

УДК 52-17

ВЛИЯНИЕ ЦИФРОВОГО ШУМА НА РЕЗУЛЬТАТЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТРАНЗИТНОЙ КРИВОЙ БЛЕСКА

© 2019 г. М. К. Абубекеров^{1*}, Н. Ю. Гостев^{1**}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга, Москва, Россия

Поступила в редакцию 29.06.2018 г.; принята в печать 13.09.2018 г.

Часто используемые алгоритмы интерпретации кривых блеска, например, распространенный алгоритм ЖКТЕВОР, имеют ограниченную точность, что приводит к ошибкам округления, и, как следствие, к нефизическому вкладу в невязку (цифровому шуму). На примере интерпретации транзитной кривой блеска двойной системы HD 209458 продемонстрирована необходимость учета цифрового шума. Показано, что улучшение точности вычисления кривой блеска позволяет более надежно решать вопрос об адекватности наблюдаемой кривой блеска используемой модели, поскольку исключается нефизический вклад в невязку, связанный с ошибками вычислений. Интернет-ссылка на разработанный алгоритм приведена в Заключение.

DOI: 10.1134/S0004629919020014

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проводятся массовые высокоточные наблюдения транзитных кривых блеска, в связи с чем актуальна задача их надежной интерпретации [1, 2]. При этом представляется возможным существенное увеличение возможностей интерпретации (анализа кривых блеска) по сравнению с теми, что обеспечивают остальные алгоритмы. Прежде всего это связано с улучшением точности вычисления кривой блеска за счет использования интегрирования путем квадратур Гаусса [3, 4].

Большинство используемых на данный момент алгоритмов основано на алгоритме ЖКТЕВОР, созданном еще в начале 1980-х годов [5]. В алгоритме ЖКТЕВОР вычисление интегралов в выражениях для блеска затменной двойной системы осуществляется непосредственно — путем прямого суммирования по участкам, на которые разбивается область интегрирования. При этом ошибка в вычислении интеграла обратно пропорциональна количеству производимых элементарных действий (соответственно времени вычисления), а точность результата существенно ограничена временем, которые можно отвести на вычисления. Такая точность соответствовала возможностям ЭВМ, которые существовали во время создания ЖКТЕВОР, и точности наблюдений того времени.

При этом во многих случаях при решении физической задачи путем интерпретации кривой блеска приходится учитывать ошибки нефизической природы — погрешность вычислений, ошибки, связанные с округлением (цифровой шум). Однако с учетом возможностей современных вычислительных машин и точности современных наблюдений блеска, содержащих десятки тысяч точек, необходимы вычисления с лучшей точностью. Используя квадратурную формулу Гаусса для нахождения численных значений интегралов, можно за приемлемое время получить результат с точностью, соответствующей современной точности чисел с плавающей точкой (около 18 значащих цифр).

Улучшение точности вычисления позволяет прежде всего более качественно решать вопрос об адекватности наблюдаемой кривой блеска используемой модели. Поскольку исключается нефизический вклад в невязку, связанный с ошибками вычислений, можно делать более надежные выводы о том, насколько значимо изменяется невязка в тех или иных случаях. Например, можно рассмотреть, насколько значимо изменение минимального значения невязки при добавлении параметров, по которым производится интерпретация, в том числе, как зависит минимальная невязка от используемых законов потемнения к краю.

Следует отметить, что улучшение точности вычисления кривой блеска может существенно влиять на значение минимальной невязки даже при отсутствии значимого изменения в значениях самих искомых параметров. Это можно объяснить тем,

*E-mail: marat@sai.msu.ru

**E-mail: ngostev@mail.ru

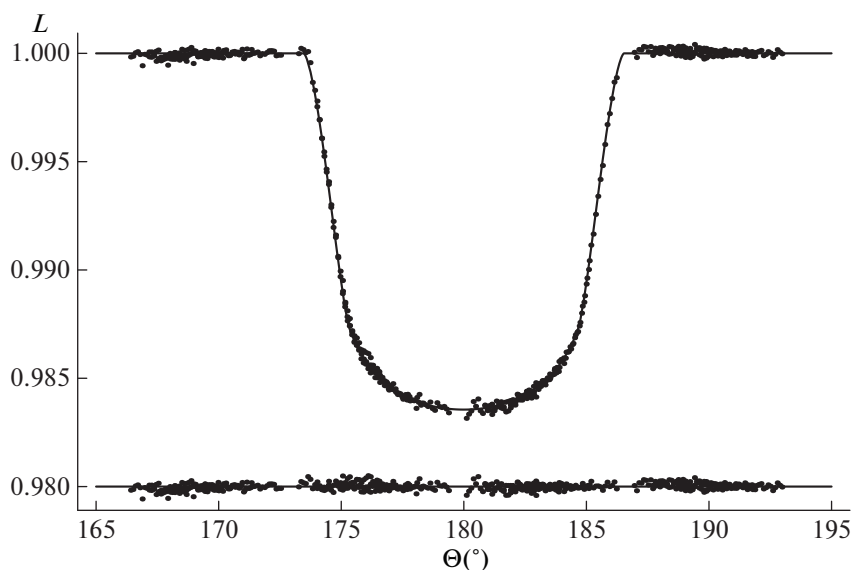


Рис. 1. Наблюдаемая (точки) и теоретическая (сплошная линия) кривые блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [6]. Внизу показаны отклонения наблюдаемых значений блеска от теоретической кривой блеска, рассчитанной в рамках модели с нелинейным (квадратичным) законом потемнения к краю.

что цифровой шум может учитываться в ошибках искомых параметров, получаемых методом Монте-Карло. При таких обстоятельствах можно сделать вывод, что алгоритм ЖКТЕВОР в определенных случаях позволяет получать на практике удовлетворительные результаты, а именно, значения параметров системы, оцениваемые методом Монте-Карло (в предположении априорной адекватности модели наблюдательным данным). В то же время, если речь идет об интерпретации без такого предположения (о верности модели) — когда возможно пустое доверительное множество или когда решается вопрос о статистически значимом изменении невязки, — требуется более точный расчет значения невязки.

2. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Для демонстрации работы разработанного нами алгоритма использовалась наблюдаемая кривая блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [6]. Наблюдаемая кривая блеска, представленная в [6], получена на HST в апреле-мае 2000 г. Спектры получены с использованием спектрометра STIS со спектральной решеткой G750M. Наблюдения проводились в диапазоне $5813\text{--}6382 \text{ \AA}$ с разрешением $R = \lambda/\Delta\lambda = 5440 \text{ \AA}$ (подробнее см. [6]). Нормированная кривая блеска транзита экзопланеты по диску звезды представлена на рис. 1. Кривая блеска включает в себя 556 индивидуальных значений блеска двойной системы. Среднеквадратичная ошибка индивидуального измерения σ_i^{obs} для разных точек кривой блеска заключена в пределах от

1.13×10^{-4} до 2.47×10^{-4} (в долях внезатменной интенсивности). Величины относительных ошибок (в долях глубины затмения) лежат в пределах от $\sim 7 \times 10^{-3}$ до $\sim 1.5 \times 10^{-2}$. Интерпретация кривой блеска выполнена в линейном и квадратичном законе потемнения звездного диска к краю.

Кривая блеска двойной системы Kepler-15b, также использованная нами для тестирования алгоритма, взята из каталога NASA Exoplanet Archive. Использовались наблюдательные данные короткой каденции (short cadence) 18-го сета наблюдений, выполненного с 18 сентября по 18 октября 2009 г.

3. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Мы использовали модель двух сферических звезд на круговой орбите, предполагалось отсутствие эффектов отражения и эллипсоидальности. Геометрия модели изображена на рис. 2, где R_* — радиус звезды, R_o — радиус планеты, D — расстояние между центрами дисков компонентов, ρ , Ψ — полярный радиус и полярный угол точки на диске звезды соответственно. Начало координат находится в центре звезды, полярный угол отсчитывается против часовой стрелки.

Для круговой орбиты расстояние между центрами дисков звезд Δ зависит от фазы θ и угла наклона орбиты i как

$$\Delta(\theta, i) = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta}. \quad (1)$$

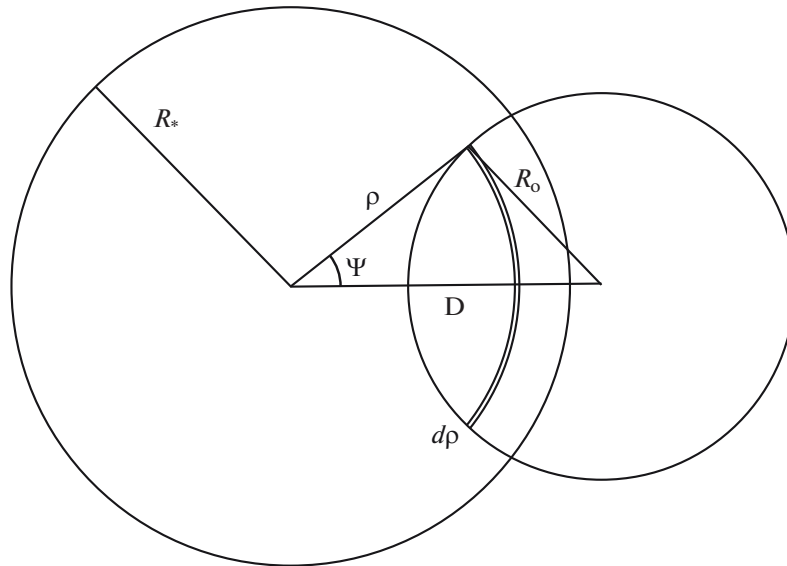


Рис. 2. Модель затменной двойной системы. Проекция на картинную плоскость.

При расчете кривой блеска в качестве функции распределения яркости по диску звезды использовался линейный закон потемнения к краю диска с линейным коэффициентом потемнения к краю x

$$I(\rho) = I_0 \left(1 - x + x \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_*^2}} \right), \quad (2)$$

и квадратичный закон потемнения к краю диска, отличающийся от линейного дополнительным слагаемым, содержащим квадратичный коэффициент потемнения к краю y :

$$I(\rho) = I_0 \left(1 - x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_*^2}} \right) - y \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_*^2}} \right)^2 \right). \quad (3)$$

Здесь ρ — полярное расстояние от центра диска звезды, I_0 — яркость в центре диска, а R_* — радиус диска звезды. Яркость в центре диска компонента 1 (звезды) далее будем обозначать как I_0 . Яркость I_0 в центре компонента 2 (планеты) и соответственно яркость в любой точке ее диска, предполагается равной нулю. Компонент 2 (планета) в орбитальной фазе $\theta = \pi$ затмевает компонент 1 (звезду). Единицей измерения длины в наших моделях является расстояние между центрами звезды и планеты a , $a = 1$, орбита считается круговой. “Третий свет” в модели отсутствует. Искомыми параметрами модели являются радиусы звезды R_* и планеты R_o , угол наклона орбиты i , коэффициент потемнения к краю x , а в случае квадратичного закона потемнения к краю также и коэффициент потемнения y .

Полный блеск звезды, который совпадает с полным блеском системы вне затмения, равен

$$L^{\text{full}} = 2\pi \int_0^{R_*} I(\rho) \rho d\rho = \pi R_*^2 I_0 \left(1 - \frac{x}{3} \right), \quad (4)$$

в модели с линейным законом потемнения к краю и

$$L^{\text{full}} = 2\pi \int_0^{R_*} I(\rho) \rho d\rho = \pi R_*^2 I_0 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{6} \right) \quad (5)$$

в модели с квадратичным законом потемнения к краю.

Яркость в центре диска I_0 выбирается таким образом, чтобы полный блеск системы был равен единице (условие нормировки).

Падение блеска при затмении есть

$$L^{\text{dec}}(\Delta, R_*, R_o, x, y) = \iint_{S(\Delta)} I(S) dS, \quad (6)$$

где $S(\Delta)$ — область перекрытия дисков (зависящая от расстояния между их центрами). Основной задачей при вычислении кривой блеска является вычисление падения блеска для затмения.

Модель двух сферических звезд для интерпретации транзитной кривой блеска, полученной в оптическом диапазоне, физически обоснована. В оптическом диапазоне звезда и планета обладают резким краем. Эффекты, связанные с деформацией атмосферы экзопланеты звездным ветром, или эффект кометного хвоста, в оптическом диапазоне не проявляются или пренебрежимо малы. Поэтому аппроксимация звезды и диска экзопланеты кругом для оптического диапазона удовлетворительна.

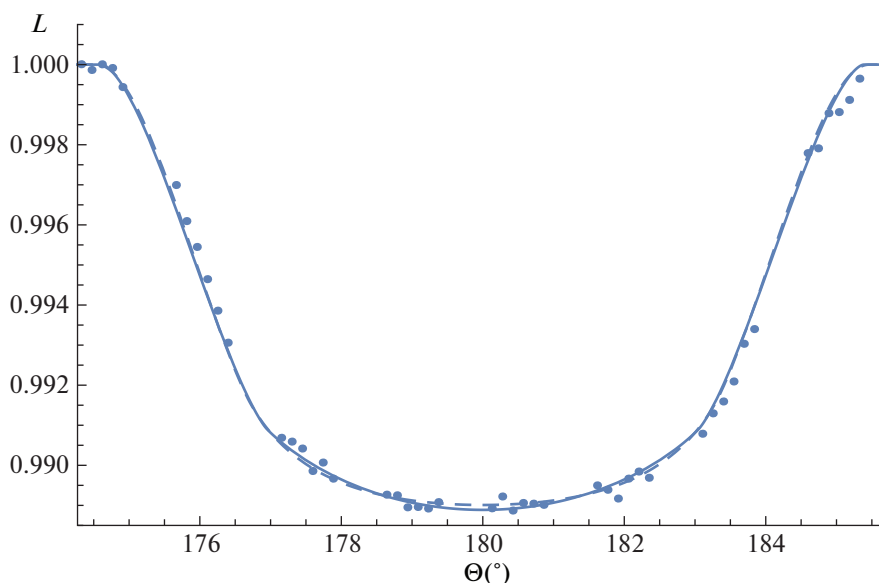


Рис. 3. Наблюдаемая (точки) и теоретические кривые блеска двойной системы с экзопланетой Kepler-15b. Сплошной линией показана кривая блеска, рассчитанная в линейном законе потемнения к краю, штриховой линией — в квадратичном.

4. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

При интерпретации данных нами использовался алгоритм вычисления падения блеска двойной системы, подробно изложенный в работах [3, 4]. В данном алгоритме интегрирование по области перекрытия дисков выполняется путем аналитического вычисления интегралов через эллиптические функции (для вычисления которых с любой заданной точностью существуют эффективные алгоритмы), либо путем применения формулы квадратур Гаусса после определенных аналитических преобразований подынтегрального выражения.

5. РАСЧЕТЫ

В работе Соуворза [5], в которой используется алгоритм интерпретации кривой блеска, основанный на ЖКТЕВОР, для системы HD 209458 значение невязки в линейном законе потемнения к краю составляет $\chi^2 = 1.1457$, что соответствует максимальному уровню значимости 1%. Отметим, что интерпретация в указанной работе ведется по следующим параметрам: радиусу звезды и планеты, наклонению орбиты, эксцентриситету и четырем коэффициентам потемнения к краю.

При использовании же нашего алгоритма [3, 4] в предположении линейного закона потемнения к краю мы получаем значение невязки $\chi^2 = 1.103$, что соответствует максимальному уровню значимости 6%. Хотя сами значения искоемых параметров согласуются в пределах соответствующих ошибок, мы имеем заметное различие в минимальных значениях невязок.

В случае квадратичного закона потемнения к краю использование нашего алгоритма дает невязку $\chi^2 = 1.0134$, что соответствует максимальному уровню значимости 46%. Таким образом, использование более точного алгоритма, подавляющего цифровой шум, то есть без вклада, вызванного ошибками вычисления, позволяет сделать вывод о статистически значимом уменьшении невязки при введении в алгоритм квадратичного закона потемнения к краю. Также в результате устранения нефизического вклада в невязку появляется возможность работать с непустым доверительным множеством на более высоком уровне значимости (более низком уровне доверия). Отметим, что вывод о предпочтительности квадратичного закона потемнения к краю для системы HD 209458 сделан и в работе [7], однако там этот вывод в большей степени основан на нефизической скоррелированности угла наклона орбиты с длиной волны в линейном законе потемнения к краю. Уменьшение же невязки при переходе от линейного к квадратичному закону потемнения к краю рассматривается как незначительное. Использование нашего алгоритма, позволяющего пренебречь ошибками округления, показывает, что уменьшение невязки вызывает изменение максимального уровня значимости с 6% до 46%, а это, очевидно, значительное изменение. Таким образом, устранение цифрового шума позволяет выявить предпочтительность квадратичного закона потемнения к краю для системы HD 209458 по одному лишь уменьшению невязки.

В качестве обратного примера можно привести кривую блеска Kepler-15b (см. рис. 3), для которой

не наблюдается значимого уменьшения невязки при переходе к квадратичному закону потемнения к краю, несмотря на видимые различия между соответствующими кривыми блеска.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Сказанное выше наглядно демонстрирует необходимость применения алгоритмов, обеспечивающих высокоточное вычисление кривой блеска для ответственных суждений об адекватности модели наблюдательным данным при интерпретации транзитных кривых блеска. Разработанный нами алгоритм на основе квадратурных формул Гаусса позволяет работать на точности, соответствующей современной разрядности чисел с плавающей запятой (19 значащих цифр). Такая точность вычисления кривой блеска позволяет более надежно делать вывод об адекватности наблюдаемой кривой блеска используемой модели.

Использование разработанного нами алгоритма практически исключает нефизический вклад в невязку, связанный с ошибками вычислений, и позволяет делать более надежные выводы о том, насколько значимо изменяется невязка в тех или иных случаях. Например, можно понять, насколько значимо изменение минимального значения невязки при добавлении параметров, по которым производится интерпретация, в том числе, как зависит минимальная невязка от используемых законов потемнения к краю. Кроме того, интерес представляет и сама по себе возможность работать на более высоком уровне значимости (более низком уровне доверия).

Следует отметить, что вопрос адекватности теоретической кривой блеска наблюдательным данным тесно связан с обнаружением физических эффектов, описываемых используемой моделью. Высокая чувствительность критерия χ^2 к отклонениям наблюдательных данных от той или иной модели позволяет обнаруживать достаточно тонкие физические эффекты, но и вместе с тем требует достаточно точного вычисления статистики χ^2 .

Алгоритм предполагается использовать при массовой интерпретации транзитных кривых блеска двойных с экзопланетами для получения эмпирических значений коэффициентов потемнения к краю звезд разных спектральных классов [2].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный авторами алгоритм интерпретации транзитных кривых блеска общедоступен. Использование алгоритма позволит более качественно анализировать богатый наблюдательный материал, поставляемый наземными и космическими обсерваториями. С алгоритмом можно ознакомиться по адресу <http://lnfm1.sai.msu.ru/~ngostev/algorithm.html>.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность А.М. Черепашку за плодотворное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **85**(2), 121 (2008).
2. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **87**(12), 1199 (2010).
3. M. K. Abubekеров and N. Yu. Gostev, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **432**, 2216 (2013).
4. M. K. Abubekеров and N. Yu. Gostev, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **459**, 2078 (2016).
5. J. Southworth, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **379**, L11 (2007).
6. T. M. Brown, D. Charbonneau, R. L. Gilliland, R. W. Noyes, and A. Burrows, *Astrophys. J.* **552**, 699 (2001).
7. J. Southworth, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **386**, 1644 (2008).