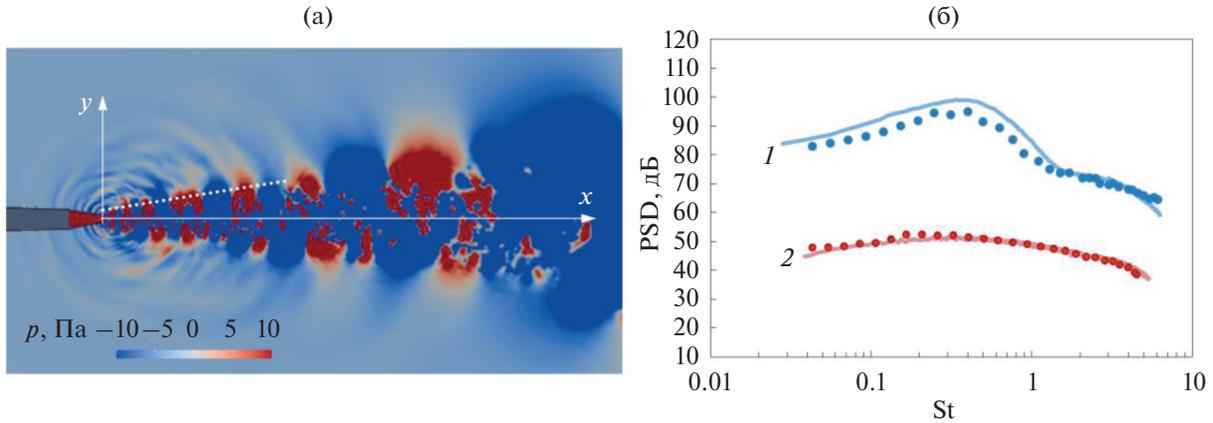
В процессе расчета для целей настоящей работы сохранялись временные истории пульсаций давления на участке образующей конической поверхности  $0 \leq x/D \leq 29$  с начальным радиусом

$r/D \approx 0.81$  и углом полураствора  $9^\circ$  (рис. 7а). Данные сохранялись в точках с шагом  $\Delta x/D = 0.1$  с частотой  $10^5$  Гц. Данная поверхность на начальном участке  $0.5 \leq x/D \leq 7.5$  совпадала с поверхностью, на которой измерялось ближнее поле такой струи в эксперименте в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ [13], что позволило провести прямое сравнение данных физического [11, 13] и численного эксперимента, показавшее их приемлемое соответствие как в ближнем, так и в дальнем поле (рис. 7б) в широком диапазоне частот. Это обосновывает возможность использования результатов вычислительного эксперимента для тестирования предложенного в данной работе метода разделения пульсаций.

Из рис. 7б видно, что спектр пульсаций давления в ближнем поле характеризуется выраженным пиком в области средних частот. Согласно результатам работ [11–14] этот пик соответствует возмущениям от волн неустойчивости, и он тем более выражен в общем спектре сигнала, чем ближе точка наблюдения находится к слою смешения. В области высоких частот спектр сигнала становится более пологим и соответствует акустическим возмущениям (в этой области частот спектры ближнего и дальнего поля подобны друг другу).

Оценим сначала общую структуру ближнего поля на рассматриваемой линии с помощью частотно-волновой фильтрации. Для заданного на указанной линии одномерного среза поля давления  $p(x, t)$  вычислялся частотно-волновой спектр

$$P(k, \omega) = \iint p(x, t) e^{i\omega t + ikx} dt dx.$$



**Рис. 7.** (а) – Мгновенное поле давления турбулентной струи, полученное в численном моделировании, пунктиром показана образующая конической поверхности, на которой сохранялись пульсации давления; (б) – сравнение измеренных в эксперименте (линии) и полученных в расчете (точки) спектров пульсаций давления в ближнем поле (1) в точке  $x/D = 1.5, y/D = 1$  и в дальнем поле (2) в точке  $x/D = 1.5, y/D = 20$ .

На рис. 8 показана карта спектральной плотности мощности  $|P|^2$  в логарифмическом масштабе с нормировкой на максимум спектра. Волновое число обезразмерено с помощью диаметра сопла, в качестве безразмерной частоты используется число Струхала  $St = fD/U_j$ . На карте отмечены линии звуковой фазовой скорости возмущений  $|U_c| = c$ , которые служат формальной границей между акустическими и гидродинамическими пульсациями. В спектре также явно выделяется направление, соответствующее фазовой скорости  $U_c \approx 0.65U_j$ , с которой преимущественно перемещаются гидродинамические возмущения.

После частотно-волнового разложения в полученном спектре были выделены зоны дозвуковых и сверхзвуковых возмущений (см. рис. 8), от которых было взято обратное преобразование Фурье, что позволило явным образом оценить гидродинамическую  $p_h$  и акустическую  $p_a$  составляющие поля давления:

$$p_h(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{|\omega| < |k|c} P(k, f) e^{-i2\pi f t - ikx} df dk, \quad (12)$$

$$p_a(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{|\omega| \geq |k|c} P(k, f) e^{-i2\pi f t - ikx} df dk. \quad (13)$$

На рис. 9 приведены пространственно-временные карты поля пульсаций давления для исходного сигнала и его гидродинамической и акустической составляющих, полученные с помощью фильтрации (12), (13). Такие карты, в совокупности с частотно-волновым спектром, наглядно демонстрируют структуру пульсаций ближнего поля струи: в области низких частот наблюдается доминирование медленных гидродинамических возмущений, сносящихся вниз по направлению

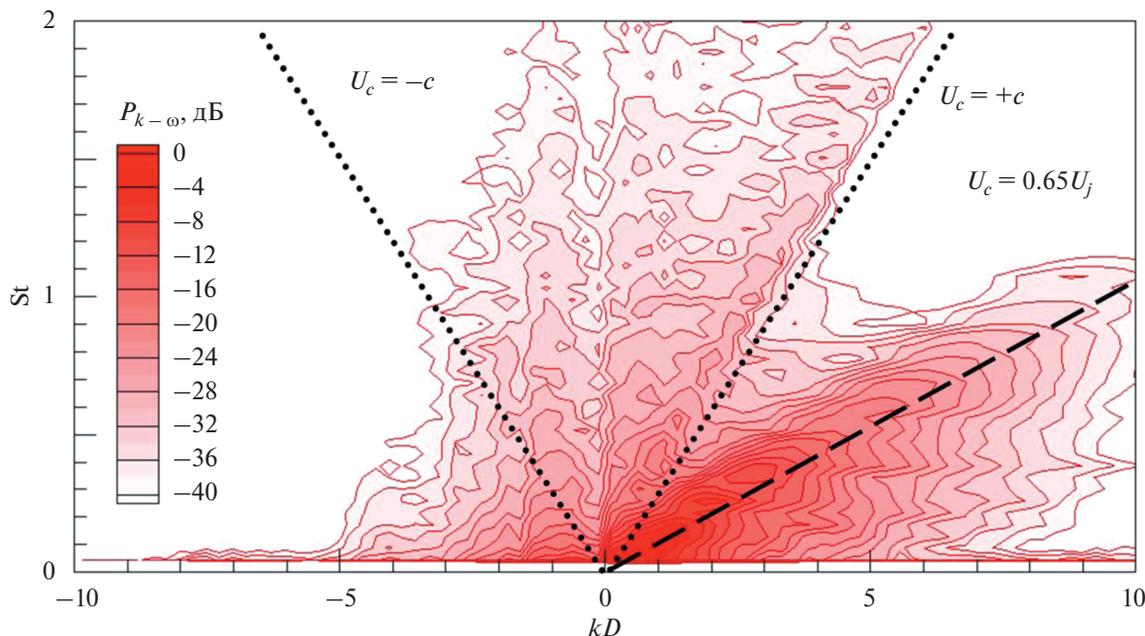
истечения струи, причем их характерный масштаб растет по мере удаления от сопла, а скорость конвекции – убывает. Высокочастотные же возмущения преимущественно являются акустическими – их фазовая скорость на рассматриваемой линии ближнего поля в основном превышает скорость звука, причем пульсации могут распространяться как вверх, так и вниз по направлению истечения струи.

Для дальнейшего анализа рассмотрим точку ближнего поля  $\bar{x}_0 \equiv x_0/D = 1.5, \bar{y}_0 \equiv y_0/D = 1$  (далее будем обозначать эту точку как  $\theta$ , черта сверху означает нормировку на  $D$ ). Область  $x/D \sim y/D \sim 1$  интересна тем, что в ней часто оказываются элементы конструкции самолета (крыло, закрылок, пилон двигателя [30–32]), и задача снижения нагрузок от струи и акустического поля, возникающего при рассеянии гидродинамических возмущений на кромках конструкции, в том числе методами активного управления, является актуальной именно для данной зоны.

Оценим масштабы корреляции акустических и гидродинамических возмущений в области точки  $\theta$ . Для этого вычислялись двухточечные нормированные взаимные спектры между точкой  $\theta$  (взятой за опорную точку) и всеми остальными точками на рассматриваемой линии

$$\gamma(x_0, x_1, f) = \frac{P(x_0, f)P^*(x_1, f)}{|P(x_0, f)||P(x_1, f)|}, \quad (14)$$

где  $P(x_0, f)$  – спектр в точке  $\theta$ ,  $P(x_1, f)$  – спектр в произвольной точке на рассматриваемой линии (координата  $y$  для краткости опущена, т.к. координаты  $x$  достаточно для определения положения точки на линии). Модуль функции  $\gamma$  характеризует когерентность сигналов, а фаза – фазовую ско-



**Рис. 8.** Частотно-волновая карта спектральной плотности мощности в логарифмическом масштабе: построены линии уровня величины  $P_{k-\omega} = 10 \lg(|P|^2/|P|_{\max}^2)$ . Штриховой линии соответствует фазовая скорость  $U_c = 0.65U_j$ , пунктирными линиями – скорость  $|U_c| = c$ .

рость распространения возмущений. Функция  $\gamma$  вычислялась отдельно для гидродинамической и акустической составляющих полного сигнала. На рис. 10 приведены линии уровня модуля функции  $\gamma$  для обеих компонент сигнала, и видно, что их пространственные масштабы корреляции в области средних частот  $St = 0.1 \dots 1.5$  действительно сравнимы друг с другом, что не позволяет использовать для разделения пульсаций стандартный подход, основанный на пространственной фильтрации.

На рис. 11а показан спектр полного сигнала в точке  $\theta$  и спектры его акустической и гидродинамической составляющих, полученные путем частотно-волновой фильтрации. Как видно, в области низких и средних частот доминируют гидродинамические возмущения, в области высоких – акустические. Отметим, что в зоне самых низких частот процедура фильтрации не является вполне точной из-за конечности длины линии, на которой рассматривается поле пульсаций, кроме того, само поле пульсаций является неоднородным по продольной координате, что также может влиять на точность разделения возмущений в данной точке. Тем не менее, именно такой способ обеспечивает наиболее достоверное разделение возмущений, и далее мы будем называть его “эталонным” и использовать для тестирования разработанного “локального” алгоритма.

На рис. 11б приведена оценка фазовой скорости пульсаций  $U_c$ , выполненная по фазе когерентности сигналов в двух точках 1 и 2, расположенных вблизи точки  $\theta$  (для точки 1:  $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - 0.1$ , для точки 2:  $\bar{x}_2 = \bar{x}_0 + 0.1$ ):

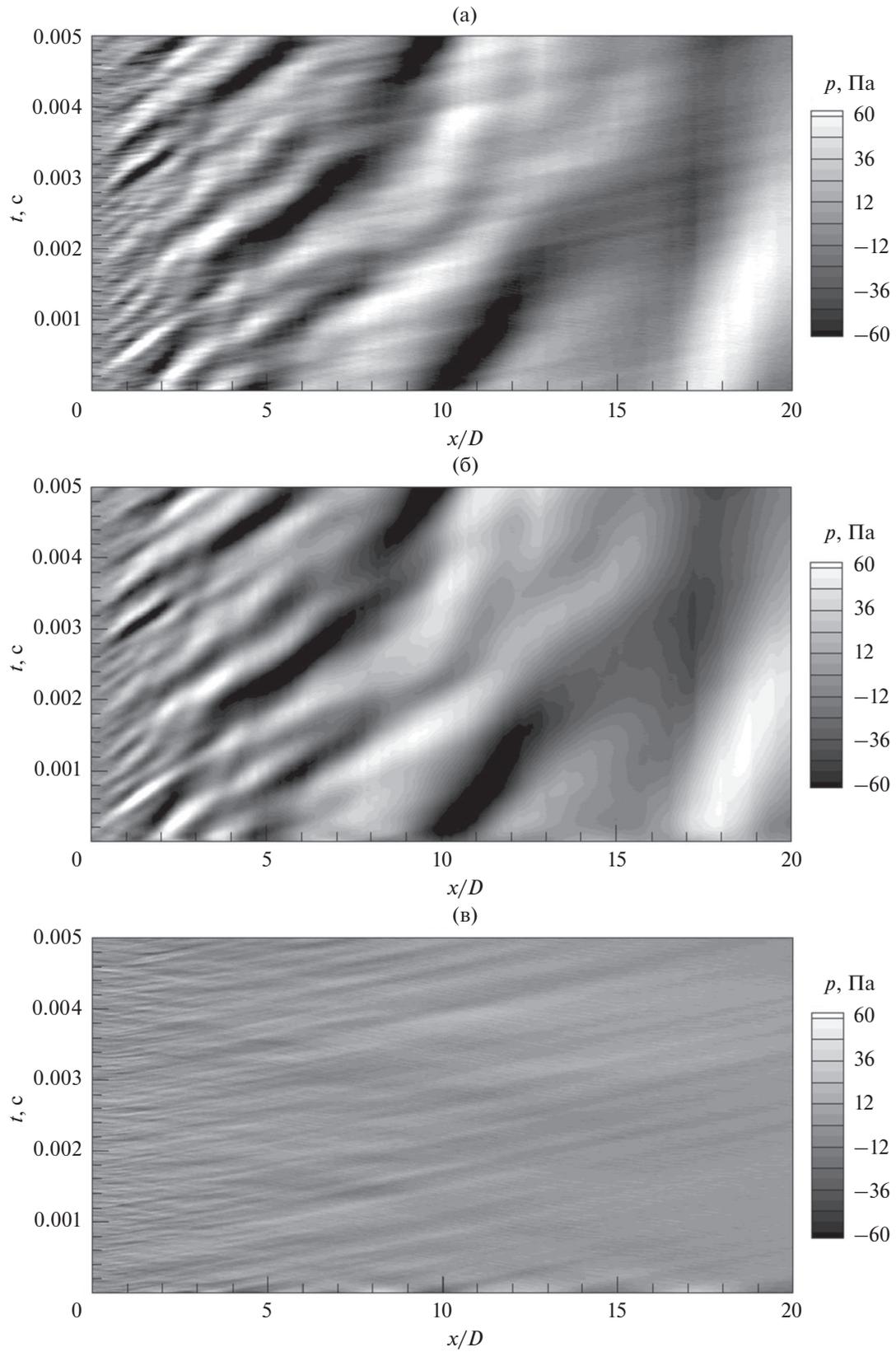
$$U_c(x_0, f) = \frac{2\pi f D(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{\arg[\gamma(x_1, x_2, f)]}. \quad (15)$$

Скорость акустических возмущений, доминирующих на высоких частотах, превышает скорость звука: она составляет 500 м/с и более. Скорость гидродинамических возмущений составляет около  $0.65U_j$  в области максимума их спектра и, вообще говоря, зависит от частоты, т.е. имеет место дисперсия. Эта зависимость может быть приближенно описана формулой

$$U_h(x_0, f) \approx u_0 + (0.65U_j - u_0)(1 - \exp(-(f/f_0)^{1.5})), \quad (16)$$

где  $u_0 = 50$  м/с,  $f_0 = 1.4$  кГц.

В предлагаемом в настоящей работе методе разделения пульсаций их конвективная скорость предполагается не зависящей от частоты – именно это обстоятельство позволяет реализовать процедуру (4) в реальном времени. Выражение (16) позволит оценить, насколько сильно предположение о постоянстве скорости пульсаций влияет на точность их выделения. Учет дисперсии гидродина-



**Рис. 9.** Пространственно-временные карты поля пульсаций давления  $p(x, t)$ : (а) — исходный сигнал; (б) — гидродинамическая составляющая; (в) — акустическая составляющая.

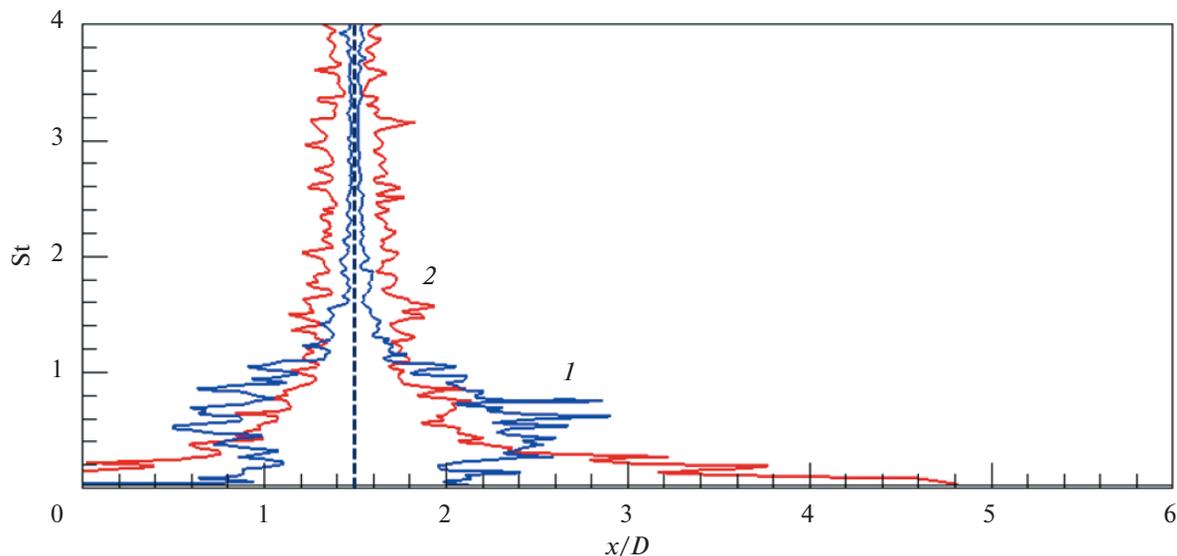


Рис. 10. Линии уровня  $|\gamma| = 0.85$  для 1 – гидродинамической и 2 – акустической компонент сигнала.

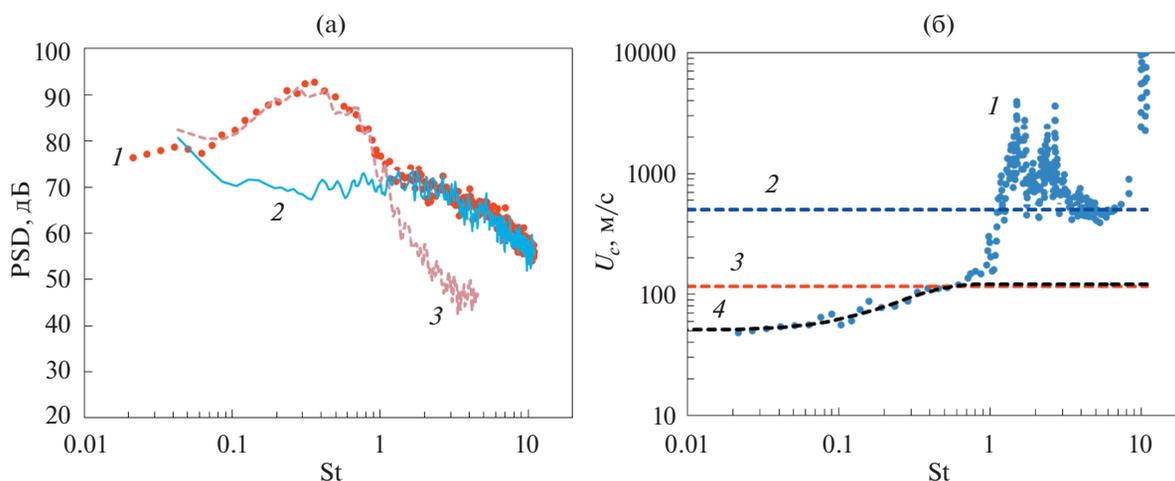


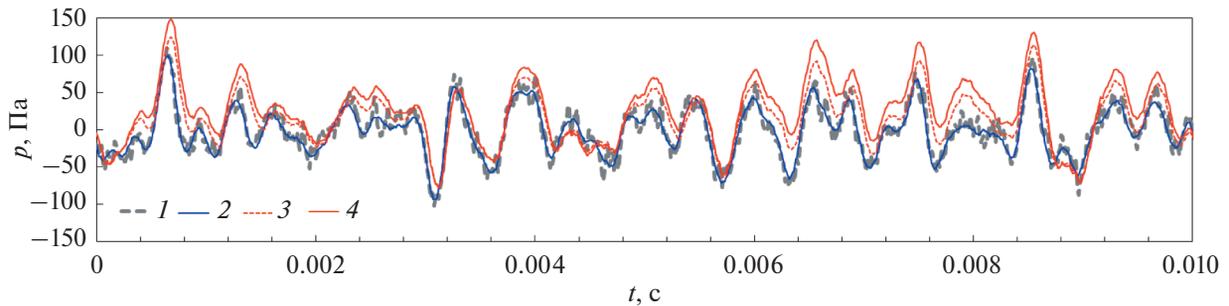
Рис. 11. (а) – Спектры сигнала в точке  $\theta$ : 1 – суммарный спектр, 2 – акустическая компонента, 3 – гидродинамическая компонента; (б) – фазовые скорости возмущений в точке  $\theta$ : 1 – оценка на основании фазы взаимного спектра, 2 – линия  $U_c = 500$  м/с, 3 – линия  $U_c = 0.65U_j \approx 120$  м/с, 4 – оценка скорости гидродинамических возмущений на основе эмпирической зависимости (16).

мических волн может быть реализован при пост-обработке сигналов, если процедуру (3) и соответствующую ей дискретную версию (4) реализовать для отдельных фурье-гармоник  $S(x, f)$  исходного сигнала  $s(x, t)$ , используя для каждой гармоники соответствующее ей значение фазовой скорости (16):

$$h(x_0, t) \approx \iint_0^t \frac{S(x_1, f) - S(x_2, f)}{\Delta x} U_h(x_0, f) e^{-i2\pi ft} df dt. \quad (17)$$

На рис. 12 показаны временные реализации исходного сигнала в точке  $\theta$ , его гидродинамиче-

ской составляющей, определенной на основании частотно-волновой фильтрации (12), гидродинамической составляющей, определенной с помощью предлагаемого в данной работе локального метода (3) (в предположении постоянной скорости конвекции возмущений), и с помощью варианта (17) этого метода, учитывающего дисперсию волн. Уже из сопоставления временных историй сигналов видно, что метод частотно-волновой фильтрации обеспечивает наиболее точное (“эталонное”) выделение гидродинамической составляющей, а метод (3) показывает заметные низкочастотные отклонения от эталонного результата.



**Рис. 12.** Временные реализации пульсаций давления в точке  $\theta$ . 1 – суммарный сигнал; 2 – гидродинамическая компонента, восстановленная с помощью частотно-волновой фильтрации; 3 – гидродинамическая компонента, восстановленная с помощью выражения (17) (с учетом дисперсии); 4 – гидродинамическая компонента, восстановленная с помощью выражения (3) (при  $U_c = 0.65U_j$ ).

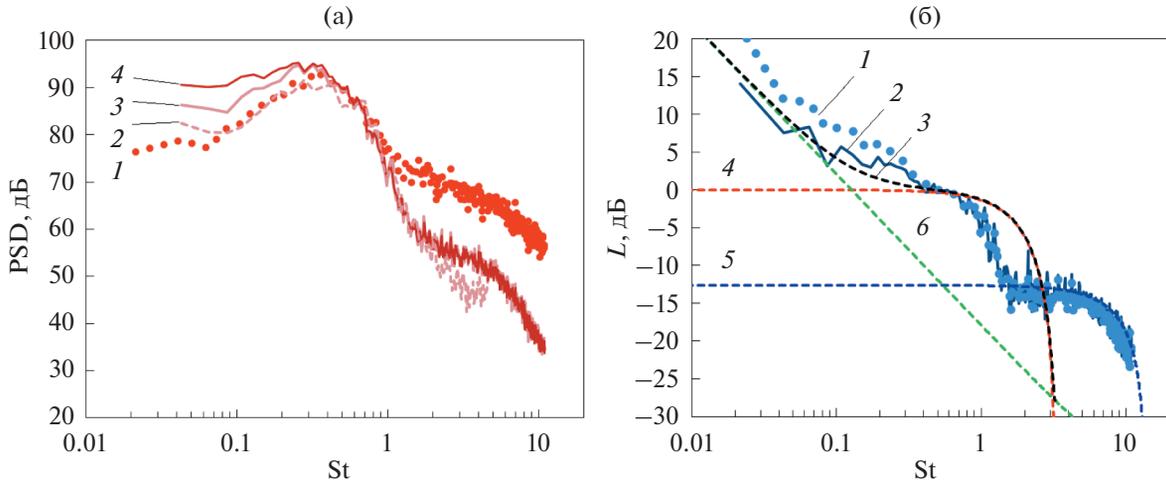
Учет дисперсии приближает результат к эталонному, однако низкочастотные колебания полностью не устраняются.

Указанные качественные выводы подтверждаются количественным анализом спектров и передаточных характеристик используемого фильтра, показанных на рис. 13. На рис. 13а приведены спектры пульсаций для полного сигнала и его гидродинамической составляющей, полученной тремя указанными выше способами. Как видно, оба варианта метода локального разделения пульсаций обеспечивают корректное восстановление спектра в достаточно широком диапазоне частот (приблизительно в пределах одной декады, где  $St = 0.2 \dots 2$ ). В области низких частот наблюдается завышение сигнала, причем для варианта с постоянной скоростью конвекции оно превышает 10 дБ при  $St < 0.1$ . Учет дисперсии улучшает качество восстановления, однако различие с эталонным спектром, полученным частотно-волновой фильтрацией, остается заметным ( $\sim 5$  дБ на низких частотах). В высокочастотной области “глубина” корректного восстановления гидродинамической компоненты (динамический диапазон метода) на фоне доминирующей акустической составляет около 15 дБ. Восстановление высокочастотной области спектра гидродинамических возмущений важно с точки зрения задач активного подавления шума взаимодействия струи и крыла в области экранирования прямого излучения от струи [11], где вклад именно данной частотной зоны может быть определяющим. Отметим, что динамический диапазон определяется соотношением фазовых скоростей гидродинамических и акустических возмущений (см. (8)), которое для рассмотренных условий является достаточно умеренным (около 1/5). При рассмотрении более медленных потоков, в которых это отношение может достигать 0.1 и менее, точность работы предложенного метода будет выше.

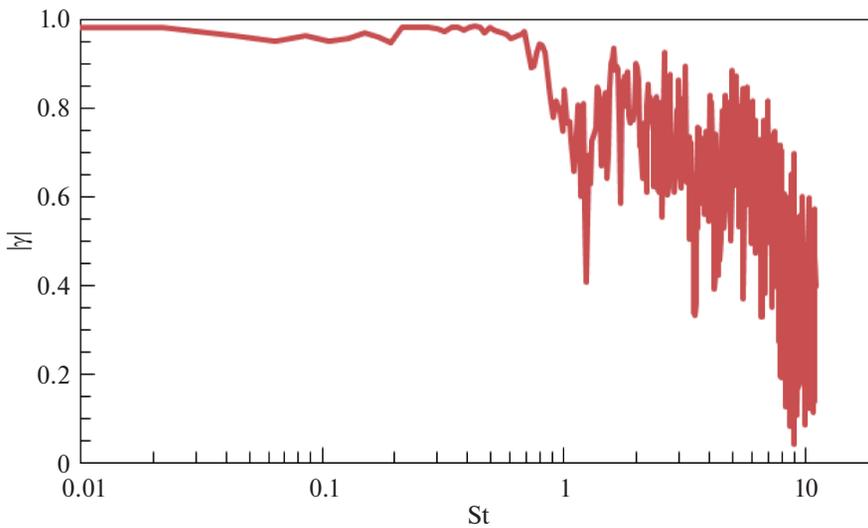
Более полно картина работоспособности предложенного алгоритма отражена на рис. 13б,

где показана полная передаточная функция  $L_Y$ , рассчитанная по отношению спектра выхода к спектру входа ( $L_Y = 20 \lg |Y/S|$ ), а также различные асимптотические оценки, поясняющие особенности функции  $L_Y$  и их связь с физическими эффектами и эффектами обработки. Поскольку частотно-волновая фильтрация показывает, что в области низких частот доминируют гидродинамические пульсации, а в области высоких – акустические, то можно ожидать, что, в соответствии с моделью (8),  $L_Y$  будет определяться соотношением (6) для низких частот и соотношением (9) – для высоких. В качестве конвективных скоростей пульсаций при теоретических оценках были приняты постоянные значения  $U_h = 0.65U_j \approx 120$  м/с и  $U_a = 500$  м/с. На высоких частотах действительно наблюдается хорошее соответствие с моделью (9) – здесь передаточная функция полностью определяется вкладом акустических пульсаций. На низких же частотах передаточная функция существенно отклоняется от расчетного значения, что соответствует видимому на рис. 13а завышению восстановленных гидродинамических спектров. Учет дисперсии при общем улучшении поведения  $L_Y$  на низких частотах не устраняет полностью видимое расхождение. Анализ показывает, что низкочастотное завышение восстановленной с помощью предложенного метода гидродинамической составляющей сигнала связано с нарушением гипотезы о “вмороженности” возмущений. Действительно, даже при рассмотрении достаточно близких точек 1 и 2, расстояние между которыми составляет  $\Delta x = 0.2D$ , когерентность между ними все же меньше 1 и составляет около  $|\gamma| \approx 0.97$  в области низких частот (рис. 14).

Оценим влияние эффекта потери когерентности. Если на вход фильтра (4) подать два единичных некоррелированных друг с другом сигнала, то его амплитудно-частотная передаточная функ-



**Рис. 13.** (а) – Спектры сигнала в точке  $\theta$  (нумерация кривых соответствует рис. 12); (б) – передаточные функции: 1 – передаточная функция  $L_\gamma$  (без учета дисперсии), 2 – передаточная функция  $L_\gamma$  (с учетом дисперсии), 3 – теоретическая низкочастотная асимптотика (19) с учетом эффекта потери когерентности (при  $|\gamma| \approx 0.97$ ), 4 – теоретическая низкочастотная асимптотика (8), 5 – теоретическая высокочастотная асимптотика (9), 6 – вклад эффекта потери когерентности (18).



**Рис. 14.** Модуль когерентности для сигналов в точках 1 и 2.

ция примет вид  $|\overline{W}|^2 = \left(\sqrt{2}N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^{-2}$ , из чего следует, что она неограниченно возрастает при  $\omega \rightarrow 0$ . В нашем случае интенсивность некоррелированного сигнала в общем уровне определяется значением  $1 - |\gamma|$ , а значит, эффект потери когерентности дает следующий вклад в передаточную функцию  $L_\gamma$

$$L_{\gamma\gamma} = \frac{1 - |\gamma|}{2\left(N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}, \quad (18)$$

а низкочастотная асимптотика полной передаточной функции может быть записана как

$$L_\gamma|_{\omega \rightarrow 0} \approx 10 \lg \frac{1 - |\gamma| + 2|\gamma| \sin^2\left(\frac{\omega N_a}{2}\right)}{2\left(N_h \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2}. \quad (19)$$

Соответствующие оценки для эффекта потери когерентности показаны на рис. 13б и они позволяют корректно описать данные вычислительно-го эксперимента.

Таким образом, для предложенного локального способа выделения гидродинамической составляющей сигнала имеются естественные ограничения, позволяющие ему корректно работать в конечном частотном диапазоне. В области низких частот его работоспособность ограничена потерей пространственной когерентности сигналов в двух рассматриваемых точках. Соответствующая граница может быть определена с использованием выражения (19). В области высоких частот работоспособность метода ограничивается частотой среза фильтра (6). Наконец, существует общее ограничение на динамический диапазон метода, связанное с соотношением различия мощностей акустической и гидродинамической составляющей и различия их фазовых скоростей (см. (8)) – чем больше различаются скорости конвекции двух типов возмущений, тем больше динамический диапазон метода.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый способ разделения звуковых и псевдозвуковых пульсаций, основанный на анализе сигналов в близкорасположенных точках. Отличительной особенностью способа является малый размер измерительной зоны: он много меньше масштаба корреляции псевдозвуковых возмущений. Способ основан на допущении о том, что гидродинамические пульсации подчиняются модели “вмороженных” возмущений, что позволяет в режиме реального времени преобразовать пространственную производную сигнала во временную, которая после интегрирования по времени дает оценку псевдозвуковых возмущений. С помощью разработанной теоретической модели предложенного подхода и на основании результатов его тестирования на модельных примерах и реалистичных сигналах, соответствующих возмущениям ближнего поля турбулентной струи, проведен анализ эффективности и границ применимости метода. Показано, что в области умеренных частот предложенный метод позволяет с приемлемой точностью выделять гидродинамическую составляющую из полного сигнала.

Авторы выражают благодарность В.Ф. Копьеву за внимание к работе и полезные обсуждения, а также И.А. Солнцеву за построение расчетной сетки для проведения численного моделирования.

В работе использованы данные измерений, проведенных на базе УНУ “Заглушенная камера с потоком АК-2” ФАУ ЦАГИ, модернизируемой при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-15-2022-1036.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 19-71-10064).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bull M.K. Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers: some reflections on forty years of research // *J. Sound Vib.* 1996. V. 190. № 3 P. 299–315.
2. Смольяков А.В., Ткаченко В.М. Измерение турбулентных пульсаций. Л.: Энергия, 1980.
3. Koop L., Kröber S., Ahlefeldt T., Ehrenfried K., Spehr C. Microphone-array Measurements in wind tunnels: Challenges and Limitations // Berlin Beamforming Conference. 2012. № 18. P. 22–23.
4. Голубев А.Ю., Кудашев Е.Б., Яблоник Л.П. Турбулентные пульсации давления в акустике и аэродинамике. М.: Физматлит, 2019. 424 с.
5. Flinovia: Flow Induced Noise and Vibration Issues and Aspects-III. Ciappi E., De Rosa S., Franco F., Hambric S.A., Leung R.C.K., Clair V., Maxit L., Totaro N. (Eds.). Springer Nature, 2021.
6. Wilson L.N. Experimental investigation of the noise generated by the turbulent flow around a rotating cylinder // *J. Acoust. Soc. Am.* 1960. V. 32. № 10. P. 1203–1207.
7. Arguillat B., Ricot D., Bailly C., Robert G. Measured wavenumber: Frequency spectrum associated with acoustic and aerodynamic wall pressure fluctuations // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 128. № 4. P. 1647–1655.
8. Кудашев Е.Б. Подавление акустических шумов при измерении пристеночных пульсаций давления // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 5. С. 644–649.
9. Кудашев Е.Б., Яблоник Л.П. Регистрация частотного спектра пристеночных турбулентных давлений на фоне акустического шума // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 6. С. 632–637.
10. Кудашев Е.Б., Яблоник Л.П. Развитие экспериментальных исследований турбулентных пристеночных пульсаций давления. Критический анализ и обобщение накопленных опытных данных // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 6. С. 639–649.
11. Бычков О.П., Фараносов Г.А. Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование шума взаимодействия струи и крыла самолета // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 4. С. 437–453.
12. Suzuki T., Colonius T. Instability waves in a subsonic round jet detected using a near-field phased microphone array // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 565. P. 197–226.
13. Беляев И.В., Бычков О.П., Зайцев М.Ю., Копьев В.А., Копьев В.Ф., Остриков Н.Н., Фараносов Г.А., Чернышев С.А. Разработка стратегии активного управления волнами неустойчивости в невозбужденных турбулентных струях // *Изв. Росс. Акад. наук. МЖГ.* 2018. № 3. С. 14–27.
14. Kervhervé F., Guittou A., Jordan P., Delville J., Fortuné V., Gervais Y., Tinney C. Identifying the dynamics underlying the large-scale and fine-scale jet noise similarity spectra // *AIAA Paper.* 2008. AIAA-2008-3027.
15. Tinney C.E., Jordan P. The near pressure field of co-axial subsonic jets // *J. Fluid Mech.* 2008. V. 611. P. 175–204.
16. Kervhervé F., Jordan P., Cavaliere A.V., Delville J., Bogey C., Juvé D. Educating the source mechanism associated with

- downstream radiation in subsonic jets // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 710. P. 606–640.
17. *Grizzi S., Camussi R.* Wavelet analysis of near-field pressure fluctuations generated by a subsonic jet // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 698. P. 93–124.
  18. *Camussi R., Meloni S.* On the application of wavelet transform in jet aeroacoustics // *Fluids.* 2021. V. 6. № 8. P. 299.
  19. *Kopiev V., Faranosov G., Bychkov O., Kopiev V.I., Moralev I., Kazansky P.* Active control of jet-plate interaction noise for excited jets by plasma actuators // *J. Sound Vib.* 2020. V. 484. P. 115515.
  20. *Копьев В.Ф., Бычков О.П., Копьев В.А., Фараносов Г.А., Моралев И.А., Казанский П.Н.* Управление волнами неустойчивости в невозбужденной турбулентной струе с помощью плазменных актуаторов в узкой полосе частот // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 4. С. 431–439.
  21. *Копьев В.Ф., Бычков О.П., Копьев В.А., Фараносов Г.А., Моралев И.А., Казанский П.Н.* Активное управление шумом взаимодействия струи и крыла с помощью плазменных актуаторов в узкой полосе частот // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 2. С. 177–190.
  22. *Karban U., Martini E., Jordan P.* Modeling closed-loop control of installation noise using Ginzburg-Landau equation // *arXiv preprint.* 2023. arXiv:2303.03176. P. 1–30.
  23. *Taylor G.I.* The Spectrum of Turbulence // *Proc. Royal Soc. A.* 1938. V. 164. P. 476–490.
  24. *Kuznetsov V.R., Praskovsky A.A., Sabelnikov V.A.* Fine-scale turbulence structure of intermittent shear flows // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 243. P. 595–622.
  25. *Хемминг Р.В.* Цифровые фильтры. Пер. с англ. Под ред. Трахтмана А.М. М.: Сов. радио, 1980.
  26. *Faranosov G.A., Goloviznin V.M., Karabasov S.A., Kondakov V.G., Kopiev V.F., Zaitsev M.A.* CABARET method on unstructured hexahedral grids for jet noise computation // *Computers & Fluids.* 2013. V. 88. P. 165–179.
  27. *Markesteyn A.P., Semiletov V.A., Karabasov S.A.* CABARET GPU Solver for Fast-Turn-Around Flow and Noise Calculations // *AIAA Paper.* 2015. AIAA-2015-2223.
  28. *Faranosov G., Bychkov O.P., Kopiev V., Soares L.F., Cavalieri A.V.* The Modeling of Jet-Plate Interaction Noise in the Presence of Co-Flow // *AIAA Paper.* 2019. AIAA-2019-2492.
  29. *Бычков О.П., Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф., Фараносов Г.А., Чернышев С.А.* О двух подходах к моделированию шума низкоскоростных дозвуковых струй // *Докл. Росс. Акад. наук. Физика, Технические Науки.* 2022. Т. 506. № 1. С. 16–25.
  30. *Mengle V.G.* The Effect of Nozzle-to-Wing Gully Height on Jet Flow Attachment to the Wing and Jet-Flap Interaction Noise // *AIAA Paper.* 2011. AIAA-2011-2705.
  31. *Faranosov G.A., Kopiev V.F., Ostrikov N.N., Kopiev V.A.* The effect of pylon on the excess jet-flap interaction noise // *AIAA Paper.* 2016. AIAA-2016-3043.
  32. *Бычков О.П., Фараносов Г.А.* Валидация двухточечной модели шума взаимодействия струи и крыла для реалистичной конфигурации // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 2. С. 146–154.